Forelesning IN1900 – 31 Oktober 2022

Ole Christian Lingjærde
Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

Uke: 31 Oktober – 6 November, 2022

Agenda for denne og neste uke

Kjapp repetisjon av sentrale klasse-begreper

Programmering med klasser og subklasser (OOP)

Hvordan løse differensiallikninger i Python

Modulen ODESolver

Repetisjon av klasser

Klasser kan brukes til å holde på data:

```
class K:
    def __init__(self, a, b):
        self.a = a
        self.b = b
```

Bruk av klassen:

```
p = K(2,6)          #Her setter vi data inn
print(p.a)          #Her henter vi data ut
print(p.b)
```

Repetisjon av klasser

Klasser kan ha flere instanser:

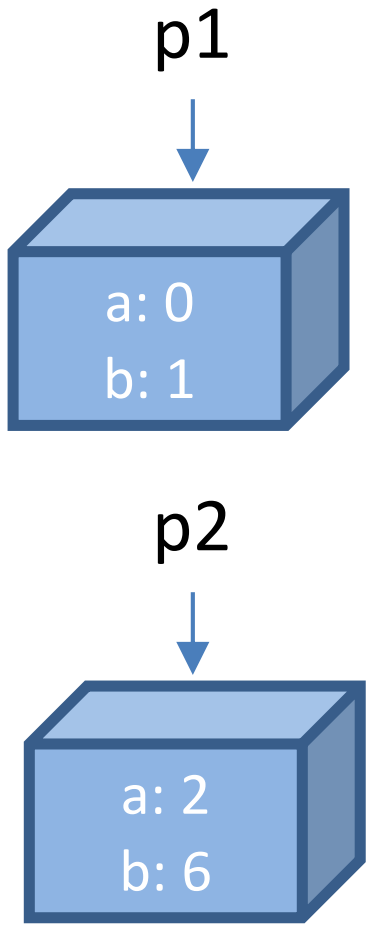
```
# Vi definerer klassen:
class K:
   def ____init____(self, a, b):
   self.a = a
   self.b = b

# Vi lager to instanser av
klassen:
p1 = K(0, 1)
p2 = K(2, 6)

# Vi ser på innholdet:

print(p1.a)  # Skriver ut 0
print(p1.b)  # Skriver ut 1
print(p2.a)  # Skriver ut 2
print(p2.b)  # Skriver ut 6
```

Totalt fire verdier er lagret!

Repetisjon av klasser

Klasser kan ha flere instanser:

```
# Vi definerer klassen:
class K:
    def __init__(self, a, b):
        self.a = a
        self.b = b

# Vi lager to instanser av
klassen:
p1 = K(0, 1)
p2 = K(2, 6)

# Vi ser på innholdet:

print(p1.a)  # Skriver ut 0
print(p1.b)  # Skriver ut 1
print(p2.a)  # Skriver ut 2
print(p2.b)  # Skriver ut 6
```



Totalt fire verdier er lagret!

Repetisjon av klasser

Klasser kan ha flere funksjoner:

```
# Vi definerer klassen:
class K:
    def __init__(self, a, b):
        self.a = a
        self.b = b

    def verdi(self, x):
        return self.a * x + self.b

# Vi lager to instanser:
p1 = K(0, 1)
p2 = K(6, 8)
print(p1.verdi(1))  # Skriver ut 1
print(p2.verdi(1))  # Skriver ut 14
```

Repetisjon av klasser

Viktig: husk å bruke *self*:

```
class K:
    def __init__(self, a, b):
        self.a = a
        self.b = b

    def verdi(x):
        return a * x + b  # Feil (må stå self.a og self.b)
```

Repetisjon av klasser

Spesialmetoder i Python:

```
a.__init__(self, args)      # Konstruktør
a.__del__(self)             # Destruktør
a.__call__(self, args)      # Funksjonskall
a.__str__(self)             # Tekstrepresentasjon
a.__repr__(self)            # Tekstrepresentasjon
a.__add__(self, b)          # a + b
a.__sub__(self, b)          # a - b
a.__mul__(self, b)          # a * b
a.__div__(self, b)          # a / b
a.__pow__(self, b)          # a ** b
a.__lt__(self, b)           # a < b
a.__le__(self, b)           # a <= b
a.__gt__(self, b)           # a > b
a.__ge__(self, b)           # a >= b
a.__eq__(self, b)           # a == b
a.__ne__(self, b)           # a != b
```

Eksempel 1

Hvis vi har definert klassen

```
class K:
  def __init__(self, value):
     self.value = value

  def __str__(self):
     s = f"Objekt med verdien {self.value}"
     return s
```

så kan vi skrive

```
u = K(3.14)                  # Her kaller vi på __init__
print(u)                     # Her kaller vi på __str__
```

Utskrift:

```
Objekt med verdien 3.14
```

Eksempel 2

Hvis vi har definert klassen

```
class K:
  def __init__(self, value):
     self.value = value

  def __eq__(self, b):
     value1 = self.value
     value2 = b.value
     for i in range(len(value1)):
        if value1[i] != value2[i]:
           return False
     return True
```

så kan vi skrive

```
u = K((0,1,2,3))          # Her kaller vi på __init__
v = K((0,1,2,4))          # Her kaller vi på __init__
print(u==v)               # Her kaller vi på __eq__
```

Eksempel 3: komplekse tall

Ønsker å definere klasse Complex for komplekse tall:

Komplekse tall skal kunne lages slik:

```
x = Complex(1,2)    # 1 + 2i
y = Complex(0,1)    # i
```

De skal ha en pen tekstlig representasjon:

```
print(x)            # UTSKRIFT: 1 + 2i
```

De skal kunne adderes slik:

```
x + y               # 1 + 3i
```

Eksempel 3: komplekse tall

Løsning:

- Lag en klasse med to instansvariabler `real` og `imag`
- Implementer tekstlig representasjon med `__str__(self)`
- Implementer addisjon med `__add__(self,y)`

Eksempel 3: løsningsskisse

```
class Complex:
    def __init__ (self, real, imag):
        self.real = real
        self.imag = imag

    def __str__(self):
        ...her kommer det mer...

    def __add__ (self, b):
        ...her kommer det mer...
```

Eksempel 3: løsningsskisse

```
class Complex:
    def __init__ (self, real, imag):
        self.real = real
        self.imag = imag

    def __str__(self):
        ...her kommer det mer...

    def __add__ (self, y):
        ...her kommer det mer...

# Eksempel på bruk:
x = Complex(1,2)
y = Complex(0,1)
z = x + y
print(z)
```

Eksempel 3: løsningsskisse

```
class Complex:
    def __init__ (self, real, imag):
        self.real = real
        self.imag = imag

    def __str__(self):
        ...her kommer det mer...

    def __add__ (self, y):
        ...her kommer det mer...
```

Eksempel 3: løsningsskisse

```
class Complex:
    def __init__(self, real, imag):
        self.real = real
        self.imag = imag

    def __str__(self):
        return f"{self.real} + {self.imag}i"

    def __add__(self, y):
        ...her kommer det mer...
```

Eksempel 3: løsningsskisse

```
class Complex:
    def __init__ (self, real, imag):
        self.real = real
        self.imag = imag

    def __str__(self):
        return f"{self.real} + {self.imag}i"

    def __add__ (self, y):
        real = self.real + y.real
        imag = self.imag + y.imag
        result = Complex(real,imag)
        return result
```

Eksempel 3: løsningsskisse

Viktig å skjønne hva som skjer i metoden __add__(self, y).

1. Hvert komplekst tall er i programmet representert som et eget objekt av klassen Complex.

Eksempel 3: løsningsskisse

Viktig å skjønne hva som skjer i metoden __add__(self, y).

1. Hvert komplekst tall er i programmet representert som et eget objekt av klassen Complex.

2. To komplekse tall x og y er derfor i programmet representert som to pekere `x` og `y`

Eksempel 3: løsningsskisse

Viktig å skjønne hva som skjer i metoden __add__(self, y).

1. Hvert komplekst tall er i programmet representert som et eget objekt av klassen Complex.

2. To komplekse tall x og y er derfor i programmet representert som to pekere `x` og `y`

3. Når vi skriver `x+y` så forsøker vi å addere to pekere. Det går normalt ikke an i Python (gir feilmelding).

Eksempel 3: løsningsskisse

Viktig å skjønne hva som skjer i metoden `__add__(self, y)`.

1. Hvert komplekst tall er i programmet representert som et eget objekt av klassen Complex.

2. To komplekse tall x og y er derfor i programmet representert som to pekere `x` og `y`

3. Når vi skriver `x+y` så forsøker vi å addere to pekere. Det går normalt ikke an i Python (gir feilmelding).

4. Men hvis vi har laget metoden `__add__(self, y)` så blir denne utført når vi skriver `x+y`.

Eksempel 3: løsningsskisse

Viktig å skjønne hva som skjer i metoden __add__(self, y).

1. Hvert komplekst tall er i programmet representert som et eget objekt av klassen Complex.

2. To komplekse tall x og y er derfor i programmet representert som to pekere `x` og `y`

3. Når vi skriver `x+y` så forsøker vi å addere to pekere. Det går normalt ikke an i Python (gir feilmelding).

4. Men hvis vi har laget metoden `__add__(self, y)` så blir denne utført når vi skriver `x+y`.

5. Da må vi tenke oss at vi sitter inni objektet x (som inneholder self.real og self.imag) og får tilsendt en peker y til det andre objektet (som inneholder y.real og y.imag).

Utvidelse til alle fire regnearter

Vi kan bruke samme metode som over til å implementere alle fire regnearter:

Substraksjon: `__sub__`

Multiplikasjon: `__mul__`

Divisjon: `__mul__`

Eksempel B: Python-kode

```
class Complex:
    <Alt tidligere som før>

    def __sub__(self, y):
        real = self.real - y.real
        imag = self.imag - y.imag
        res = Complex(real, imag)
        return res

    def __mul__(self, y):
        real = self.real*y.real - self.imag*y.imag
        imag = self.real*y.imag + self.imag*y.real
        res = Complex(real, imag)
        return res

    def __div__(self, y):
        r = y.real**2 + y.imag**2
        real = (self.real*y.real + self.imag*y.imag)/r
        imag = (self.imag*y.real - self.real*y.imag)/r
        res = Complex(real, imag)
        return res
```

Eksempler på bruk

```
x = Complex(1,1)          # x = 1 + i
y = Complex(2,3)          # y = 2 + 3i

print(x + y)              # 3 + 4i
print(x - y)              # -1 - 2i
print(x * y)              # -1 + 5i
print(x / y)              # 0.384615 + -0.0769231i
print(x * y / y)          # 1 + 1i
```

Repetisjon av klasser

Du bør nå ha en god forståelse av:

- Hvordan lage en enkel klasse
- Hvordan lage en konstruktør
- Hvordan lage instanser av en klasse
- Forstå når konstruktøren utføres
- Hvordan lage ekstra metoder i en klasse
- Hvordan lage spesialmetoder og når de utføres

I fortsettelsen av kurset kommer vi til å bruke alle tingene ovenfor regelmessig.

→ Henger du etter, er tiden inne for å hente seg inn!

Funksjoner med parametre

I matematiske funksjoner er det ofte hensiktsmessig å skille mellom *variabler* og *parametre*.

Eksempel: funksjon med to parametre v_0 og g:

$$f(t; v_0) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

For å evaluere f må vi åpenbart ha verdier for:

t : tidspunktet
v_0: startfarten
g : tyngdens akselerasjon (9.81)

Hvordan programmere dette i praksis?

Løsning A

Vi lar t, v_0 og g være argumenter til funksjonen:

```
def f(t, v0, g):
    return v0*t - 0.5*g*t**2
```

Eksempel på bruk:

```
t = 0.5
v0 = 50.0
g = 9.81
verdi = f(t, v0, g)
```

→ Ulempe: må oppgi v0 og g hver gang vi kaller på f

Løsning B

Vi lar t og v_0 være argumenter til funksjonen:

```
def f(t, v0):
    g = 9.81
    return v0*t - 0.5*g*t**2
```

Eksempel på bruk:

```
t = 0.5
v0 = 50.0
verdi = f(t, v0)
```

→ Ulempe: må fortsatt oppgi v0 hver gang
(men ikke smart å hardkode v0 inni funksjonen heller!)

Løsning C

Vi lar kun t være argument til funksjonen:

```
t = 0.5
verdi = f(t)
```

Men hvordan implementere dette hvis ikke v0 er hardkodet inni funksjonen f? Løsning: bruk klasse!

```
class F:
    def __init__(self, v0):
        self.v0 = v0
        self.g = 9.81

    def __call__(self, t):
        return self.v0*t - 0.5*self.g*t**2
```

Løsning C

Vi lar kun t være argument til funksjonen:

```
t = 0.5
verdi = f(t)
```

Men hvordan implementere dette hvis ikke v0 er hardkodet inni funksjonen f? Løsning: bruk klasse!

```
class F:
    def __init__(self, v0):
        self.v0 = v0
        self.g = 9.81

    def __call__(self, t):
        return self.v0*t - 0.5*self.g*t**2
```

```
v0 = 50.0
f = F(v0)      # Lag funksjonen f, med v0=50.0
t = 0.5
verdi = f(t)   # Bruk funksjonen f
```

Implementere funksjoner med mange parametre

Gitt en funksjon med $n + 1$ parametre og en uavhengig variabel:

$$f(x; p_0, \ldots, p_n)$$

er det smart å bruke en klasse til å implementere f, hvor $p_0, \ldots, p_n$ er attributter i klassen.

```
class MyFunc:
    def __init__(self, p0, p1, p2, ..., pn):
        self.p0 = p0
        self.p1 = p1
        ...
        self.pn = pn
    def __call__(self, x):
        return ...
```

Eksempel: funksjon med fire parametre

$$v(r;\beta,\mu_0,n,R) = \left(\frac{\beta}{2\mu_0}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1}\left(R^{1+\frac{1}{n}} - r^{1+\frac{1}{n}}\right)$$

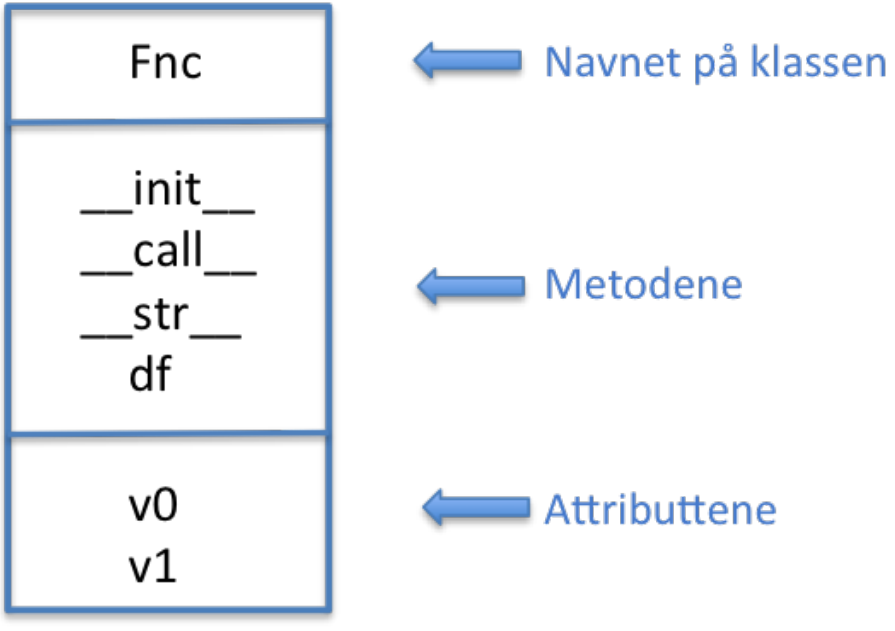
```
class VelocityProfile:
    def __init__(self, beta, mu0, n, R):
        self.beta,self.mu0,self.n,self.R = beta,mu0,n,R

    def __call__(self, r):
        beta,mu0,n,R = self.beta,self.mu0,self.n,self.R
        a = (beta/(2*mu0))**(1/n) * (n/(n+1)
        b = R**(1+1/n) - r**(1+1/n)
        return a * b

v = VelocityProfile(0.06, 0.02, 1, 1.2)
print(v(0.1))
```

UML-diagrammer

UML (Unified Modeling Language) er en visuell måte å fremstille og dokumentere datamodeller på.

Vi kan bruke UML-diagrammer til å visualisere innholdet i klasser, og relasjoner mellom klasser.

Eksempel:



Objektorientert programmering (OOP)

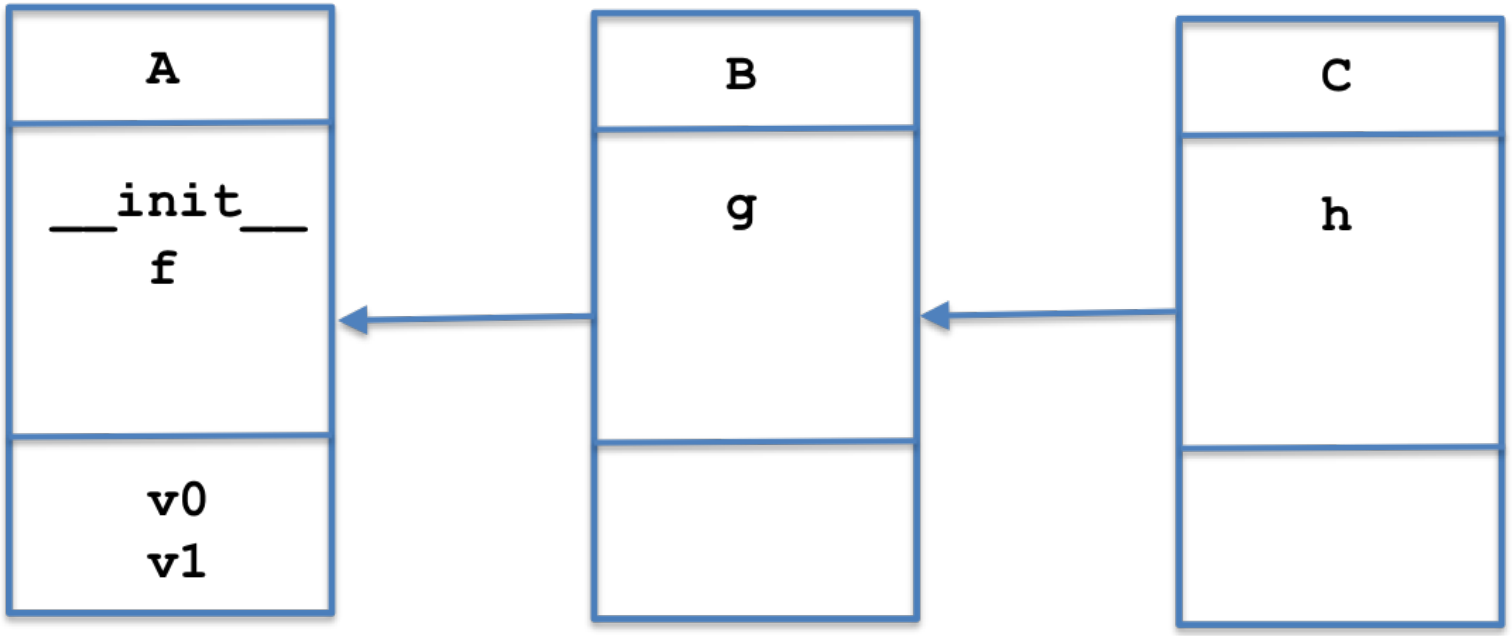
- Teknisk sett er all Python-programmering *objektbasert*.
- I *objektorientert* programmering (OOP) går vi ett skritt videre: OOP utnytter en svært nyttig egenskap ved klasser: de kan settes sammen som byggeklosser.
- Hvis vi har definert en klasse `class A` så kan vi definere en ny klasse `class B(A)`. Da blir B en utvidelse av A.
- Vi sier at B arver data og metoder fra A.
- Vi sier også at B er en subklasse av A, og at A er en superklasse til B.

Prinsipp A: Klasser kan arve fra andre klasser

```
class A:
    def __init__ (self, v0, v1):
        self.v0 = v0
        self.v1 = v1

    def f(self, x):
        return self.v0 + self.v1*x

class B(A):
    def g(self, x):
        return x**4

class C(B):
    def h(self, x):
       return x**6
```

`A` : to attributter (v0, v1) og to metoder (`__init__`, `f`)
`B` : to attributter (v0, v1) og tre metoder (`__init__`, `f`, `g`)
`C` : to attributter (v0, v1) og fire metoder (`__init__`, `f`, `g`, `h`)

UML-diagram



Innholdet i klassene A, B og C

```
# I objekter av A har vi attributtene v0, v1 og metoden f:
p = A(2.7, 5.2)
print(p.v0)
print(p.v1)
print(p.f(3.0))

# I objekter av B har vi det samme + metoden g:
p = B(2.7, 5.2)
print(p.v0)
print(p.v1)
print(p.f(3.0))
print(p.g(3.0))

# I objekter av C har vi det samme + metoden h:
p = C(2.7, 5.2)
print(p.v0)
print(p.v1)
print(p.f(3.0))
print(p.g(3.0))
print(p.h(3.0))
```

Prinsipp B: Subklasser kan overkjøre metoder i superklasser

```
class A:
    def __init__(self, a):
        self.a = a

    def skrivut(self):
        print("Klasse A")

class B(A):
    def __init__(self, b):      # Overkjører __init__ i class A
        self.b = b

    def skrivut(self):          # Overkjører skrivut i class A
        print("Klasse B")

# Eksempler på bruk
p = A(3)       # Lag objekt av superklassen A
p.skrivut()    # Utskrift: "Klasse A"
p = B(4)       # Lag objekt av subklassen B
p.skrivut()    # Utskrift: "Klasse B"
```

Hensikten med å overkjøre metoder

Subklasser kan brukes for å legge til ny funksjonalitet

Subklasser kan også brukes for å restriktere funksjonaliteten i klassen det arves fra

Utskrift og andre funksjoner kan være nødvendig å endre i subklasser

Praktisk trening er helt nødvendig

Prinsipp C: Overkjørte metoder finnes fortsatt

```
class A:
    def __init__(self, a):
        self.a = a

    def skrivut(self):
        print("Klasse A")

class B(A):
    def __init__(self, a, b):
        super().__init__(a) # Kall __init__ i superklassen
        self.b = b

    def skrivut(self):
        A.skrivut(self)     # Kall skrivut i superklassen
        print("Klasse B")
```

```
p = B(3,4)   # Lag objekt av subklassen B
p.skrivut()  # Utskrift: 'Klasse A' + linjeskift + 'Klasse B'
```

Prinsipp D: Vi kan ha mange nivåer av subklasser

```
class A:
    def __init__(self, a):
        self.a = a

    def skrivut(self):
        print(f"a = {self.a}")

class B(A):
    def __init__(self, a, b):
        super().__init__(a)
        self.b = b

    def skrivut(self):
        print(f"a = {self.a}, b = {self.b}")

class C(B):
    def __init__(self, a, b, c):
        super().__init__(a, b)
        self.c = c

    def skrivut(self):
        print(f"a = {self.a}, b = {self.b}, c = {self.c}")
```

Prinsipp E: Vi kan alltid finne ut hvor vi er i hierarkiet

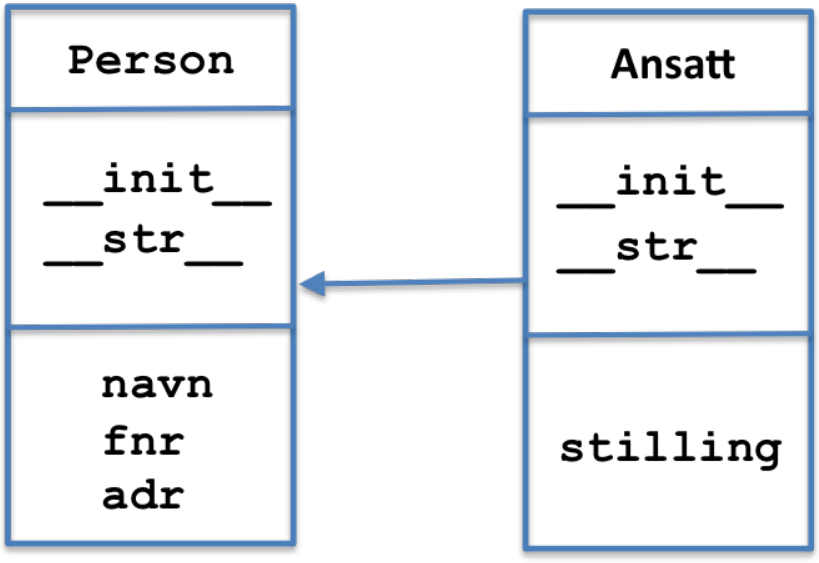
Anta at klassene A, B, C er definert som på forrige slide.

```
# Lag objekter av A og B
p = A(1)
q = B(1,2)

# Hvilke klasser er et objekt en instans av?
isinstance(p, A)  # True
isinstance(p, B)  # False
isinstance(q, A)  # True
isinstance(q, B)  # True

# Hvilken unike klasse tilhører objektet p?
print(p.__class__    == A)   # True
print(p.__class__    == B)   # False
print(q.__class__    == A)   # False
print(q.__class__    == B)   # True

# Alternativ til over
print(p.__class__.__name    == "A")    # True

# Er klassen B en subklasse av klassen A?
issubclass(B, A)  # True
issubclass(A, B)  # False

# Finn navnet på superklassen til et objekt
print(q.__class__.__bases__[0].__name__)  # A
```

Eksempel A: Person - Ansatt

```
class Person:
    def __init__(self, navn, fnr, adr):
        self.navn = navn
        self.fnr = fnr
        self.adr = adr

    def __str__(self):
        s = f"Navn: {self.navn}\nFnr: {self.fnr}\nAdresse: {self.adr}\
        return s

class Ansatt(Person):
    def __init__(self, navn, fnr, adr, stilling):
        Person.__init__(self, navn, fnr, adr)
        self.stilling = stilling

    def __str__(self):
        s1 = Person.__str__(self)
        s2 = f"Stilling: {self.stilling}\n"
        return(s1 + s2)

p = Person("Rex", "18050012345", "Slottet")
print(p)

p = Ansatt("Rex", "18050012345", "Slottet", "Konge")
print(p)
```

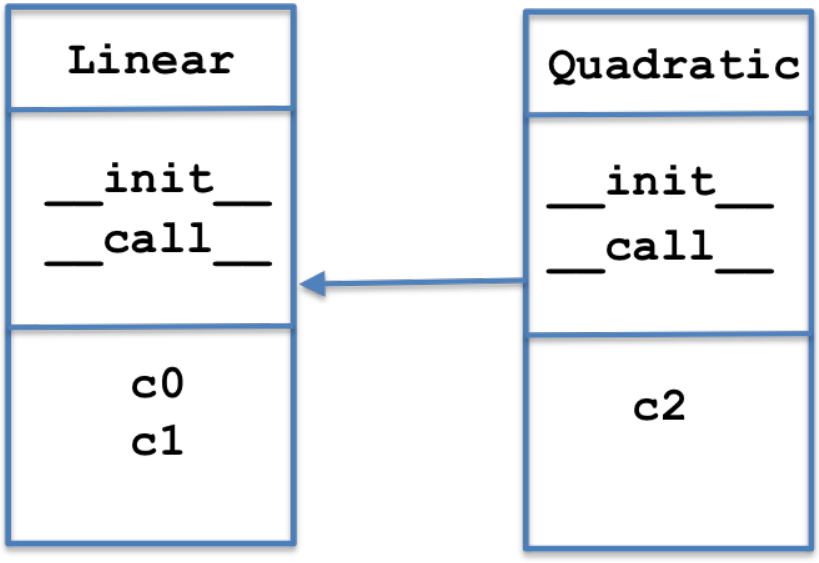
UML-diagram



Eksempel B: Lineært polynom - kvadratisk polynom

```
class Linear:
    def __init__(self, c0, c1):
        self.c0 = c0
        self.c1 = c1

    def __call__(self, x):
        return self.c0 + self.c1*x

class Quadratic(Linear):
    def __init__(self, c0, c1, c2):
        Linear.__init__(self, c0, c1)
        self.c2 = c2

    def __call__(self, x):
        return Linear.__call__(self, x) + self.c2*x**2

# Test av klassene
p = Quadratic(3, 4, 5)
print(p(2.5))              # 44.25
```

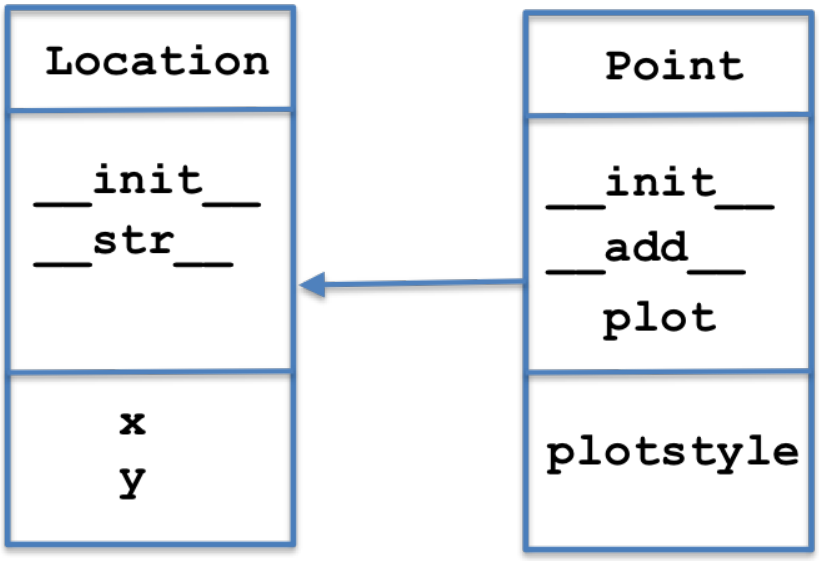
UML-diagram



Eksempel C: Punkt - vektor

```
import matplotlib.pyplot as plt

class Location:
    def __init__(self, x, y):
        self.x = x; self.y = y

    def __str__(self):
        return f"({self.x}, {self.y})"

class Point(Location):
    def __init__(self, x, y, plotstyle="ro"):
        Location.__init__(self, x, y)
        self.plotstyle = plotstyle

    def __add__(self, p):
        xnew = self.x + p.x
        ynew = self.y + p.y
        return Point(xnew, ynew)

    def plot(self):
        plt.plot(self.x, self.y, self.plotstyle)

p1 = Point(3,4); p2 = Point(1,1); p3 = Point(2.5, 1.5)
p4 = p1 + p3
p1.plot(); p2.plot(); p3.plot(); p4.plot()
```

UML-diagram



Større eksempel: klassehierarki for numerisk derivasjon

Hvis funksjonen $f(x)$ er deriverbar i punktet x, så vet vi at

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

og derfor er (for $h > 0$ liten):

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Formelen over er alt vi trenger for å regne ut deriverte i Python!

Finne den deriverte i et punkt x

```
# Definer en kvadratisk funksjon
def g(x):
    return x**2 + 5*x + 1

# Definer den (eksakte) deriverte
def dg(x):
    return 2*x + 5

# Definer funksjon som finner numerisk derivert i et punkt
def deriv(f, x):
    h = 1e-5
    return (f(x+h)-f(x))/h

# Sammenlikn løsninger
print(f"Eksakt: g'(0)={dg(0)}    Numerisk: g'(0)={deriv(g,0)}")
```

Finne hele derivertfunksjonen

Løsningen på forrige slide har én svakhet:

Vi finner ikke egentlig derivertfunksjonen $g'(x)$, vi bare regner ut hva den deriverte er i et bestemt punkt x. For hvert nytt punkt x må vi kalle på funksjonen *deriv* og må oppgi navnet på funksjonen som skal deriveres:

```
deriv(g, 0.5)    # Den deriverte i x=0.5
deriv(g, 1.5)    # Den deriverte i x=1.5
deriv(g, 4.3)    #Den deriverte i x=4.3
```

Kan vi i stedet få Python til å finne en funksjon *dg* som oppfører seg akkurat som den deriverte? Vi vil at dette skal virke:

```
dg = Derivative(g)
dg(0.5) # Den deriverte i x=0.5
dg(1.5) # Den deriverte i x=1.5
dg(4.3) #Den deriverte i x=4.3
```

Implementasjon

```
# Lag en klasse som implementerer derivertfunksjonen til f
class Derivative:
  def __init__(self, f, h=1E-5):
    self.f = f
    self.h = float(h)

    def __call__(self, x):
      f, h = self.f, self.h
      return (f(x+h) - f(x))/h

# Lag en konkret funksjon g(x)
def g(x):
  return x**2 + 5*x + 1

# Finn derivertfunksjonen g'(x)
dg = Derivative(g)

# Derivertfunksjonen kan brukes som en vanlig funksjon
dg(0.5)  # Den deriverte i x=0.5
dg(1.5)  # Den deriverte i x=1.5
dg(4.3)  #Den deriverte i x=4.3
```

Utvidelse: flere måter å beregne deriverte på

Formelen vi har brukt for den deriverte er bare en av flere muligheter. Her er noen ulike alternativer:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$f'(x) \approx \frac{4}{3}\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{1}{3}\frac{f(x+2h) - f(x-2h)}{4h}$$

Vi kan implementere hver av dem som en Derivative-klasse.

Implementasjon

```
class Forward1:
  def __init__(self, f, h=1E-5):
    self.f, self.h = f, h

  def __call__(self, x):
    f, h = self.f, self.h
    return (f(x+h) - f(x))/h

class Central2:
  def __init__(self, f, h=1E-5):
    self.f, self.h = f, h

  def __call__(self, x):
    f, h = self.f, self.h
    return (f(x+h) - f(x-h))/(2*h)

class Central4:
  def __init__(self, f, h=1E-5):
    self.f, self.h = f, h

  def __call__(self, x):
    f, h = self.f, self.h
    return (4/3)*(f(x+h)-f(x-h))/(2*h)-(1/3)*(f(x+2*h)-f(x-2*h))/(4*h)
```

Implementasjon med subklasser

```
class Diff:
  def __init__(self, f, h=1E-5):
    self.f, self.h = f, h

class Forward1(Diff):
  def __call__(self, x):
    f, h = self.f, self.h
    return (f(x+h) - f(x))/h

class Central2(Diff):
   def __call__(self, x):
     f, h = self.f, self.h
     return (f(x+h) - f(x-h))/(2*h)

class Central4(Diff):
   def __call__(self, x):
     f, h = self.f, self.h
     return (4/3)*(f(x+h)-f(x-h))/(2*h)-(1/3)*(f(x+2*h)-f(x-2*h))/(4*h)
```

Løsning av ordinære differensiallikninger

- ODE = Ordinary Differential Equation
- Likning hvor den ukjente er en funksjon $u(t)$
- Differential: knytter sammen $u(t)$, $u'(t)$ (og evt høyereordens deriverte)
- Ordinary: ser bare på deriverte i én variabel (f.eks. t)

Vi kommer til å se på to varianter av ODE'er:

- Skalar ODE: en likning
- Vektor ODE: flere likninger (likningssystem)

Eksempel A

Anta at vi skal finne funksjonen $u(t)$ når vi vet at

$$u'(t) = t^3$$

Vi kan integrere på begge sider:

$$u(t) = \frac{1}{4}t^4 + C$$

Hvis vi i tillegg har en *initialbetingelse* $u(0) = 1$ kan vi finne C:

$$u(t) = \frac{1}{4}t^4 + 1$$

Eksempel B

Anta at vi skal finne funksjonen $u(t)$ når vi vet at

$$u'(t) = f(t)$$

Vi kan igjen integrere begge sider:

$$u(t) = \int f(t)\,dt + C$$

Har vi en initialbetingelse $u(0) = u_0$ kan vi igjen finne C.

Vi har sett tidligere i kurset hvordan man kan regne ut integraler numerisk.

Eksempel C

Eksempel A og B var veldig enkle differensiallikninger, siden vi kunne finne $u(t)$ bare ved å integrere på begge sider. Vi ser nå på en likning hvor u(t) også forekommer i høyresiden:

Anta at vi skal finne funksjonen $u(t)$ når vi vet at

$$u'(t) = \alpha u(t)$$

Vi prøver som før å integrere på begge sider:

$$u(t) = \alpha \int u(t)\, dt + C$$

Vi har funnet et uttrykk for $u(t)$, men høyresiden inneholder den ukjente funksjonen!

Hvordan løse Eksempel C?

Eksempel C er såpass enkel at vi kan løse den matematisk:

Vi skal finne $u(t)$ når

$$u'(t) = \alpha u(t)$$

Vi flytter om:

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = \alpha$$

Vi får en smart innsikt og ser at dette kan skrives

$$(\ln u(t))' = \alpha$$

Vi integrerer på begge sider:

$$(\ln u(t)) = \int \alpha \, dt = \alpha t$$

Vi tar $exp(.)$ på begge sider:

$$u(t) = e^{\alpha t}$$