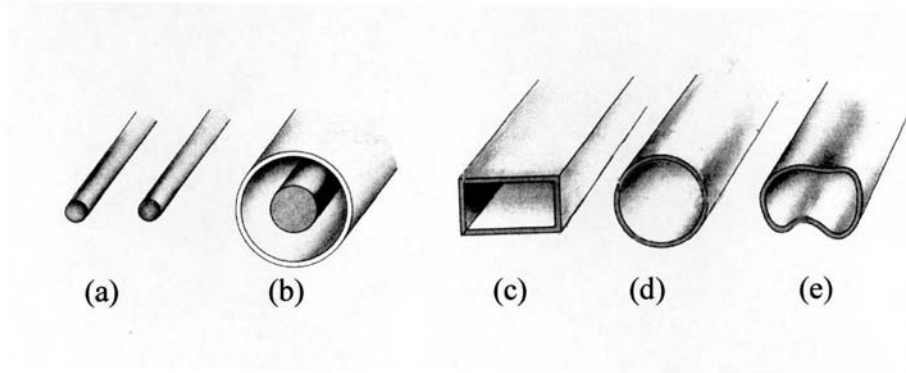


Bølgeledere. FYS2130

Vi skal se hvordan elektromagnetiske bølger forplanter seg gjennom såkalte *bølgeledere*. Eksempel på bølgeledere vi kjenner fra tidligere som transportrerer elektromagnetiske bølger er fiberoptiske kabler der lys transporteres gjennom kabelen med liten dempning pga totalrefleksjon. Eksempler på bølgeledere er vist i Figur 1.

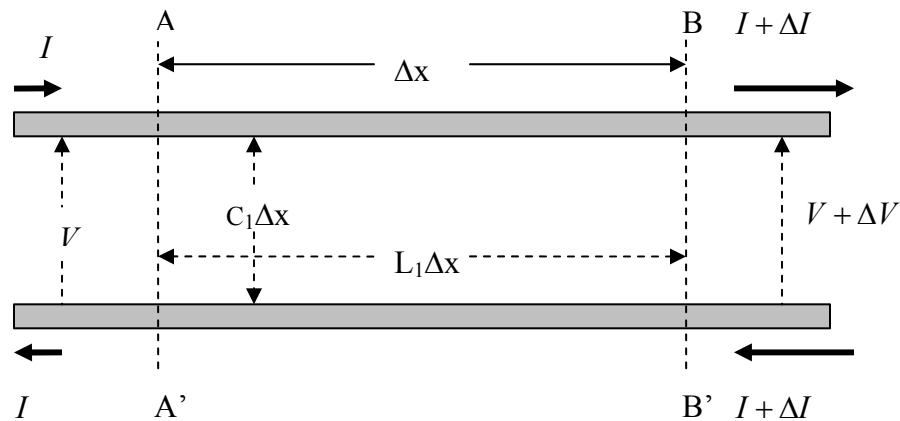


Figur 1: Eksempler på bølgeledere. (a) parallell to-leder (b) koaksial (c) hul rektangulær (d) hul sirkulær (e) hul, generell form

I den vanlige strømforsyningen brukes parallelle ledere med vekselspenninger på 50 Hz. Vekselstrømmen kan beskrives som ladninger som svinger om likevektstillinger. Som vi vet fra tidligere vil akselererte ladninger sende ut elektromagnetiske bølger. For vårt strømforsyningsnett er frekvensen så lav (50 Hz) at energitapet pga av slik stråling er svært liten. For høyere frekvenser derimot, noen få KHz, kan strålingstapet bli betydelig. For frekvenser opp til noen hundre MHz kan vi benytte koaksialkabler for å redusere strålingstapet. For enda høyere frekvenser vil vi også i koaksialkabler få et betydelig energitap. Dette skyldes bl.a. at skinndybden blir svært liten og resistansen blir derfor etterhvert stor. Man kan i slike tilfeller benytte hule bølgeledere som vist i Figur 1 c, d og e. Vi skal se på eksempler på de nevnte typer bølgeledere men starter med parallelle ledere som i Figur 1a.

1. Parallele to-ledere (transmission lines)

Vi betrakter først to uendelig lange parallelle ledere i x-retning med tverrsnitt uavhengig av x og uten ohmsk motstand. Istedet for en beskrivelse av elektromagnetiske feltvariasjoner skal vi se på hvordan vekselspenninger og vekselstrømmer forplanter seg gjennom lederne.



Figur 2: Strømmer og spenninger i et lite element Δx i en to-leder. Elementet som består av øvre og nedre leder med lengde Δx har en kapasitans pr lengde C_1 og en induktans pr lengde L_1 .

Vi ser på et utsnitt, Δx , som vist i Figur 2. Vi antar at strømmene i lederne ved AA' er I og ved BB' $I + \Delta I$. Det er dermed en nettostrøm $-\Delta I$ inn i øvre leder Δx og en lik strøm med motsatt fortegn inn i nedre leder. Spenningen mellom lederne er ved AA' V og ved BB' $V + \Delta V$. Netto økning i spenning over Δx er dermed ΔV . To-lederen har en kapasitans pr lengdeenhet C_1 og en induktans pr lengdeenhet L_1 . I et tidsintervall Δt er netto ladning i øvre leder $q = -\Delta I \Delta t$. Den nedre lederen mottar en like stor men motsatt ladning. Siden kapasitansen er $C_1 \Delta x$, er den midlere spenningsøkningen, ΔV , mellom lederne

$$\Delta V = \frac{q}{C} = \frac{-\Delta I \Delta t}{C_1 \Delta x}$$

dette gir en endring i spenning pr tid som blir

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{C_1} \frac{\partial I}{\partial x} \quad (1)$$

Pga tidsvarierende strømvariasjoner indueres det en spenning over elementet Δx lik $-L_1 \cdot (\partial I / \partial t) \cdot \Delta x$. Den induserte spenning over Δx kan skrives som

$$\Delta V = -L_1 \Delta x \frac{\partial I}{\partial t}$$

Den tidsderiverte av strømmen blir dermed

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{1}{L_1} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2)$$

Deriverer vi (1) med hensyn på tid og (2) med hensyn på x får vi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{C_1} \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{L_1} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

Disse to uttrykkene gir

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (3)$$

Tilsvarende ved å derivere (1) mhp x og (2) mhp t får vi

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \quad (4)$$

(3) og (4) er bølgeligningene for spenning V og strøm I . Både strøm- og spenningsbølgene vil bevege seg med hastigheten

$$v = \frac{1}{(L_1 C_1)^{1/2}} \quad (5)$$

For en koaksialkabel er induktansen pr lengdeenhet

$$L_1 = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

der μ er den magnetiske permeabilitet for det dielektriske medium mellom sylindrerne med radius a og b , se side 368 i læreboka bind II. (For vakuum mellom sylindrerne erstattes μ med μ_0)

Kapasitansen pr lengdeenhet, C_1 , for en koaksialkabel er (se side 259 bind II)

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

der ϵ er permittiviteten for det dielektriske medium mellom sylindrerne i koaksialkabelen.

Settes dette inn i (5) får vi at bølgehastigheten er

$$v = \frac{1}{(\mu\epsilon)^{1/2}}$$

Bølgehastigheten er dermed bare avhengig av ϵ og μ for materialet mellom de sylindriske lederne.

Erstatter vi dielektrikumet med vakuum er hastigheten lik lyshastigheten i vakuum

$$v = c = \frac{1}{(\mu_0\epsilon_0)^{1/2}}$$

Karakteristisk impedans for koaksialkabel

Løsninger av (3) og (4) er

$$V = V_0 \cos(kx - \omega t) \quad (6)$$

$$I = I_0 \cos(kx - \omega t) \quad (7)$$

V_0 og I_0 er maksimalverdiene av spenning og strøm i bølgen. (6) og (7) beskriver bølger som beveger seg i positiv x-retning.

Vi setter nå (6) og (7) inn i (2) og får

$$V = \frac{\omega}{k} L_1 I = v L_1 I$$

Den karakteristiske impedansen den uendelig lange parallelle to-lederen Z_0 er definert som V/I

$$Z_0 = \frac{V}{I} = v L_1 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$$

der vi i siste overgang har brukt (5). (For bølger som beveger seg i negativ x-retning må vi sette $\frac{V}{I} = -Z_0$.)

Setter vi inn uttrykkene for L_1 og C_1 for koaksialkabel får vi:

$$Z_0 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\epsilon\epsilon_0}$$

b og a er radiene i henholdsvis den ytre og indre sylinder. Merk at Z_0 er bestemt av forholdet mellom radiene b og a og dessuten ϵ . Koaksialkabler har typiske karakteristiske impedanser fra ca 50 Ω til noen hundre Ω .

Refleksjoner

Vi ser nå på tilfellet hvor vi kan ha bølger som beveger seg i begge retninger. Bølger som beveger seg mot venstre kan uttrykkes som

$$V^- = V_0^- \cos(kx + \omega t)$$

$$I^- = I_0^- \cos(kx + \omega t)$$

Og for bølger som beveger seg mot høyre:

$$V^+ = V_0^+ \cos(kx - \omega t)$$

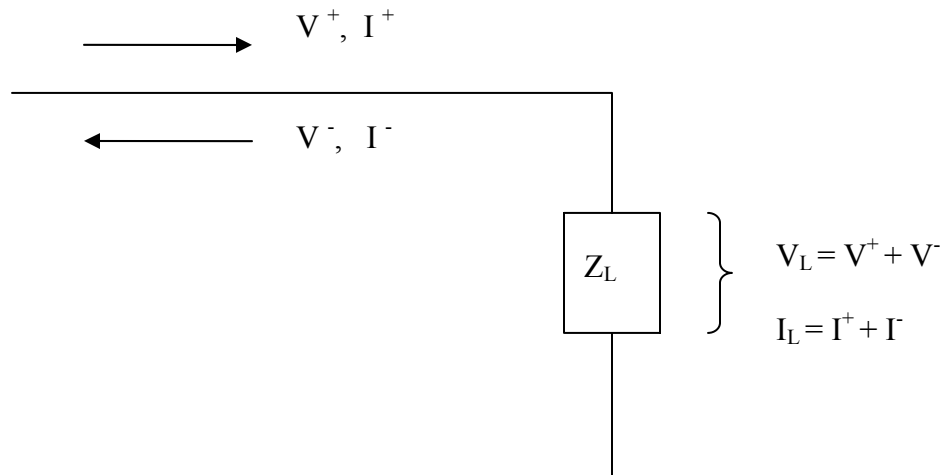
$$I^+ = I_0^+ \cos(kx - \omega t)$$

Totalt får vi nå for spenning og strøm når bølger i begge retninger er tilstede

$$V = V^+ + V^-$$

$$I = I^+ + I^-$$

Vi setter nå inn en belastningsmotstand Z_L som vist i Figur 3.



Figur 3. To-leder som termineres med en impedans Z_L vil føre til refleksjoner hvis to-lederens karakteristiske impedans, Z_0 , ikke er lik Z_L .

En bølge (V^+, I^+) som beveger seg mot høyre kan nå bli reflektert (V^-, I^-) . Spenningen over Z_L er $V_L = V^+ + V^-$. I tillegg har vi at $V^+ / I^+ = Z_0$, $V^- / I^- = -Z_0$ og $V_L / I_L = Z_L$.

Dette gir

$$\frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Fra dette uttrykket ser vi at:

For $Z_L < Z_0$ blir $V^- / V^+ < 0$, dvs den reflekterte bølgen skifter fase.

For $Z_L > Z_0$ blir $V^- / V^+ > 0$, dvs inngående og reflektert bølge er i fase

For $Z_L = Z_0$ blir $V^- / V^+ = 0$, dvs vi får ingen reflektert bølge.

For forholdet mellom I^- og I^+ får vi:

$$\frac{I^-}{I^+} = \frac{Z_0 - Z_L}{Z_L + Z_0}$$

For $Z_L < Z_0$ blir $I^- / I^+ > 0$, dvs den reflekterte bølgen skifter ikke fase. Dette betyr at den reflekterte strøm- og spenningsbølgen får en faseforskjell på π .

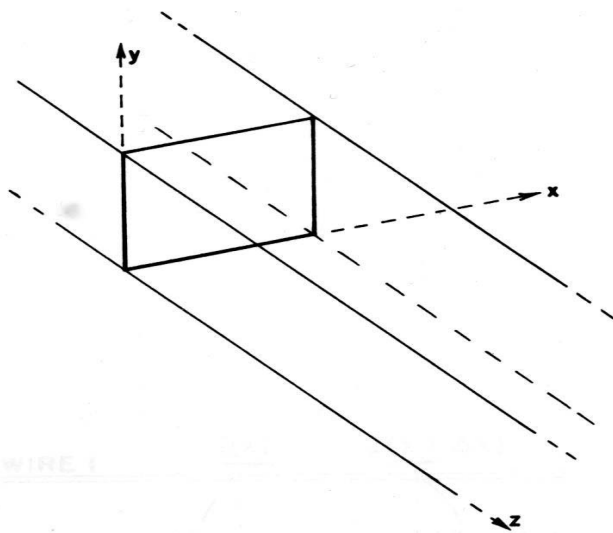
For $Z_L > Z_0$ blir $I^- / I^+ < 0$, dvs den reflekterte bølgen skifter fase. Dette betyr at den reflekterte strøm- og spenningsbølgen også her får en faseforskjell på π .

For $Z_L = Z_0$ blir $I^- / I^+ = 0$, dvs vi får ingen reflektert bølge.

2. Eksempel på hul bølgeleder: Rektangulær bølgeleder

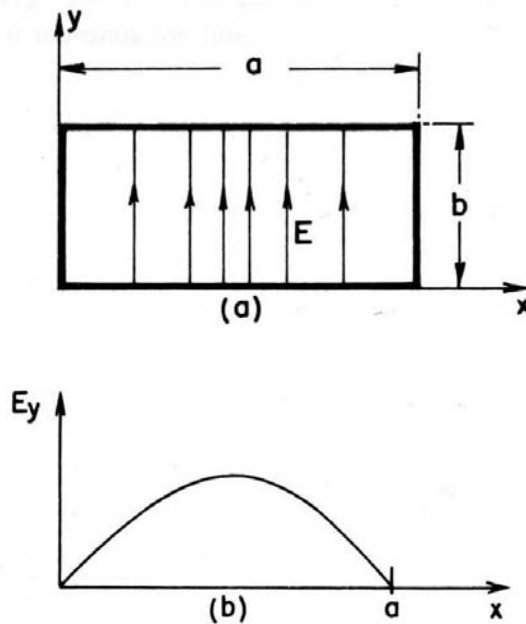
Som tidligere nevnt vil for svært høye frekvenser ($>$ noen hundre MHz) koaksialkabler ikke være egnet for overføring av elektromagnetiske bølger. Dette skyldes bl.a. at det effektive tverrsnittsarealet hvor strømmen går blir meget lite ved høye frekvenser (liten skinndybde). Dette fører til effekttap som ved høye frekvenser blir betydelig. Isteden kan man ved slike frekvenser benytte en hul leder (tilsvarende en koaksialkabel hvor den indre lederen er fjernet).

Vi betrakter en bølgeleder som består av et hult rør med rektangulært tverrsnitt. I praksis benyttes hule bølgeledere med forskjellig tverrsnittsformer (inkludert rektangulær). Grunnen til at vi velger den rektangulære formen er at den er den enkleste å behandle matematisk. Imidlertid vil en hul bølgeleder med generell tverrsnittsform ha de samme grunnleggende egenskaper som en rektangulær bølgeleder. Vi skal se at slike bølgeledere kan transportere elektromagnetiske bølger med høy frekvens og med lite tap.



Figur 1. Plassering av koordinatsystem i den rektangulære bølgelederen.

Vi legger z-aksen i lederens lengderetning og x- og y-aksen parallelt med de andre sidene som vist i figur 1. Hvis vi sender lysbølger gjennom røret er det elektriske feltet transverselt. Vi antar derfor at \mathbf{E} står normalt på z, f.eks. med bare en y-komponent E_y . Det elektriske feltet vil variere på en eller annen måte i xy-planet. Vi vet fra før at det elektriske feltet ikke har noen tangentialkomponent på overflaten av en leder. Det betyr at E_y må gå mot null når vi nærmer oss sidene parallelle med y-aksen. E_y kan variere på en måte som vist i figur 2. Bølger kan ofte beskrives med harmoniske funksjoner og vi antar at E_y er proporsjonal med $\sin kx$.



Figur 2. Det elektriske feltet for en bestemt z-verdi. I (a) vises feltlinjene i et rektangulært tverrsnitt. I (b) vises hvordan E-feltet kan variere med x, her som en halv periode av en sinusfunksjon.

Siden vi ønsker at bølgene skal bevege seg langs hulrommet i ledere venter vi at feltet vil variere mellom positive og negative y-verdier når vi beveger oss i z-retning. Hvis disse oscillasjonene har frekvensen ω , antar vi at bølgen varierer med z som $\cos(k_z z - \omega t)$ eller på kompleks form $e^{i(k_z z - \omega t)}$. Det matematiske uttrykket for bølgen blir dermed

$$E_y = E_{0y} \sin(k_x x) e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (1)$$

Denne funksjonen må tilfredsstillte grensebetingelsene vi har nevnt og dessuten Maxwells ligninger.

Feltet skal altså som tidligere nevnt ikke ha noen tangentialkomponenter ved lederens innvendige overflate. (1) tilfredsstiller dette kravet, feltet står normalt på topp- og bunnflaten og er null på sideflatene. Dvs kravet er tilfredsstillt hvis vi forlanger at $\sin(k_x x) = 0$ ved sideflatene i $x = 0$ og i $x = a$. Da er $k_x a = \pi$, der a er bredden i lederen (figur 2a). k_x er altså lik π/a .

Fra Maxwells ligninger må divergensen til \mathbf{E} være lik null inne i hulrommet i lederen siden det ikke finnes ladninger der. Vår \mathbf{E} har bare en y -komponent og den forandrer seg ikke med y og derfor er $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$.

Det elektriske feltet må også tilfredsstillte resten av Maxwells ligninger i det åpne rommet inne i lederen. Feltet må derfor tilfredsstillte bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

Vi setter inn (1) og får

$$k_x^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (3)$$

Setter vi inn for $k_x = \pi/a$ som vi bestemte fra grensebetingelsen over får vi

$$k_z = \sqrt{(\omega^2 / c^2) - (\pi^2 / a^2)} \quad (4)$$

Dette uttrykket viser at når ω øker vil k_z øke (dvs. bølgelengden avtar). Ved svært store ω vil første ledd i radikanden dominere og vi kan droppe det siste leddet. Da blir $k_z = \omega / c$, som er den verdien vi ville hatt hvis bølgelederen ikke var tilstede.

Hvis ω avtar vil k_z avta, dvs bølgelengden øker. Hva skjer når $(\omega^2 / c^2) < (\pi^2 / a^2)$?
 k_z blir nå et komplekst tall! Vi kan da sette

$$k_z = ik'$$

der k' er et reelt tall:

$$k' = \sqrt{(\pi^2 / a^2) - (\omega^2 / c^2)} \quad (5)$$

Hvis vi setter dette inn i vårt uttrykk for bølgen som forplanter seg gjennom bølgelederen får vi

$$E_y = E_{0y} \sin(k_x x) e^{i(ik'z - \omega t)} \quad (6)$$

som kan skrives

$$E_y = E_{0y} \sin(k_x x) e^{-k'z} e^{-i\omega t} \quad (7)$$

Vi har nå fått et elektrisk felt som oscillerer med tiden som $e^{-i\omega t}$ men som avtar med z som $e^{-k'z}$. Dvs. amplituden på det elektriske feltet dempes med faktoren $e^{-k'z}$. Hvor rask dempningen er, avhenger av verdien på k' . Hvis ω er svært liten kan det andre leddet i radikanden i (5) neglisjeres og $k' = \pi / a$. Det betyr at i dette tilfellet vil amplituden reduseres med faktoren $1/e$ over avstanden $z = a / \pi$.

Vi har altså funnet at

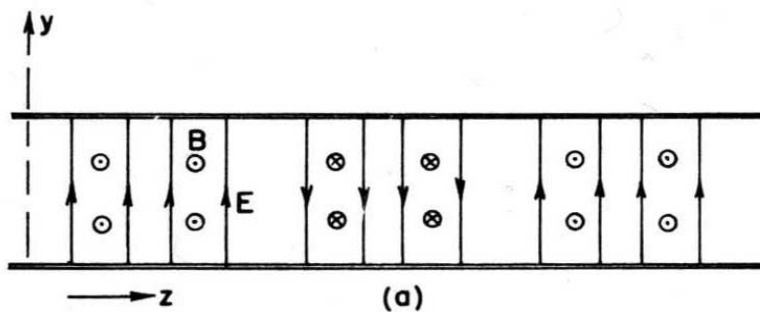
For $\omega > \pi c / a$ får vi en bølge som beveger seg gjennom bølgelederen udempet

For $\omega < \pi c / a$ får vi en bølge som er dempet. For små ω vil bølgen dempes raskt.

$\pi c / a$ kalles ”cutoff”-vinkelfrekvensen, $\omega_c = \pi c / a$. Verdien på denne er i vårt eksempel bestemt av bredden a i den rektangulære bølgeleder. Bølgelederen kan betraktes som et kortpass-filter siden den filtrerer bort bølger med lave frekvenser.

Sluttkommentar (for spesielt interesserte)

I tillegg til det varierende elektriske feltet i bølgelederen vil vi også ha et varierende magnetfelt. Det følger av Maxwells ligninger at B-feltet vil sirkulere rundt området hvor $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ er størst. Dette er illustrert i figur 3.



Figur 3. I tillegg til et varierende elektrisk felt i den rektangulære bølgelederen eksisterer også et varierende magnetfelt som står normalt på E-feltet.

Den løsningen vi har sett på er en spesiell løsning for den rektangulære bølgelederen men det finnes mange flere løsninger. x-avhengigheten av E-feltet i vår løsning ble beskrevet som en halv periode av en sinusfunksjon (figur 2b). F.eks. ville en hel periode av sinusfunksjon også være en løsning som ville gi en *cut-off*-frekvens som er mye høyere enn den vi fant. I vår løsning hadde E-feltet bare en komponent i y-retning. E-felt med komponenter i både x- og y-retning er også mulig. Når E-feltet bare har komponenter i x- og y-retning og dermed står normalt på z-retningen kalles denne moden ”*transverse electric*” og betegnes som TE.

E-feltet kan faktisk også ha en komponent i z-retning. Det viser seg da at magnetfeltet alltid står normalt på z-retning og denne moden kalles for ”transverse magnetic” (TM).

For den rektangulære bølgelederen vil vår enkle løsning ha den laveste cut-off frekvensen av alle. Ved å konstruere dimensjonene på bølgelederen slik at frekvensen på bølgen vi ønsker å transportere gjennom bølgelederen er litt høyere en cut-off-frekvensen for denne men lavere enn for de høyere modene vil vi kun få transportert bølger med kun den laveste (og ønskete) frekvensen.