Skinndybde. FYS 2130

Vi skal se hvordan en elektromagnetisk bølge oppfører seg i et ledende medium.

Bølgeligningen for E-feltet i vakuum ble utledet i Bind II, side 425:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Denne ligningen ble utledet vha Maxwells ligninger, der vi satte strømtettheten **J**=0. Hvis vi antar at **E** bare er en funksjon av x og t kan løsningen skrives

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_0} \sin(k\,x - \omega\,t + \varphi)$$

der $\mathbf{E_0}$ står normalt på forplantningsretningen (x-aksen). φ er en fasevinkel.
Nå har vi imidlertid et ledende medium og strømtettheten $\mathbf{J} \neq 0$. Det kan da vises at differensialligningen for **E** er

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

(Utledning av denne ligningen er vist i Appendiks A)

Vi antar også nå at **E** bare er en funksjon av x og t. Det svarer til en plan bølge som forplanter seg i x-retning. Differensialligningen vi ønsker å løse blir da

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Vi prøver med en løsning på formen

$$E = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \tag{2}$$

Vi setter (2) inn i (1) og får

$$k^2 = i\mu\sigma\omega + \omega^2 \mu\varepsilon$$

$$k = (i\mu\sigma\omega + \omega^2 \mu\varepsilon)^{1/2} \tag{3}$$

legg merke til at *k* nå er en kompleks størrelse.

Vi omformer (3) en smule

$$k = (\mu\omega)^{1/2} \cdot (i\sigma + \omega\varepsilon)^{1/2} \tag{4}$$

Vi betrakter tilfeller hvor σ >> ωε (ledende medium) og vi kan dermed med god tilnærmelse droppe ωε-leddet i det siste rottegnet. Vi får da

$$k = \sqrt{i} \cdot \sqrt{\mu\sigma\omega} \tag{5}$$

$\sqrt{i}$ kan skrives som $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$. (Se Appendiks B for detaljer)

(5) kan dermed skrives som

$$k = \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} \cdot (1+i) = \frac{1}{\delta} \cdot (1+i) \tag{6}$$

der størrelsen δ kalles skinndybde

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \qquad (7)$$

Vi setter inn (6) inn i ligning (2):

$$E = E_0 e^{i(x/\delta - \omega t)} \cdot e^{-x/\delta} \qquad (8)$$

Vår endelige løsning er imaginærdelen (vi kunne godt ha valgt realdelen):

$$E(x,t) = E_0 \sin(\frac{x}{\delta} - \omega t) \cdot e^{-x/\delta} \qquad (9)$$

$e^{-x/\delta}$-leddet viser at bølgen dempes når den trenger inn i mediet. Hvor sterk dempningen er avhenger av størrelsen på δ. Skinndybden er et mål på den dybden hvor amplituden til bølgen reduseres med en faktor 1/e.

For kobber er $\mu \approx \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$ H/m, $\sigma = 5.8\times10^{7}\Omega^{-1}m^{-1}$ og $\varepsilon \approx \varepsilon_0 = 9\cdot10^{-12}$ F/m. Her er $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{6.4\cdot10^{18}}{\omega}$ $F^{-1}\Omega^{-1}$. Det betyr at kobber er en god leder så lenge frekvensen ikke er ekstremt stor og vi kan bruke (7) til å beregne skinndybden. Med en frekvens på 50 Hz er skinndybden 9 mm, ved 1 MHz er $\delta \approx 6.6\times10^{-5}$ m og ved 30000 MHz (radar bølgelengde på 1 cm) er $\delta \approx 10^{-7}$m. Sender vi et vekselstrømssignal gjennom en kabel med høy frekvens vil strømmen bare gå gjennom et tynt sjikt på overflaten. Dette betyr at den indre delen av det ledende metallet som kabelen består av ikke har noen betydning i denne forbindelse og vi kan istedet benytte en hul leder. Det effektive tverrsnittsarealet hvor strømmen går avtar med økende frekvens. Dermed vil resistansen øke med frekvensen.

Uttrykket vi fant for skinndybden (7) gjaldt under forutsetning av at $\sigma >> \omega\varepsilon$. Det kan vises at et mer eksakt uttrykk for skinndybden er:

$$\delta = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\mu\sigma^2} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}}\right)} \tag{10}$$

Vi trenger ikke å forlange at $\sigma >> \omega\varepsilon$ i (10).

(se Appendiks C for detaljer)

Appendiks A

Differensialligningen for E-feltet i et ledende medium

Vi starter med Maxwells ligninger:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{4}$$

Vi anvender curl-operatoren på begge sider i (1):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{5}$$

Venstre side er lik $-\nabla^2 \mathbf{E}$ siden vi har et ladningsfritt medium (se side 425 Bind II).

For høyre side i (5) får vi

$$-\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \tag{6}$$

der vi i siste overgang har brukt (3).

Vi uttrykker strømtettheten **J** med **E**-feltet, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, der σ er konduktiviteten i mediet, og dessuten at $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, der $\varepsilon = \kappa\varepsilon_0$ (κ er dielektrisitetskonstanten).

Da får vi

$$-\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{7}$$

Differensialligningen for E-feltet i et ledende medium er dermed:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Appendiks B

Vi skal vise at $\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

Et kompleks tall består av en imaginærdel og en realdel

$$\sqrt{i} = a + b \cdot i$$

Kvadrering gir

$$i = a^2 + 2abi - b^2$$

dvs

$$a^2 - b^2 + (2ab - 1)i = 0$$

som er oppfylt når

$$2ab - 1 = 0$$
$$a^2 - b^2 = 0$$

som har løsning $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Appendiks C

Utledning av eksakt uttrykk for skinndybde

Vi starter med uttrykket for *k* i vår prøveløsning, ligning (3):

$$k = (i\mu\sigma\omega + \omega^2 \mu\varepsilon)^{1/2}$$

k er et komplekst tall og kan skrives som en sum av en real- og en imaginærdel:

$$A + iB = (i\mu\sigma\omega + \omega^2 \mu\varepsilon)^{1/2}$$

vi kvadrerer

$$(A + iB)^2 = i\mu\sigma\omega + \omega^2 \mu\varepsilon$$

og får

$$A^2 - B^2 + i2AB = i\mu\sigma\omega + \omega^2 \mu\varepsilon$$

realdelen på venstre side må være lik realdelen på høyre side:

$$A^2 - B^2 = \omega^2 \mu\varepsilon \qquad (1)$$

og imaginærdel på venstre side må være lik imaginærdel på høyre side

$$2AB = \mu\sigma\omega$$

$$A = \frac{\mu\sigma\omega}{2B}$$

Vi setter inn for A i (1):

$$\frac{\mu^2\sigma^2\omega^2}{4B^2} - B^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$$

Vi multipliserer med B^2:

$$B^4 + \omega^2 \mu\varepsilon B^2 - \frac{\mu^2\sigma^2\omega^2}{4} = 0$$

og løser for B^2:

$$B^2 = \frac{-\omega^2\mu\varepsilon \pm (\omega^4\mu^2\varepsilon^2 + \mu^2\sigma^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$B^2 = \frac{-\omega^2\mu\varepsilon \pm \omega^2\mu\varepsilon\sqrt{1+\frac{\mu^2\sigma^2\omega^2}{\omega^4\mu^2\varepsilon^2}}}{2}$$

$$B^2 = \frac{\omega^2\mu\varepsilon\left(-1 \pm \sqrt{1+\frac{\mu^2\sigma^2\omega^2}{\omega^4\mu^2\varepsilon^2}}\right)}{2}$$

B skal være reell og vi må derfor velge + foran rottegnet

$$B^2 = \frac{\omega^2\mu\varepsilon\left(-1 + \sqrt{1+\frac{\mu^2\sigma^2\omega^2}{\omega^4\mu^2\varepsilon^2}}\right)}{2}$$

Sammenhengen mellom B og δ er

$$\delta^2 = \frac{1}{B^2} = \frac{2}{\omega^2\mu\varepsilon}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1}$$

$$\delta^2 = \frac{2}{\omega^2\mu\varepsilon}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1}$$

$$\delta^2 = \frac{2}{\omega^2 \mu\varepsilon} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1}{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}-1}$$

$$\delta^2 = \frac{2\varepsilon}{\mu\sigma^2} \cdot \left(1+\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}\right)$$

Det mer eksakte uttrykket for skinndybden blir dermed

$$\delta = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\mu\sigma^2} \cdot \left(1+\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}\right)}$$