Forelesning IN1900 – 26 September 2022

Ole Christian Lingjærde
Institutt for Informatikk, Universitetet i Oslo

Uke: 26 September - 11 September, 2022

Ukens agenda

I dag:

- Kort repetisjon av arrayer og plotting
- Mer om animering
- Plenumsøvelser 5.29, 5.39

Onsdag:

- Differenslikninger
- Plenumsøvelser A.1 og A.4

Tupler, lister eller arrayer?

Alle tre brukes til å lagre mange verdier.

Lister:

- Veldig fleksible (kan endres)
- Operasjoner gjøres ett element av gangen

Arrayer:

- Relativt fleksible (kan endres, men kun én datatype)
- Vektoriserte operasjoner

Tupler:

- Lite fleksible (kan ikke endres)
- Operasjoner gjøres ett element av gangen

Hvordan bruke numpy-funksjoner

Uskreven regel:

Bruk `import numpy as np` og referer til numpy-funksjoner som np.linspace(..), np.zeros(..)

Unntak:

For matematiske funksjoner (sin, cos, log, ...) kan du bruke from numpy import sin, cos og referere til dem som sin(..), cos(..), etc.

For flere detaljer, se læreboka (5th ed.), side 235 og 243.

Vektorisering

Anta at vi skal regne ut sin(x) for x=0, 0.1, 0.2, ..., 1.

A) Bruk av lister (ikke-vektorisert):

```
from math import sin
x = [k/10 for k in range(11)]
y = [sin(e) for e in x]
```

Vektorisering

Anta at vi skal regne ut sin(x) for x=0, 0.1, 0.2, ..., 1.

A) Bruk av lister (ikke-vektorisert):

```
from math import sin
x = [k/10 for k in range(11)]
y = [sin(e) for e in x]
```

B) Bruk av numpy-arrays (ikke-vektorisert):

```
from math import sin
import numpy as np
x = np.linspace(0,1,11)
y = np.zeros(11)
for k in range(11):
  y[k] = sin(x[k])
```

Vektorisering

Anta at vi skal regne ut sin(x) for x=0, 0.1, 0.2, ..., 1.

A) Bruk av lister (ikke-vektorisert):

```
from math import sin
x = [k/10 for k in range(11)]
y = [sin(e) for e in x]
```

B) Bruk av numpy-arrays (ikke-vektorisert):

```
from math import sin
import numpy as np
x = np.linspace(0,1,11)
y = np.zeros(11)
for k in range(11):
  y[k] = sin(x[k])
```

C) Bruk av numpy-arrays (vektorisert)

```
import numpy as np
x = np.linspace(0,1,11)
y = np.sin(x)
```

Hvor rask er vektorisert kode?

Ikke-vektorisert kode:

```
def f_list(N):
    import math
    x = [0]*N; y = [0]*N; z = [0]*N
    for i in range(N):
        x[i] = 1 + i**2
    for i in range(N):
        y[i] = 1 + i * x[i] - math.tanh(x[i])
    for i in range(N):
        z[i] = abs(y[i])
    return z
```

Hvor rask er vektorisert kode?

Ikke-vektorisert kode:

```
def f_list(N):
    import math
    x = [0]*N; y = [0]*N; z = [0]*N
    for i in range(N):
        x[i] = 1 + i**2
    for i in range(N):
        y[i] = 1 + i * x[i] - math.tanh(x[i])
    for i in range(N):
        z[i] = abs(y[i])
    return z
```

Vektorisert kode:

```
def f_array(N):
    import numpy as np
    x = 1 + np.arange(N)**2
    y = 1 + np.arange(N) * x - np.tanh(x)
    z = np.abs(y)
    return z
```

Sammenlikning av CPU-tid:

```
import time

t0 = time.clock()
f_list(10**7)
t1 = time.clock()
print(f'Nonvectorized: {t1-t0:.2f} seconds')

t0 = time.clock()
f_array(10**7)
t1 = time.clock()
print(f'Vectorized: {t1-t0:.2f} seconds')
```

```
Terminal> python compare_time.py
Nonvectorized: 6.67 seconds
Vectorized: 0.29 seconds
```

Den vektoriserte (numpy) løsningen er 23 ganger raskere!

Konvertere mellom array og liste

Fra liste til array:

```
x = [1,2,3]
a = np.array(x)
```

Fra array til liste:

```
a = np.linspace(0, 5, 100)
x = list(a)
```

Liste	Array
`x = [1,2,3,4]`	`x = np.array([1,2,3,4])`
`x = [0]*n`	`x = np.zeros(n)`
`x = [1]*n`	`x = np.ones(n)`
`x = range(n)`	`x = np.arange(n)`
`xnew = x`	`xnew = x`
`xnew = x[:]`	`xnew = x.copy()`
`xnew = x+x`	`xnew = np.append(x,x)`
`h = float(b-a)/(n-1)` `x = [a+i*h for i in range(n)]`	`x = np.linspace(a,b,n)`
`for elem in x:` `  print(elem)`	`for elem in x:` `  print(elem)`

`xnew = [0]*len(x)`
`for i in range(len(x)):`
`  xnew[i] = math.sin(x[i])`
	`xnew = np.sin(x)`

`xnew = [0]*len(x)`
`for i in range(len(x)):`
`  xnew[i] = x[i] + 2*x[i]**2`
	`xnew = x + 2*x**2`

Quiz

Hva skriver dette programmet til fil?

```
import numpy as np
n = 11
x = np.linspace(0,1,n)
y = np.ones(n)
z = x + 2*y
with open('Fil.txt', 'w') as outfile:
    for e in z:
        outfile.write(str(e))
        outfile.write('\n')
    outfile.close()
```

Fil.txt

2.0
2.1
2.2
2.3
2.4
2.5
2.6
2.7
2.8
2.9
3.0

Quiz

Dette programmet skal skrive ut tallene

sin(0), sin(0.1), sin(0.2), ..., sin(10.0)

på separate linjer i filen "Fil.txt". Finn feilene!

```
n = 100
x = np.linspace(0,10,n)
y = np.sin(x)
with open('Fil.txt') as outfile:
    for e in y:
        outfile.write(e)
    outfile.close()
```

Quiz

Dette programmet skal skrive ut tallene

sin(0), sin(0.1), sin(0.2), ..., sin(10.0)

på separate linjer i filen "Fil.txt". Finn feilene!

```
n = 100  # Skal være n = 101
x = np.linspace(0,10,n)
y = np.sin(x)
with open('Fil.txt') as outfile:
    for e in y:
        outfile.write(e)
    outfile.close()
```

Quiz

Dette programmet skal skrive ut tallene

sin(0), sin(0.1), sin(0.2), ..., sin(10.0)

på separate linjer i filen "Fil.txt". Finn feilene!

```
n = 100  # Skal være n = 101
x = np.linspace(0,10,n)  # Vi har ikke importert numpy
y = np.sin(x)
with open('Fil.txt') as outfile:
    for e in y:
        outfile.write(e)
    outfile.close()
```

Quiz

Dette programmet skal skrive ut tallene

sin(0), sin(0.1), sin(0.2), ..., sin(10.0)

på separate linjer i filen "Fil.txt". Finn feilene!

```
n = 100  # Skal være n = 101
x = np.linspace(0,10,n)  # Vi har ikke importert numpy
y = np.sin(x)  # Samme feil her
with open('Fil.txt') as outfile:
    for e in y:
        outfile.write(e)
    outfile.close()
```

Quiz

Dette programmet skal skrive ut tallene

sin(0), sin(0.1), sin(0.2), ..., sin(10.0)

på separate linjer i filen "Fil.txt". Finn feilene!

```
n = 100  # Skal være n = 101
x = np.linspace(0,10,n)  # Vi har ikke importert numpy
y = np.sin(x)  # Samme feil her
with open('Fil.txt') as outfile:  # Må ha med 'w'
    for e in y:
        outfile.write(e)
    outfile.close()
```

Quiz

Dette programmet skal skrive ut tallene

sin(0), sin(0.1), sin(0.2), ..., sin(10.0)

på separate linjer i filen "Fil.txt". Finn feilene!

```
n = 100  # Skal være n = 101
x = np.linspace(0,10,n)  # Vi har ikke importert numpy
y = np.sin(x)  # Samme feil her
with open('Fil.txt') as outfile:  # Må ha med 'w'
    for e in y:
        outfile.write(e) # e er tall, må være string
    outfile.close()
```

Quiz

Dette programmet skal skrive ut tallene

sin(0), sin(0.1), sin(0.2), ..., sin(10.0)

på separate linjer i filen "Fil.txt". Finn feilene!

```
n = 100  # Skal være n = 101
x = np.linspace(0,10,n)  # Vi har ikke importert numpy
y = np.sin(x)  # Samme feil her
with open('Fil.txt') as outfile:  # Må ha med 'w'
    for e in y:
        outfile.write(e) # e er tall, må være string
    outfile.close()      # Vi har glemt linjeskift
```

Quiz

Korrekt kode:

```
import numpy as np
n = 101
x = np.linspace(0,10,n)
y = np.sin(x)
with open('Fil.txt','w') as outfile:
    for e in y:
        outfile.write(str(e))
        outfile.write('\n')
    outfile.close()
```

Plotting (repetisjon)

1) Den store læreboka (Langtangen) nevner en rekke muligheter for grafplotting:

matplotlib.pyplot, scitools.std, EasyViz, Mayavi

Bare den første av disse benyttes i dette kurset.

2) Den anbefalte måten å bruke plottefunksjonene på er å skrive `import matplotlib.pyplot as plt` og så bruke plt.plot(..) osv.

3) Når du bruker plt.plot(x,y) kan variablene x og y være enten arrayer eller lister.

Plotte en enkelt kurve

Anta x og y er numeriske lister eller arrayer av samme lengde. Vi kan plotte dataene slik:

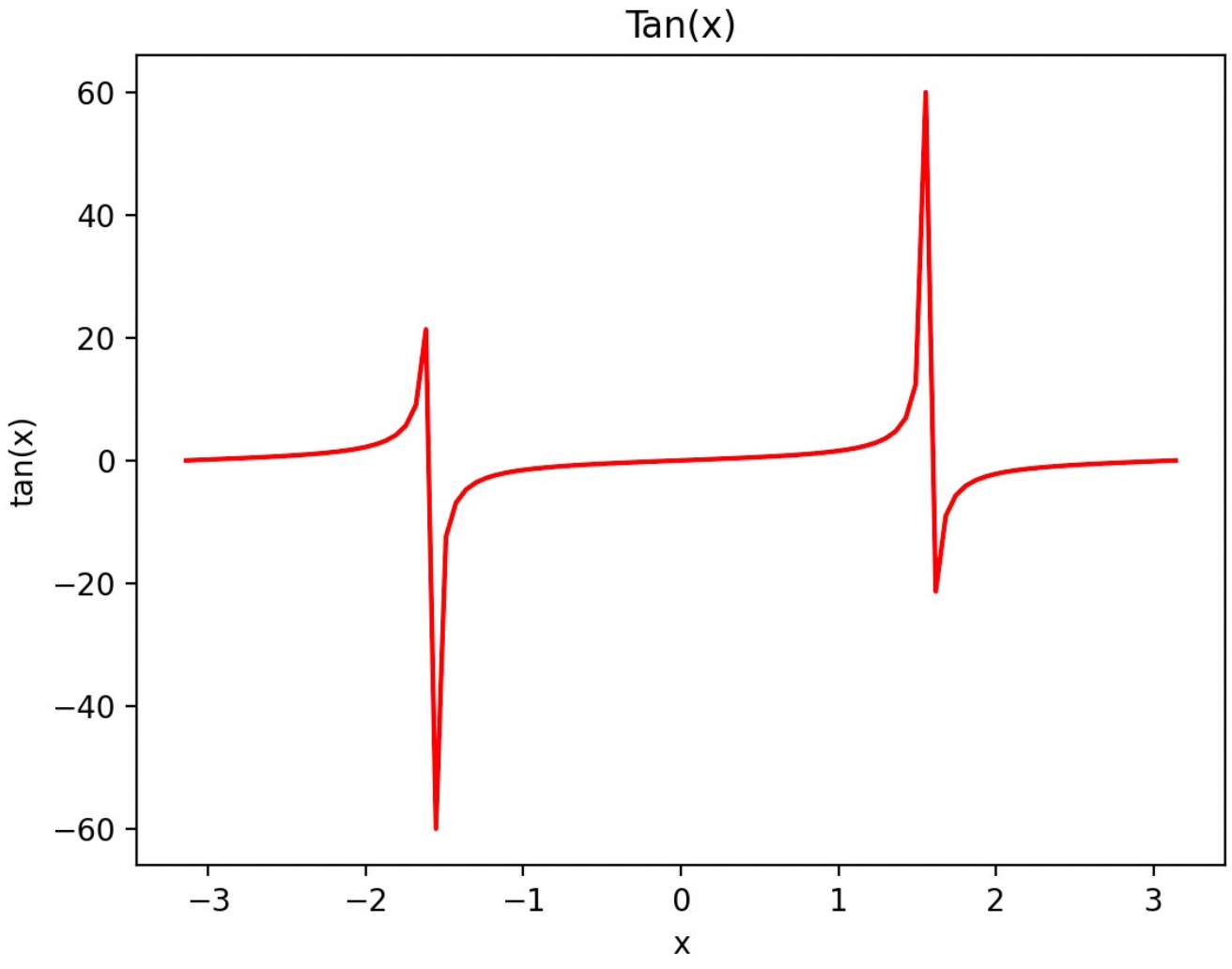
```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(x, y, 'ro') # Røde punkter ('r-' for kurve)
plt.xlabel('x')      # Navn på x-aksen
plt.ylabel('y')      # Navn på y-aksen
plt.title('My plot') # Overskrift
plt.axis([0,5,0,1])  # xmin,xmax,ymin,xmax
plt.show()
```

Eksempel 1

Tangentfunksjonen:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x = np.linspace(-3.14, 3.14, 100)
y = np.tan(x)

plt.plot(x, y, 'r-')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('tan(x)')
plt.title('Tan(x)')
plt.show()
```

Resultat

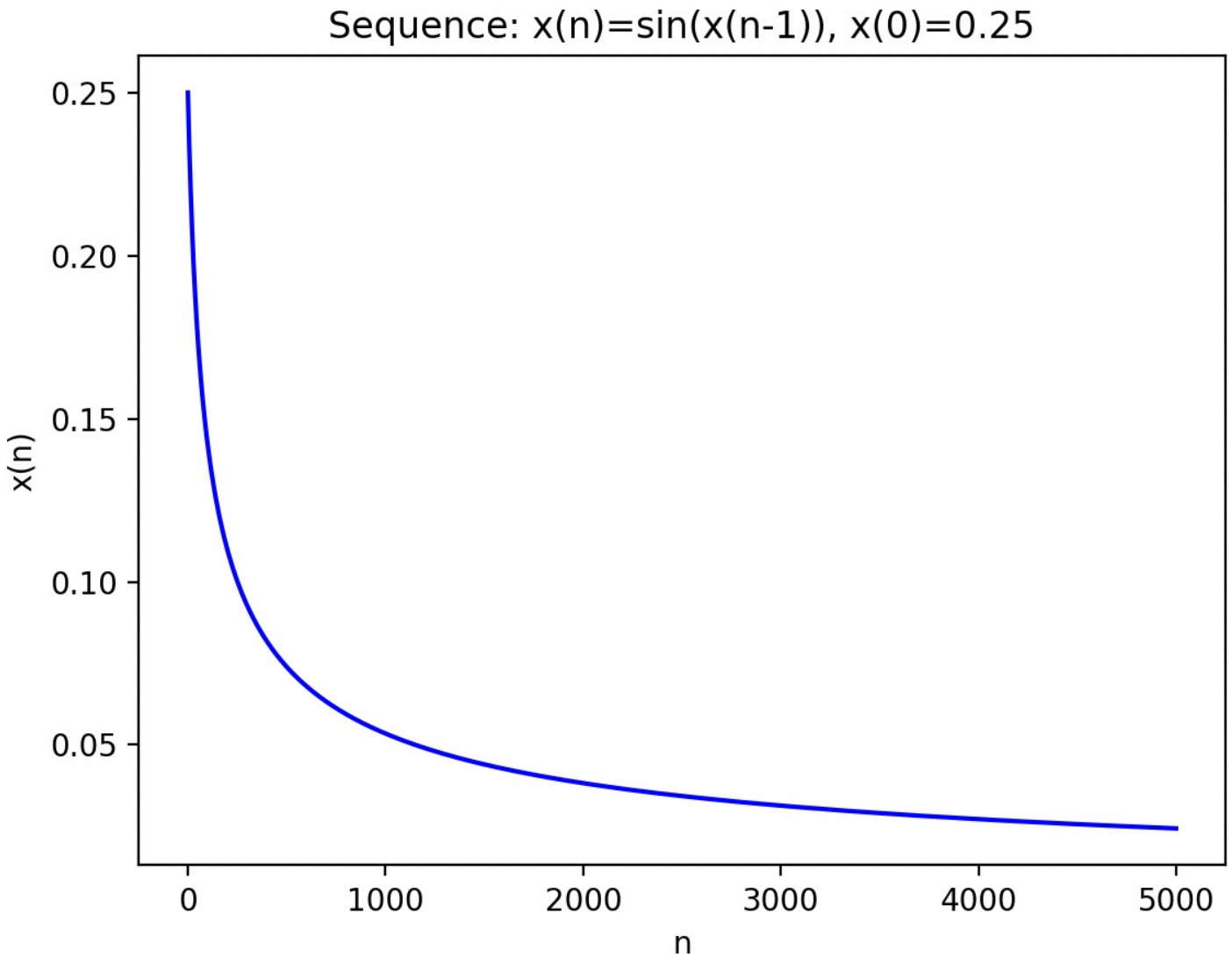


Eksempel 2

Følgen 0.25, sin(0.25), sin(sin(0.25)), ... :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math

N = 5000
x = [0]*N
x[0] = 0.25
for i in range(1,N):
    x[i] = math.sin(x[i-1])

plt.plot(range(N), x, 'b-')
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('x(n)')
plt.title('Sequence: x(n)=sin(x(n-1)), x(0)=0.25')
plt.show()
```

Resultat


Sequence: x(n)=sin(x(n-1)), x(0)=0.25
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
x(n)
0
1000
2000
3000
4000
5000
n

Plotte flere kurver oppå hverandre

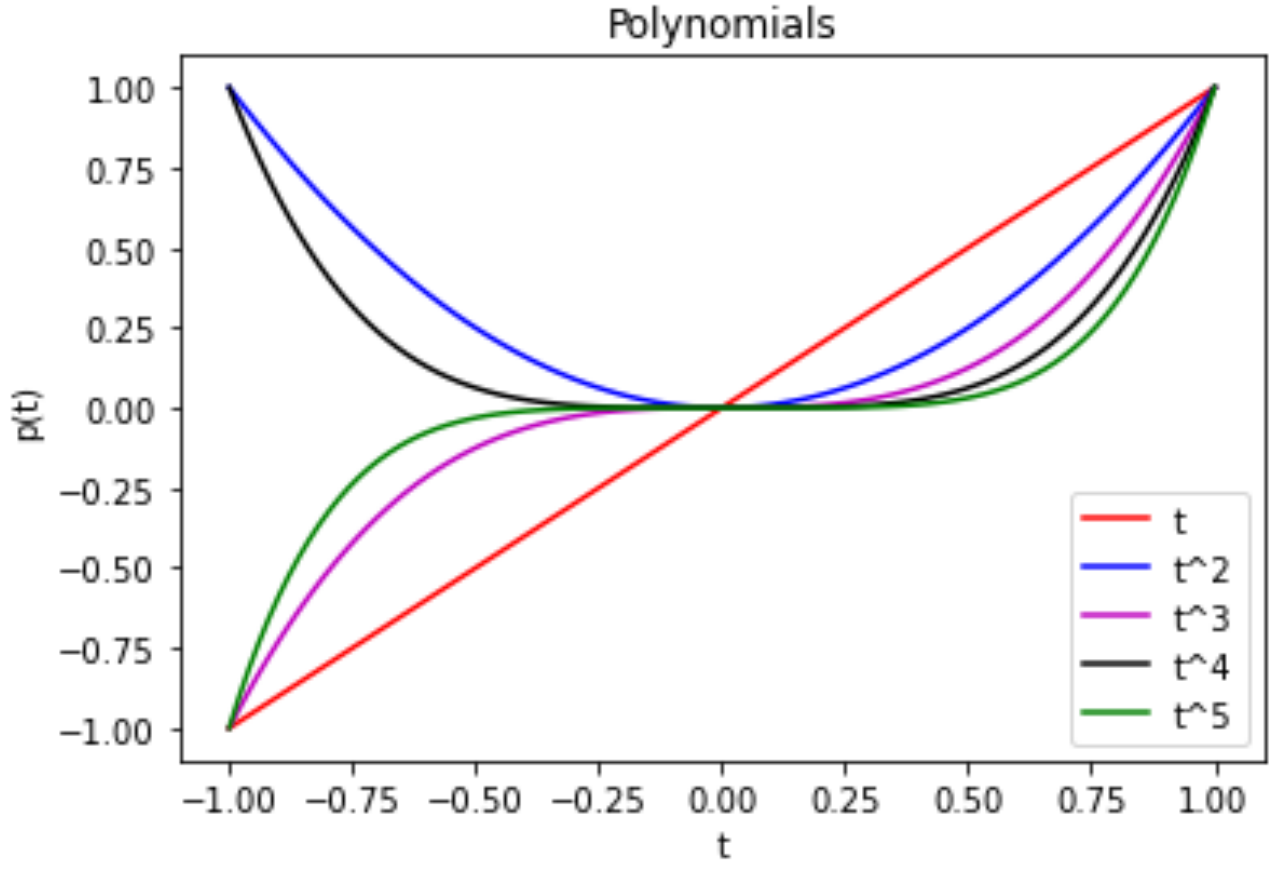
Anta at x1 og y1 er numeriske lister eller arrayer av samme lengde, og tilsvarende for x2 og y2:

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.plot(x1, y1, 'r-')
plt.plot(x2, y2, 'b-')

plt.legend(['y1', 'y2'])

plt.show()
```

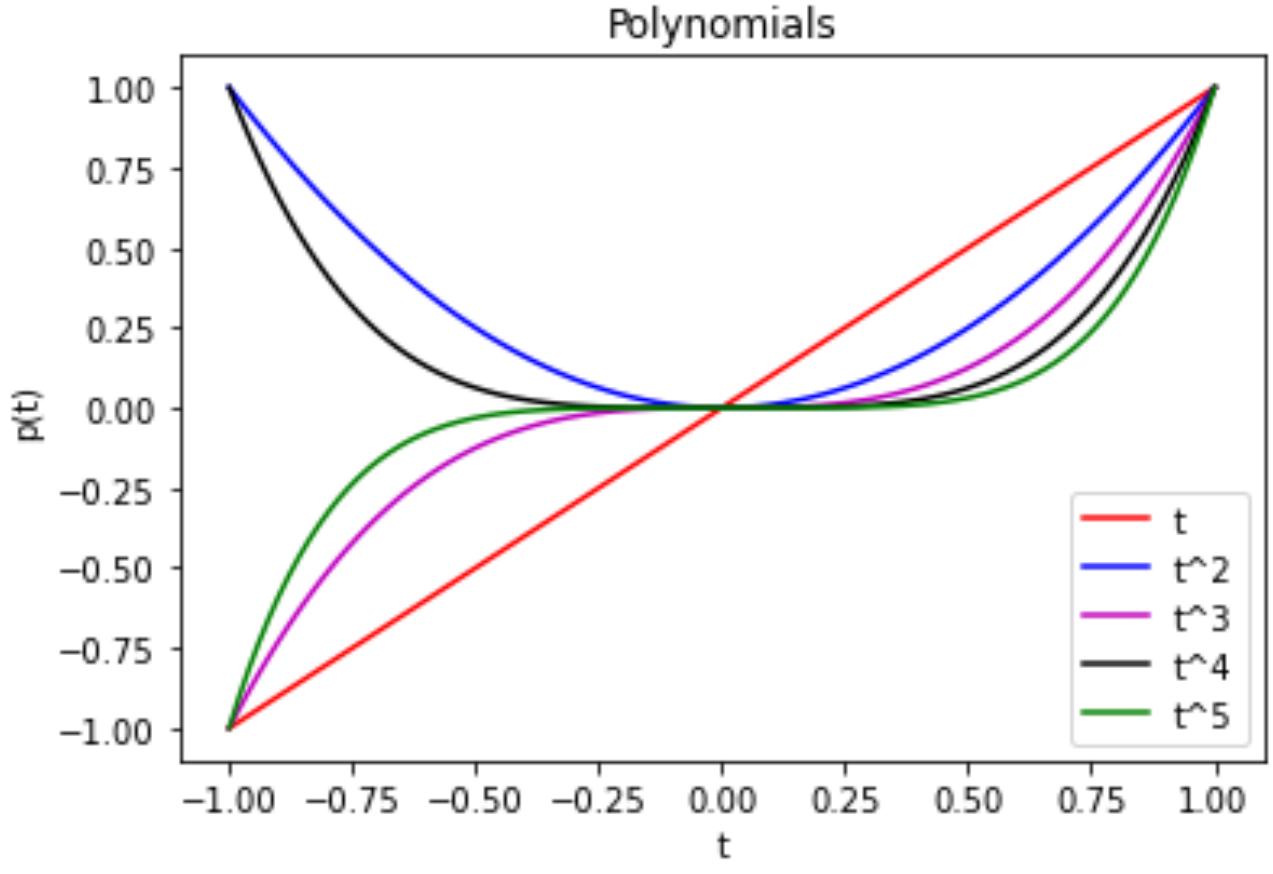
Eksempel 1: Polynomer

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def p(t,k):
   return t**(k+1)

col = ['r-', 'b-', 'm-', 'k-', 'g-']
t = np.linspace(-1, 1, 100)

for k in range(5):
   plt.plot(t, p(t,k), col[k])

plt.xlabel('t')
plt.ylabel('p(t)')
plt.legend(['t', 't^2', 't^3', 't^4', 't^5'])
plt.title('Polynomials')
plt.show()
```

Resultat


Polynomials
p(t)
t
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
t
t^2
t^3
t^4
t^5

Resultat




```
col = ['r-', 'b-', 'm-', 'k-', 'g-']
for k in range(5):
   plt.plot(t, p(t,k), col[k])
plt.legend(['t', 't^2', 't^3', 't^4', 't^5'])
```

Avansert eksempel: Julia-mengde

En rasjonal funksjon har formen

$$R(z) = P(z) / Q(z)$$

hvor P og Q er polynomer.

Anta at vi starter med et komplekst tall z og regner ut tallene R(z), R(R(z)), R(R(R(z))), ...

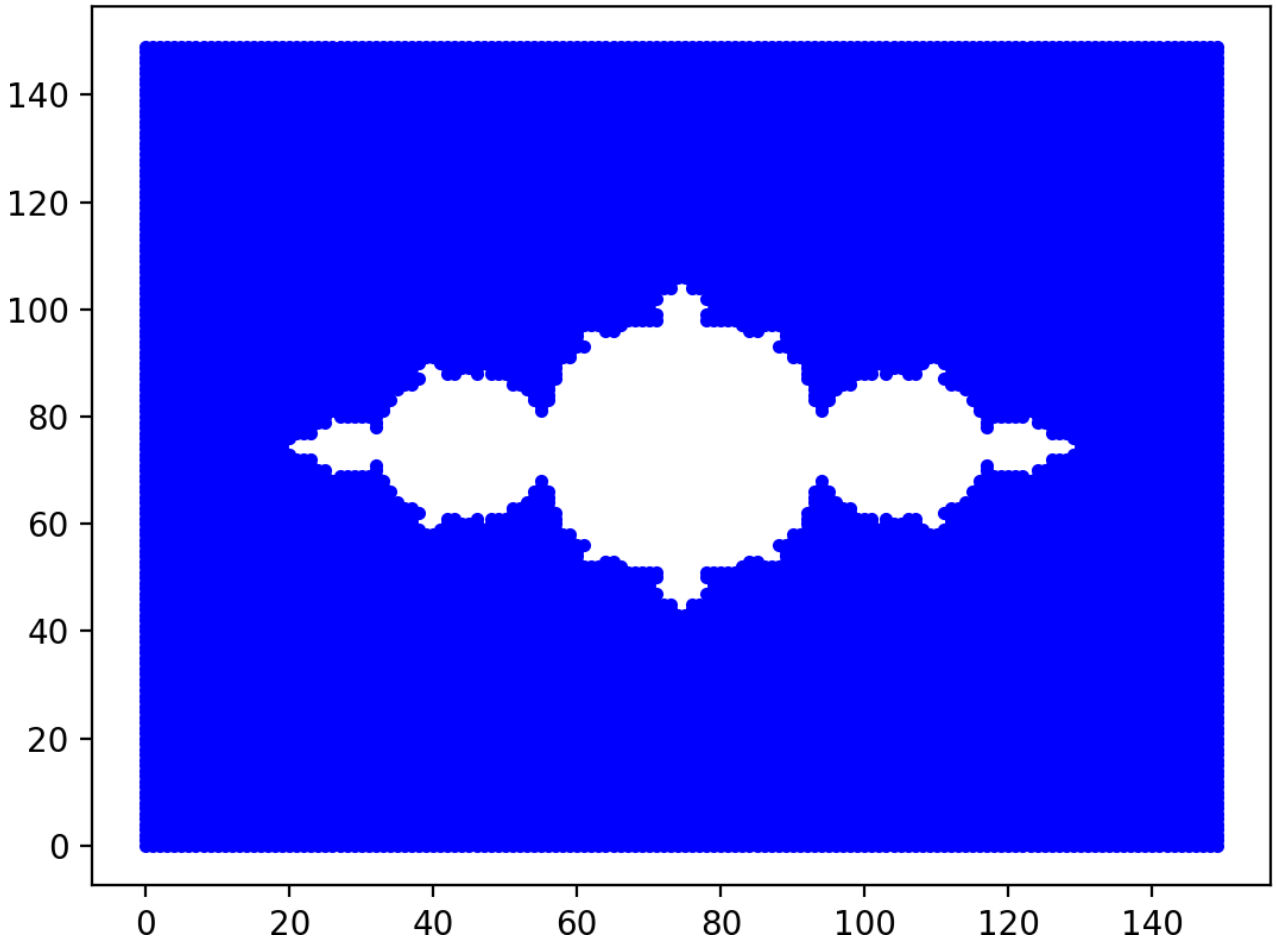
Hvis svaret ikke går mot uendelig, sier vi at z ligger i Julia-mengden, ellers ikke.

Avansert eksempel: Julia-mengde

Vi kan plotte mer enn grafer i Python! Hva plottes her?

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

n = 150
x = np.linspace(-2, 2, n)
z1 = z2 = 0
for i in range(n):
  for j in range(n):
    z1, z2, k = x[i], x[j], 0
    while abs(z1)+abs(z2) < 100 and k < 100:
      z1,z2 = z1**2-z2**2-0.75, 2*z1*z2
      k = k+1
    if k < 100:  # Svaret gikk mot uendelig
      plt.plot(i, j, 'b.')
plt.show()
```

Resultat



Multipanel plott

Anta at x1 og y1 er numeriske lister eller arrayer av samme lengde, og tilsvarende for x2 and y2.

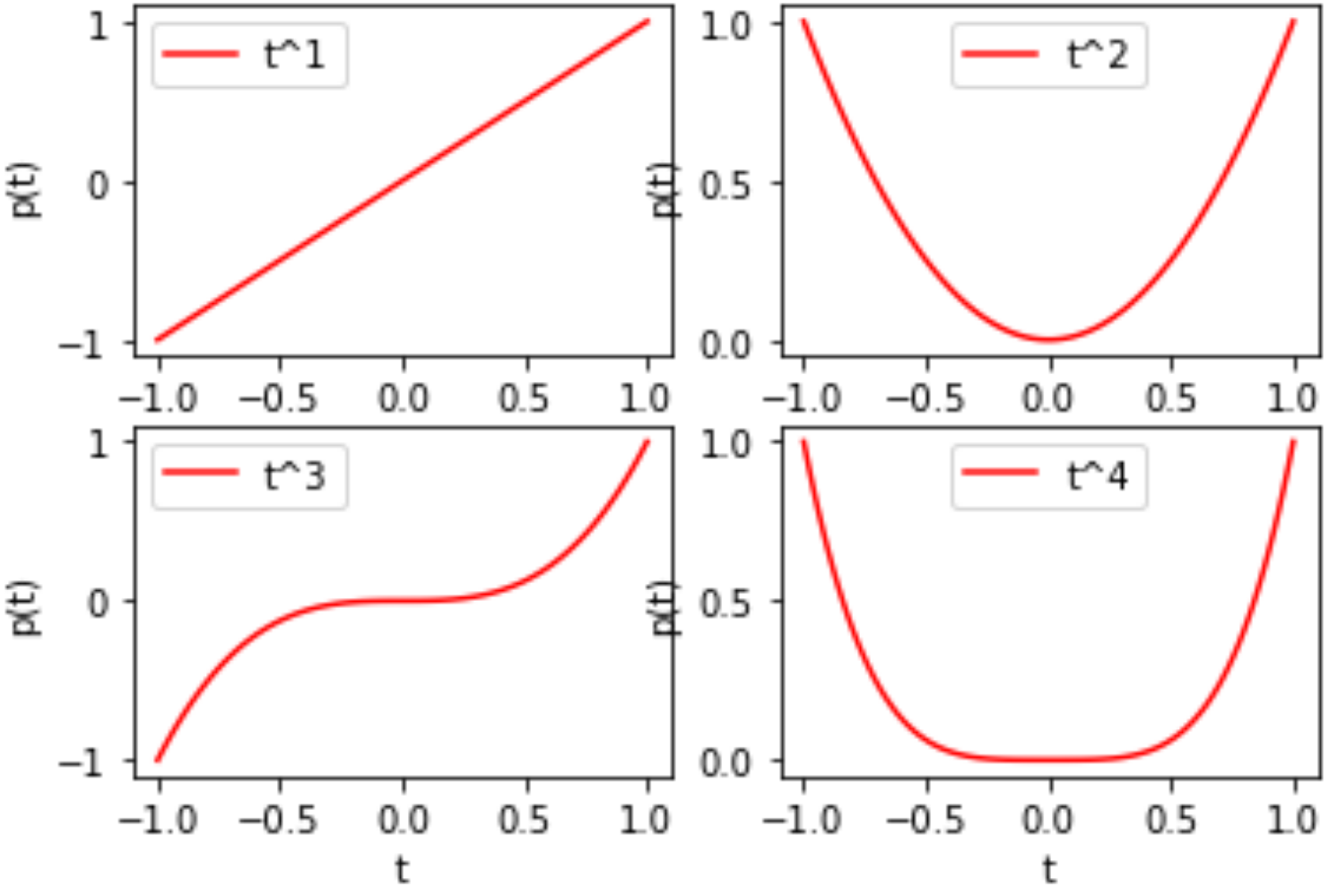
Kurver med titler:

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.subplot(1,2,1)
plt.plot(x1, y1, 'r-')
plt.title('Title for left panel')

plt.subplot(1,2,2)
plt.plot(x2, y2, 'b-')
plt.title('Title for right panel')

plt.show()
```

Eksempel: polynomer

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def p(t,k):
  return t**k

t = np.linspace(-1, 1, 100)

for k in range(1,5):
   plt.subplot(2,2,k)
   plt.plot(t, p(t,k), 'r-')
   plt.xlabel('t')
   plt.ylabel('p(t)')
   plt.legend([f't^{k}'])

plt.show()
```

Resultat



Animering (repetisjon)

Mange mulige fremgangsmåter for å lage en "film" av en sekvens med plott. Tre mulige teknikker:

Metode A: Vis plottene mens programmet kjører

Metode B: Lagre plottene som nummererte bildefiler

Metode C: Bruke FuncAnimation i matplotlib.animation

Se forrige ukes forelesning for detaljer.

Eksempel

Oppgave: Lag en animasjon som fortløpende viser grafene til polynomene

$$x^1,\ x^2,\ x^3,\ \ldots$$

for $x \in [-2, 2]$.

Metode A: Vis film mens programmet kjører

Ide:

Trinn 1:

Plott $y = x$

Ta en kort pause

Trinn 2:

Bytt ut kurven med $y = x^2$

Ta en kort pause

Trinn 3:

Bytt ut kurven med $y = x^3$

Ta en kort pause

.... osv....

Metode A: Implementasjon

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Sett opp plott
plt.axis([-2, 2, -20, 20])     # xmin,xmax,ymin,ymax
x = np.linspace(-2, 2, 100)

# Plott y=x
lines = plt.plot(x, x)
plt.title("y = x")
plt.draw()
plt.pause(0.5)

# Plott y=x^2, y=x^3, ..., y=x^20
for k in range(2,21):
    lines[0].set_ydata(x**k)   # Bytt ut kurven, behold akser
    plt.title(f"y = x^{k}")
    plt.draw()                 # Tegn den nye kurven
    plt.pause(0.5)
```

Hvis du bruker Spyder

Med standardinnstillingene i nyere versjoner av Spyder fungerer ikke eksemplet på forrige slide slik det skal.

For å fikse dette problemet, se innlegget under (det ligger under Beskjeder på nettsiden til kurset):

https://www.uio.no/studier/emner/matnat/ifi/IN1900/h22/beskjeder/kjente-problemer-med-spyder.html

Metode B: Lag nummererte bildefiler

Ide:

Trinn 1:

Plott $y = x$

Lagre til fil → Figure001.png

Trinn 2:

Bytt ut kurven med $y = x^2$

Lagre til fil → Figure002.png

Trinn 3:

Bytt ut kurven med $y = x^3$

Lagre til fil → Figure003.png

.... osv....

Metode B: Implementasjon

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

# Sett opp plott
plt.axis([-2, 2, -20, 20])
x = np.linspace(-2, 2, 100)

# Plott y=x
lines = plt.plot(x, x)
plt.title("y = x")
plt.savefig("Figure01.png")

# Plott y=x^2, y=x^3, ..., y=x^20
for k in range(2,21):
    lines[0].set_ydata(x**k)
    plt.title(f"y = x^{k}")
    plt.draw()
    plt.savefig(f"Figure{k:02d}.png")
```

Metode B: Fra bildefiler til film

Det er mulig å kombinere de nummererte bildefilene til en film ved å bruke ekstern programvare som *ImageMagick*.

Ikke nødvendig for dette kurset, men for de som har lyst følger her en kort bruksanvisning for mac (nb: tar litt tid og krever plass):

TRINN 1: Lag figurfiler (fig1.png, fig2.png, ...) i Python:

> python animate.py (her er animate.py ditt program)

TRINN 2: Installer Homebrew:

> /bin/bash -c "$(curl -fsSL https://raw.githubusercontent.com/Homebrew/install/HEAD/install.sh)"

TRINN 3: Installer Imagemagick:

> brew install imagemagick

TRINN 4: Konverter bildefiler til film:

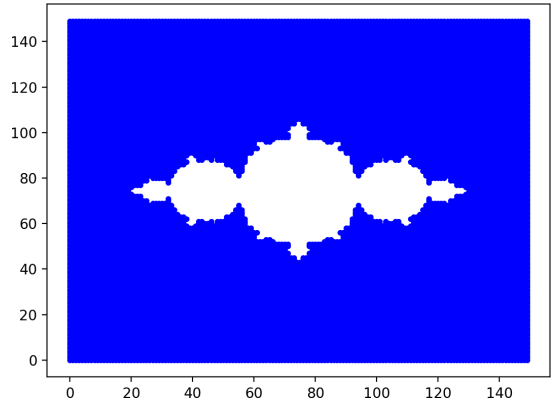
> convert -delay 30 tmp_*.png movie.gif

TRINN 5: Vis filmen:

Åpne en nettleser og åpne filen movie.gif fra denne.

Eksempel: Julia-mengden

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

n = 150
x = np.linspace(-2, 2, n)
z1 = z2 = 0
for i in range(n):
   for j in range(n):
      z1, z2, k = x[i], x[j], 0
      while abs(z1)+abs(z2) < 100 and k < 100:
         z1,z2 = z1**2-z2**2-0.75, 2*z1*z2
         k = k+1
      if k < 100:
         plt.plot(i, j, 'b.')
```



```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def julia(xmin,xmax,ymin,ymax):
   n = 150
   x = np.linspace(xmin, xmax, n)
   y = np.linspace(ymin, ymax, n)
   z1 = z2 = 0
   for i in range(n):
      for j in range(n):
         z1, z2, k = x[i], y[j], 0
         while abs(z1)+abs(z2) < 100 and k < 200:
            z1,z2 = z1**2-z2**2-0.75, 2*z1*z2
            k = k+1
         if k < 200:
            plt.plot(i, j, 'b.')

a = np.array([-2,2,-2,2])
b = np.array([-0.5, -0.35, 0.35, 0.40])
u = np.linspace(0,1,100)
u = np.sqrt(u)
for k in range(len(u)):
    v = u[k]*b + (1-u[k])*a
    julia(v[0],v[1],v[2],v[3])
    plt.savefig(f"Julia{k:02d}.png")
    plt.clf()
```

Plenumsoppgaver

Exercise 5.29: Judge a plot

Assume you have the following program for plotting a parabola:

```
import numpy as np
x = np.linspace(0, 2, 20)
y = x*(2 - x)
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

Then you switch to the function $\cos(18\pi x)$ by altering the computation of `y` to `y = cos(18*pi*x)`. Judge the resulting plot. Is it correct? Display the $\cos(18\pi x)$ function with 1000 points in the same plot.

Filename: `judge_plot`.

Plenumsoppgaver

Exercise 5.39: Animate the evolution of Taylor polynomials
A general series approximation (to a function) can be written as

$$S(x; M, N) = \sum_{k=M}^{N} f_k(x)\,.$$

For example, the Taylor polynomial of degree N for e^x equals $S(x; 0, N)$ with $f_k(x) = x^k/k!$. The purpose of the exercise is to make a movie of how $S(x; M, N)$ develops and improves as an approximation as we add terms in the sum. That is, the frames in the movie correspond to plots of $S(x; M, M)$, $S(x; M, M+1)$, $S(x; M, M+2)$, ..., $S(x; M, N)$.

Plenumsoppgaver

Exercise 5.39: Animate the evolution of Taylor polynomials
A general series approximation (to a function) can be written as

$$S(x; M, N) = \sum_{k=M}^{N} f_k(x)\,.$$

For example, the Taylor polynomial of degree N for e^x equals $S(x; 0, N)$ with $f_k(x) = x^k/k!$. The purpose of the exercise is to make a movie of how $S(x; M, N)$ develops and improves as an approximation as we add terms in the sum. That is, the frames in the movie correspond to plots of $S(x; M, M)$, $S(x; M, M+1)$, $S(x; M, M+2)$, ..., $S(x; M, N)$.

Eksempel:

Taylorpolynom for e^x:

$$S(x; M, N) = \frac{x^M}{M!} + \cdots + \frac{x^N}{N!} \qquad f_k(x) = x^k/k!$$

I Python: funksjon av to variabler:

```
def f(x,k):
    return x**k/math.factorial(k)
```

Plenumsoppgaver

a) Make a function

```
animate_series(fk, M, N, xmin, xmax, ymin, ymax, n, exact)
```

for creating such animations. The argument `fk` holds a Python function implementing the term $f_k(x)$ in the sum, `M` and `N` are the summation limits, the next arguments are the minimum and maximum x and y values in the plot, `n` is the number of x points in the curves to be plotted, and `exact` holds the function that $S(x)$ aims at approximating.

Hint Here is some more information on how to write the `animate_series` function. The function must accumulate the $f_k(x)$ terms in a variable s, and for each k value, s is plotted against x together with a curve reflecting the exact function. Each plot must be saved in a file, say with names `tmp_0000.png`, `tmp_0001.png`, and so on (these filenames can be generated by `tmp_%04d.png`, using an appropriate counter). Use the `movie` function to combine all the plot files into a movie in a desired movie format.

In the beginning of the `animate_series` function, it is necessary to remove all old plot files of the form `tmp_*.png`. This can be done by the `glob` module and the `os.remove` function as exemplified in Sect. 5.3.4.

Plenumsoppgaver

b) Call the `animate_series` function for the Taylor series for $\sin x$, where $f_k(x) = (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)!$, and $x \in [0, 13\pi]$, $M = 0$, $N = 40$, $y \in [-2, 2]$.

c) Call the `animate_series` function for the Taylor series for e^{-x}, where $f_k(x) = (-x)^k/k!$, and $x \in [0, 15]$, $M = 0$, $N = 30$, $y \in [-0.5, 1.4]$.

Filename: `animate_Taylor_series`.