Deduksjon i utsagnslogikk

Lars Reinholdtsen, Universitetet i Oslo

Merknad

Dette notatet om deduksjon er ikke pensum, og den behandlingen som Goldfarb gir av emnet fra §33 og utover dekker fullt ut det som forventes i kurset. Notatets hensikt er å introdusere noen av grunnideene i deduksjon og en liten del av metoden litt tidligere i semesteret slik at det blir bedre tid til å bli fortrolig med den og øve den inn. Goldfarbs metode eller system omfatter både predikatlogikk og utsagnslogikk. Her gis bare et fragment for utsagnslogikk.

Introduksjon

Vi har lært fra bruken av sannhetsverditabeller en metode for å undersøke om et resonnement er utsagnslogisk gyldig eller ikke. Hvis vi for eksempel blir presentert for det følgende resonnementet

A
B
C
____
Derfor: D

så kan vi analysere utsagnene som er involvert, sette dem inn i en sannhetsverditabell og inspisere tabellen. Dersom premissene aldri er sanne uten at konklusjonen også er sann, så er slutningen gyldig. Dette er en i prinsippet sikker metode, men den kan være tungrodd hvis vi har mange atomære skjemaer. Dessuten fungerer metoden kun i utsagnslogikk.

Det finnes en annen metode for å undersøke resonnementer. Denne metoden går ut på at vi deler opp et mer komplisert resonnement i små skritt. Dersom vi er trygge på at de små skrittene hver for seg er begrunnet så kan vi også være trygge på at det vi til slutt kommer fram til ved hjelp av dem vil være begrunnet. Med andre ord, hvis vi har en liste av nøye angitte **slutningsregler**, så kan vi ta utgangspunkt i premissene våre og fra dem skritt for skritt utlede nye konsekvenser i samsvar med reglene. Hvis vi på denne måten kan komme fram til den ønskede konklusjonen så vet vi at konklusjonen følger logisk fra premissene og at resonnementet er gyldig. Forutsetningen er at reglene vi bruker her selv er begrunnet[1].

[1] Å begrunne regelsystemet vil si at vi viser at systemet er **sunt**, eller at reglene er "sannhetsbevarende". Vi kommer ikke til å vise at reglene som brukes i dette notatet er sunne. (Goldfarb gir et slikt bevis i §35.)

Et deduksjonssystem er et system for utledning etter slike nøye angitte regler og en deduksjon er en slik type utledning. På papiret vil en deduksjon være en liste med linjer som er notert ned på en spesiell måte. For det første holder vi orden på linjene ved å nummerere hver linje. For det andre angir vi hvilken regel som er brukt for å komme fram til skjemaet på linjen, og vi angir (siterer) de tidligere linjene som vi har brukt regelen på for å utlede skjemaet på gjeldende linje. Sist så må deduksjonen også inneholde en oversikt over hvilke av premissene som utledningen avhenger av så langt ved at disse premissnumrene nevnes. Den spesielle måten å notere på skal sikre to ting: at vi enkelt kan se at reglene har blitt brukt på riktig måte, og at vi klarer å holde oversikt over hvilke premisser som til enhver tid har blitt brukt i utledningen. En linje i en deduksjon inneholder altså fire elementer; premissnumre, et linjenummer, et skjema og en regelangivelse med linjesiteringer, og de er skrevet i denne rekkefølge:

[premissnumre]	(linjenummer)	skjema	sitering og regel

En linje i en deduksjon kan se ut som dette:

[1,2]	(5)	−r	(2)(4) mt

Her er dette den femte linjen i en deduksjon, og vår måte å notere på forteller at skjemaet −r har vi fått fra linje 2 og 4 ved å bruke regelen mt (modus tollens), og at premissene som linje 5 avhenger av er premiss 1 og 2.

Vi skal nå presentere et deduksjonssystem med 7 grunnleggende slutningsregler. For å holde styr på systemet med akkurat disse reglene gir vi det et navn: DED.

Slutningsregler – grunnregler i DED

De sju grunnleggende reglene vi skal innføre i systemet DED heter premissregelen (P), discharge (D), konjunksjonsintroduksjon (•intro), konjunksjonseliminasjon (•elim), modus ponens (mp), modus tollens (mt), og ekvivalent omforming (ekv).

Premissregelen (P)
På enhver linje (n) kan vi sette et skjema med [n] som premissnummer. Vi anfører P som begrunnelse (ingen sitering).

Uten denne regelen kommer vi ikke i gang. En linje som vi har fått fra denne regelen vil ha denne formen:

[n]	(n)	skjema	P

De andre reglene forteller oss hvordan vi kan komme fra tidligere linjer til nye linjer i utledningen.

Hvis vi på en linje har skjemaet	A
Og på en annen linje har	B
Så bør vi intuitivt kunne slutte	A • B

Den neste regelen forteller oss hvordan dette skal gjøres.

Konjunksjonsintroduksjon (•intro)
Hvis det på en linje (l) er et skjema R og på linje (m) et skjema S, da kan vi på en ny linje (n) sette en av konjunksjonene R • S eller S • R. Premissnumrene er de til linje (l) i tillegg til linje (m). Vi anfører (l) (m) som sitering og •intro som begrunnelse.

Dette vil kunne se ut som følger:

[a…b]	(l)	R	…
	:		
[c…d]	(m)	S	…
	:		
[a...b, c...d]	(n)	S • R	(l) (m) •intro

Den følgende regelen tar oss motsatte vei (den blir også av og til kalt ”simplifikasjon”).

Konjunksjonseliminasjon (•elim)
Hvis det på en linje (m) er et konjunksjonsskjema R • S, så kan vi på en ny linje (n) sette ett av skjemaene R eller S. Premissnumrene er de samme som for linje (m). Vi anfører (m) som sitering og •elim som begrunnelse.

Slik vil bruk av denne regelen se ut:

[a…b]	(m)	R • S	…
	:		
[a…b]	(n)	R	(m) •elim

Vi kommer nå til to regler som har fått navn fra to av de mest berømte slutningsformene i logikken; modus ponens og modus tollens.

Modus ponens (mp)
Hvis det på en linje (l) er en kondisjonal $S \supset R$, og på en linje (m) er skjemaet S, så kan vi på en ny linje (n) sette skjemaet R. Premissnumrene er de til linje (l) i tillegg til linje (m). Vi anfører (l) (m) som sitering og mp som begrunnelse.

Modus tollens (mt)
Hvis det på en linje (l) er en kondisjonal $S \supset R$, og på en linje (m) er negasjonen −R, så kan vi på en ny linje (n) sette −S. Premissnumrene er de til linje (l) i tillegg til linje (m). Vi anfører (l) (m) som sitering og mt som begrunnelse.

Bruk av modus ponens vil se slik ut:

[a…b]	(l)	$S \supset R$	…
	:		
[c…d]	(m)	S	…
	:		
[a...b, c...d]	(n)	R	(l) (m) mp

Og bruk av modus tollens vil se slik ut:

[a…b]	(l)	$S \supset R$	…
	:		
[c…d]	(m)	−R	…
	:		
[a...b, c...d]	(n)	−S	(l) (m) mt

De fem reglene vi har innført så langt lar oss foreta noen av de deduksjonene vi ville ønske som involverer konjunksjoner, kondisjonaler og negasjoner. Men vi kan for eksempel ikke vise at $p \equiv q$ følger fra $(p \supset q) \bullet (q \supset p)$, og heller ikke noen ting om hvilke konklusjoner som måtte følge hvis et av premissene er en disjunksjon, ettersom disse reglene ikke sier noe om hvordan vi kan behandle bikondisjonaler og disjunksjoner.

Siden vi vet fra en sannhetsverditabell at f.eks. $p \vee q$ er ekvivalent med negasjonen av en konjunksjon, nemlig $-(-p \bullet -q)$, og vi vet en tilsvarende ekvivalens for bikondisjonal, kunne vi arbeidet med de ekvivalente skjemaene. Det er imidlertid nyttig å kunne innlemme den følgende regel i systemet vårt som sier at vi kan gjøre slike utbyttinger av ekvivalente skjemaer inne i en deduksjon.

Ekvivalent omforming (ekv)
Hvis det på en linje (m) forekommer et skjema S så kan vi på en ny linje (n) sette et annet skjema R som er sannhetsfunksjonelt ekvivalent med S. Premissnumrene er de samme som for linje (m) og vi anfører (m) som sitering og ekv som begrunnelse.

Her er et eksempel. Med denne regelen kan vi vise at p følger fra premissene p v q og −q ved følgende deduksjon der vi også bruker modus ponens.

Eksempel 1

[1]	(1)	p v q	P
[2]	(2)	−q	P
[1]	(3)	−q ⊃ p	(1) ekv
[1,2]	(4)	p	(2)(3) mp

I dette eksempelet må vi på forhånd forvisse oss om at −q ⊃ p faktisk er ekvivalent med p v q, for eksempel ved hjelp av sannhetsverditabell. Dette kan se ut til å fjerne noe av poenget med å bruke deduksjon for å undersøke gyldigheten av slutninger. Dette er for så vidt også riktig for enkle slutninger som dette eksempelet, men for mer kompliserte slutninger kan det være en gevinst å hente.

Discharge regelen

For å vise at en kondisjonal A ⊃ C holder så kan vi prøve å utlede kondisjonalen direkte gjennom de reglene vi har innført hittil. Men en vanlig måte å forsøke å bevise en slik kondisjonal er å resonnere som følger. Vi antar A for argumentets skyld og ser hva vi kan utlede fra denne antagelsen. Hvis vi i en deduksjon der vi har innført A som antagelse eller premiss kan komme fram til at C også må gjelde, så har vi bevist at A ⊃ C gjelder. Det vil si at en regel som lar oss gjøre det følgende i en deduksjon burde være korrekt:

[1]	(1)	A	P
	:		
[1, i..j]	(m)	C	(utledning fra A og andre premisser [i..j])
	:		
[1, i..j]	(n)	A ⊃ C	(1)(m) ved REGEL

De reglene vi har innført så langt har alle krevd at hvis en ny linje fås fra to gamle linjer, så må premissnumrene til begge de gamle linjene være med i den nye linjen (dette gjelder •intro, mp og mt). Men i dette nye eksempelet vil det være noe misvisende ved å gjøre det slik. Hvis utledningen av C på linje (m) er korrekt så vil ikke *sannheten* av A ⊃ C avhenge av at premiss 1 er *sant*. A er her bare et hjelpepremiss og det ville være mindre misvisende om vi hadde notert linje (n) slik at det kom fram at vi kan ”kvitte oss” med dette hjelpepremisset etter at det har gjort sin nytte. Det følgende ville altså vært mer riktig:

[i..j]	(n)	$A \supset C$	(1)(m) ved REGEL

Den følgende regelen gir oss dette. Goldfarb kaller den ”discharge”. (Vi kunne kalt den ”avløsning” fordi et hjelpepremiss som har gjort sin nytte blir avløst, men vi bruker hans betegnelse. En vanlig norsk betegnelse er ”hypotetisk utledning”.)

Discharge (D)
Hvis det på en linje (m) finnes et skjema S og et av premissnumrene er [k] og R er skjemaet på linje (k), da kan vi på en ny linje (n) sette kondisjonalen $R \supset S$, der premissnumrene er alle de som (m) har bortsett fra [k]. Vi anfører [k] (m) som sitering og D som begrunnelse.

Dette vil se ut slik

[k]	(k)	R	…
	:		
[i..j,k]	(m)	S	…
	:		
[i..j]	(n)	$R \supset S$	[k] (m) D

Den spesielle siteringen der k er i klammer [k] i stedet for vanlige parenteser viser at det var et hjelpepremiss som ble brukt.

Det følgende eksempelet viser hvordan discharge og bruken av hjelpepremisser (premiss [2] og [3]) kan være nyttig. Eksempelet viser at $p \supset (q \supset r)$ følger logisk fra $(p \bullet q) \supset r$.

Eksempel 2

[1]	(1)	$(p \bullet q) \supset r$	P
[2]	(2)	p	P
[3]	(3)	q	P
[2,3]	(4)	$(p \bullet q)$	(2)(3) •intro
[1,2,3]	(5)	r	(1)(4) mp
[1,2]	(7)	$q \supset r$	[3](5) D
[1]	(8)	$p \supset (q \supset r)$	[2](7) D

Discharge lar oss også vise at et skjema er logisk gyldig ved at vi kan kvitte oss med alle premisser som vi bruker underveis, slik at skjemaet til slutt framtrer på en linje uten premissnumre i det hele tatt (eksempel 3).

Eksempel 3

[1]	(1)	q	P
[2]	(2)	p	P
[2]	(3)	$q \supset p$	[1](2) D
	(4)	$p \supset (q \supset p)$	[2](3) D

Siden skjemaet i linje 4 forekommer uten premissnumre viser dette at dets sannhet ikke avhenger av noen av premissene [1] eller [2], selv om utledningen foregikk gjennom dem.

Dermed er de sju grunnreglene i systemet DED introdusert. Vi kunne ha gitt andre regler i stedet, enten flere eller færre. Den delen av Goldfarbs system som omhandler utsagnslogikk har f.eks. bare tre regler[2]. Vi kunne ha bevist at disse reglene er likeverdige med Goldfarbs (at det som kan deduseres med det ene regelsettet kan også deduseres med det andre), men det skal vi ikke gjøre her. Vi kunne også bevist at regelsettet er **komplett**, dvs. at det lar oss utlede alle de tingene vi ønsker å kunne utlede[3], men det ligger også utenfor pensum på dette kurset. (Goldfarb gir et slikt bevis i §38).

Huskeliste/ kortform for grunnreglene i DED:

<table>
<tr><td colspan="2">P Ethvert skjema kan settes opp som premiss.</td></tr>
<tr><td>• intro $\dfrac{\begin{array}{c}A\\ B\end{array}}{A \bullet B}$</td><td>• elim $\dfrac{A \bullet B}{A}$</td></tr>
<tr><td>mp $\dfrac{\begin{array}{c}A \supset B\\ A\end{array}}{B}$</td><td>mt $\dfrac{\begin{array}{c}A \supset B\\ -B\end{array}}{-A}$</td></tr>
<tr><td>ekv $\dfrac{A}{B}$ hvis A og B er ekvivalente</td><td>D $\dfrac{\begin{array}{c}A\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \supset B}$</td></tr>
</table>

Avledete regler og flere eksempler

Valg av grunnregler er vilkårlig. Et bestemt valg kan gjøre at enkelte utledninger blir mer kompliserte enn andre. Med de sju grunnreglene vi har valgt blir det

[2] To av disse er felles i de to systemene; premissregelen (P) og discharge (D). Det betyr at de gjenværende 5 reglene i vårt system på en måte er overflødige og kunne forenkles til Goldfarbs ene (den han kaller TF). Vi har valgt å bruke flere regler fordi det kan være nyttig fra et øvelsesperspektiv å trene med litt flere enn tre regler.

[3] Det vi ”ønsker å kunne utlede” er at fra hvilke som helst premisser skal vi kunne utlede enhver konklusjon som følger logisk fra dem, og vi ønsker også å kunne utlede alle gyldige skjemaer.

f.eks. litt mer komplisert å vise at et skjema A impliserer disjunksjonen A v B, enn at skjemaene A og B sammen impliserer konjunksjonen A • B. Begge implikasjonene er lette å se at holder ved å se på en sannhetstabell, men mens deduksjonen av A • B kun krever tre linjer fordi vi har regelen •intro som er ”som skapt” for denne utledningen, blir deduksjonen av A v B fra A noe mer komplisert. Følgende eksempel viser en måte dette kan gjøres fra grunnreglene:

Eksempel 4

[1]	(1)	p	P
[2]	(2)	−q	P
[1,2]	(3)	p • −q	(1)(2) •intro
[1,2]	(4)	p	(3) •elim
[1]	(5)	−q ⊃ p	[2](4) D
[1]	(6)	p v q	(5) ekv

Deduksjonen kan se snodig ut. Men du kan sjekke at den er en lovlig deduksjon ut fra reglene som er brukt. (En ting som sikkert ser snodig ut er at vi måtte gjenta p på linje 4 og få den til å være ”avhengig” av premiss [2] for å kunne bruke discharge på en lovlig måte.)

Men når vi nå har vist at p v q lar seg utlede fra p, så kan vi innføre dette som en **avledet regel**, en regel som vil gjøre deduksjoner lettere i framtiden. Den avledete regelen kan vi kalle for disjunksjonsintroduksjon (forkortet **v-intro**). Kortformen av denne regelen (la det være en oppgave å formulere den nøyaktig med regler for sitering og premissnumre) vil være denne:

Disjunksjonsintroduksjon
v-intro

$$\frac{A}{A \vee B}$$

I eksempel 1 over viste vi at et skjema B lar seg utlede fra premissene A v B og −A. Fra det eksempelet kan vi se at også her er det mulig å begrunne en avledet regel:

Disjunksjonseliminasjon
v-elim

$$\frac{\begin{array}{c}A \vee B\\ -A\end{array}}{B}$$

Hvis vi får lov til å bruke disse avledede reglene blir noen deduksjoner mye enklere. Et eksempel er hvis vi vil utlede (p ⊃ u) fra premissene (p v q) ⊃ (r • s) og (s v t) ⊃ u.

Eksempel 5

[1]	(1)	(p v q) ⊃ (r • s)	P
[2]	(2)	(s v t) ⊃ u	P
[3]	(3)	p	P
[3]	(4)	p v q	(3) v-intro
[1,3]	(5)	r • s	(1)(4) mp
[1,3]	(6)	s	(5) •elim
[1,3]	(7)	s v t	(6) v-intro
[1,2,3]	(8)	u	(2)(7) mp
[1,2]	(9)	p ⊃ u	[3](8) D

Oppgaver

1) Vis ved deduksjon at premissene impliserer konklusjonen:

	Premisser	Konklusjon
a)	p • q	p v q
b)	a ⊃ b b ⊃ c c ⊃ d	a ⊃ d
c)	r p	r • (p v q)
d)	−p r q ⊃ p	−q • r
e)	p ⊃ −q −p ⊃ r	q ⊃ r
f)	(p • q) ⊃ r p	q ⊃ r
g)	−r v −s p ⊃ (r • s)	−p
h)	p v q q ⊃ r −r	p
i)	p ≡ q p	q
j)	−m v n −r ⊃ −n	m ⊃ r
k)	f ⊃ g −(h • g) h	−f

l)	$(a \bullet b) \supset c$ $a \bullet -c$	$-b$
m)	$d \vee -a$ $-(a \bullet -b) \supset -c$ $-d$	$-c$
n)	$-p$	$-(p \bullet q)$
o)	$p \equiv (q \vee r)$ $-r$	$p \equiv q$

2) Her er oppgaven å vise ved deduksjon at skjemaer er utsagnslogisk gyldige. For å ende opp uten premissnumre må vi her alltid bruke discharge. Deduksjonen av et gyldig skjema kan gjøres svært enkelt. Dette er fordi alle gyldige skjemaer er ekvivalente. Dermed kunne vi lære oss deduksjonen av kun ett gyldig skjema (f.eks. som i eksempel 3) og deretter bruke ekvivalent omforming. Dette fungerer (og er helt korrekt) på ethvert gyldig skjema. For å få øvelse i deduksjon kan vi bestemme oss for å bare bruke visse (relativt enkle) ekvivalenser. De følgende vil være nok for oppgavene:

   Ekvivalensen av
   $S \vee R$ med $-(-S \bullet -R)$ og $S \bullet R$ med $-(-S \vee -R)$
   $S \equiv R$ med $(S \supset R) \bullet (R \supset S)$
   $S \supset R$ med $-S \vee R$ eller med $-(S \bullet -R)$
   $--S$ med S
   S med S (Denne kan av og til være nødvendig!)

   Vis ved deduksjon at de følgende skjemaene er gyldige:
   a) $p \supset p$
   b) $q \supset (-q \supset q)$
   c) $-(-a \bullet a)$
   d) $(p \vee r) \vee -(p \bullet q)$

3) Formuler reglene for v-intro og v-elim nøyaktig med premissnumre og sitering.

4) Når vi har ekvivalent omforming trenger vi strengt tatt ikke både mt og mp som grunnregler. Vis at $S \supset R$ og $-R$ impliserer $-S$ uten å bruke modus tollens. Vis deretter at $S \supset R$ og S impliserer R ved hjelp av grunnregler uten å bruke modus ponens.

5) (En nøtt?) Gi en deduksjon der du utleder p fra premisset $-p \supset p$. (Hint: bruk teknikk fra oppgave 2 og modus tollens.)

6) (Nøtt 2) Vis ved deduksjon at $(r \bullet s) \vee (p \bullet -q)$ og $p \supset s$ til sammen impliserer s. (Hint: løs oppgave 5 først.)