

Forelesning IN1900 – 28 Sept 2022

Ole Christian Lingjærde
Institutt for Informatikk, Universitetet i Oslo

Uke: 26 September - 11 September, 2022

Eksempler på differenslikninger

Hvordan løse differenslikninger i Python

Oppgave A.1 og A.4 fra boka til Langtangen

Differenslikninger

Differenslikninger brukes til å beskrive sammenhengen mellom ulike ledd i en matematisk følge x_1, x_2, x_3, \dots
Eksempel:

$$x_n = x_{n-1} - 3 \cos x_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Å løse en differenslikning betyr å finne verdiene til x_1, x_2, x_3, \dots

For å løse en differenslikning må vi kjenne verdiene til noen av x_i 'ene (typisk de første elementene i følgen). Dette kalles *initialbetingelsene*. Eksempel:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \\x_n &= 1 + 0.8x_{n-1} \quad n = 2, 3, \dots\end{aligned}$$

Her er $x_1 = 0$ initialbetingelsen.

Liveprogrammering: innskudd i banken

Vi setter 1000 kroner i banken. Hvis årlig rente er p prosent, kan vi beskrive beløpet i banken etter n år slik:

$$\begin{aligned}x_0 &= 1000 \\x_n &= \left(1 + \frac{p}{100}\right) x_{n-1} \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Oppgave:

- Lag et program som regner ut verdien til innskuddet etter 1, 2, ..., 20 år
- Startbeløp og rente leses fra bruker under kjøring
- Svaret skrives ut som en tabell på skjermen og plottes med x_n på y-aksen og n på x-aksen
- Prøv programmet med $x_0 = 1000$ og $p = 5$

Liveprogrammering: populasjonsvekst

Vi ønsker å se hvordan antall reinsdyr på Hardangervidda endres over tid. Ved tid $t = 0$ antar vi at det er 10 000 dyr. Etter n år er antall reinsdyr tilnærmet lik

$$x_n = x_{n-1} + a \cdot x_{n-1} \left(1 - \frac{x_{n-1}}{m}\right)$$

hvor $a > 0$ og $m > 1$ er kjente parametre.

Oppgave:

- Lag et program som leser inn x_0 , m og a fra kommandolinjen og som regner ut x_1, x_2, \dots, x_{200} og plotter x_n som funksjon av n
- Prøv programmet med $x_0=10000$, $m=12000$, og $a=0.1$

Liveprogrammering: skrive ut rasjonale tall

Den såkalte *Stern-følgen* er slik: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ og

$$\begin{aligned}x_{2n} &= x_n \\x_{2n+1} &= x_n + x_{n+1}\end{aligned}$$

Det kan vises at $x_0/x_1, x_1/x_2, x_2/x_3, \dots$ er en liste over alle positive rasjonale tall uten gjentakelser.

Oppgave:

- Lag et program som beregner x_2, x_3, \dots, x_R og som skriver ut de rasjonale tallene $x_0/x_1, \dots, x_{99}/x_R$.
- Prøv programmet med $R=15$.

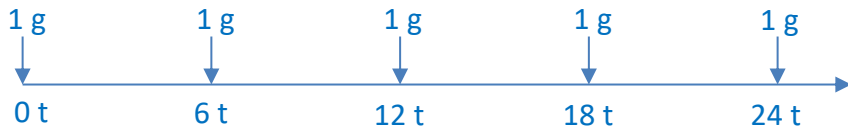
Liveprogrammering: paracetamol

Paracetamol selges reseptfritt som tabletter med 500 mg per tablett. I korte perioder kan man ta to tabletter inntil 4 ganger daglig.

Hvordan varierer konsentrasjonen av paracetamol i kroppen når man tar høyeste dose?



Liveprogrammering: paracetamol



Mengden i kroppen etter første dose er $x_0 = 1$ g.
Etter n nye doser er mengden i kroppen:

$$x_n = x_{n-1}e^{-3 \ln 2} + b$$

hvor $k = \ln(2)/2$ og $b = 1$ g.

Exercise A.1: Determine the limit of a sequence

- a) Write a Python function for computing and returning the sequence

$$a_n = \frac{7 + 1/(n + 1)}{3 - 1/(n + 1)^2}, \quad n = 0, 2, \dots, N.$$

Write out the sequence for $N = 100$. Find the exact limit as $N \rightarrow \infty$ and compare with a_N .

- b) Write a Python function for computing and returning the sequence

$$D_n = \frac{\sin(2^{-n})}{2^{-n}}, \quad n = 0, \dots, N.$$

Determine the limit of this sequence for large N .

c) Given the sequence

$$D_n = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h = 2^{-n}, \quad (\text{A.47})$$

make a function $D(f, x, N)$ that takes a function $f(x)$, a value x , and the number N of terms in the sequence as arguments, and returns the sequence D_n for $n = 0, 1, \dots, N$. Make a call to the D function with $f(x) = \sin x$, $x = 0$, and $N = 80$. Plot the evolution of the computed D_n values, using small circles for the data points.

- d) Make another call to D where $x = \pi$ and plot this sequence in a separate figure. What would be your expected limit?
- e) Explain why the computations for $x = \pi$ go wrong for large N .

Hint Print out the numerator and denominator in D_n .

Filename: `sequence_limits`.

Exercise A.4: Compute the development of a loan

Solve (A.16)–(A.17) in a Python function.

Filename: loan.

$$y_n = \frac{p}{12 \cdot 100} x_{n-1} + \frac{L}{N} \quad (\text{A.16})$$

$$x_n = x_{n-1} + \frac{p}{12 \cdot 100} x_{n-1} - y_n \quad (\text{A.17})$$