UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	Inf-Mat3350 —
Eksamensdag:	8. januar 2004
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Løsningsforslag
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 6 deloppgaver med tilnærmet samme vekt.

Oppgave 1

Avgjør om følgende påstander er sanne eller gale, begrunn svaret.

1a

Metodene kjent som Gauss-Seidel og konjugerte gradienter har det til felles at de finner den eksakte løsning av ligningssystemet $Ax = b$ ved hjelp av et endelig antall aritmetiske operasjoner.

Løsning *Galt. Konjugerte gradienter har ortogonale residualer og derfor endelig terminering, men Gauss-Seidel vil normalt ikke finne løsningen ved et endelig antall iterasjoner.*

1b

La n være et positivt heltall og la A være den øvre triangulære nxn-matrisen hvor alle elementene på og over diagonalen er lik 1. Da har A lineært uavhengige egenvektorer.

Løsning *Riktig for $n = 1$, galt for $n \geq 2$. Begrunnelse: Matrisen har egenverdien 1 av multiplisitet n. Dette betyr ikke nødvendigvis at egenvektorene er lineært avhengige, men hvis vi søker en egenvektor på formen $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ får vi ligningssystemet*

$$x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n = x_i, \quad \textit{for} \quad i = 1, \dots, n$$

eller

$$x_{i+1} + \cdots + x_n = 0, \quad \textit{for} \quad i = 1, \dots, n-1.$$

(Fortsettes på side 2.)

Løses dette nedenfra og oppover finner vi $x_i = 0$ *for* $i = 2, \ldots, n$ *og* $x_1 \neq 0$ *et vilkårlig tall. Det betyr at* A *bare har en egenvektor* $x = (x_1, 0, \ldots, 0)^T$. *Siden* $x_1 \neq 0$ *har vi lineær uavhengighet for* $n = 1$, *men lineær avhengighet for* $n > 1$.

Oppgave 2 Egenvektorer

La n være et positivt heltall. I denne oppgaven skal vi bestemme egenvektorene til en øvre triangulær matrise $A \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Den første enhetsvektoren er en egenvektor svarende til egenverdien $a_{1,1}$. Du skal ikke vise dette. La $2 \leq k \leq n$. Vi partisjonerer A på formen

$$A = \begin{bmatrix} B & a & C \\ 0 & a_{k,k} & d^T \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix}$$

hvor $B \in \mathbb{R}^{k-1,k-1}$, $E \in \mathbb{R}^{n-k,n-k}$ og $a_{k,k} \in \mathbb{R}$.

2a

Bestem om mulig $v \in \mathbb{R}^{k-1}$ slik at

$$\begin{bmatrix} v \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

er en egenvektor til A svarende til egenverdien $a_{k,k}$. De $n-k$ siste komponentene i egenvektoren er lik 0. Gi en tilstrekkelig betingelse for at v eksisterer.

Løsning *Vektoren* v *bestemmes av ligningssystemet*

$$\begin{bmatrix} B & a & C \\ 0 & a_{k,k} & d^T \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a_{k,k} \begin{bmatrix} v \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som gir

$$\begin{aligned} Bv + a &= a_{k,k} v \\ a_{k,k} &= a_{k,k} \\ E \cdot 0 &= 0. \end{aligned}$$

Vi finner $(Bv - a_{k,k}I)v = -a$ *eller* $v = (Bv - a_{k,k}I)^{-1}a$. *Siden* $Bv - a_{k,k}I$ *er øvre triangulær er systemet løsbart hvis og bare hvis diagonalelementene er forskjellig fra null, dvs.* $a_{i,i} \neq a_{k,k}$ *for* $i = 1, \ldots, k-1$. *Det er tilstrekkelig at egenverdiene (diagonalelementene) til* A *er distinkte.*

(Fortsettes på side 3.)

2b

Anta at betingelsen for eksistens av v i forrige deloppgave er oppfylt. Skriv en Matlab `function X=eigvecU(A)` som bestemmer egenvektorene $X = (x_1, \dots, x_n)$ til A ved hjelp av formlene fra forrige deloppgave. Vi antar at det er gitt en `function x=utrisolve(U,c)` som løser det øvre triangulære systemet $Ux = c$ ved tilbakesubstitusjon. Du skal ikke skrive innmaten i `utrisolve`.

Løsning *I lys av forrige deloppgave antar vi at A har distinkte diagonalelementer. For hver $k = 2, \dots, n$ finner vi egenvektoren x_k på formen $x_k = (v_k, 1, 0)^T$ hvor $v_k \in \mathbb{R}^{k-1}$ finnes ved å løse et øvre triangulært ligningssystem $T_k v_k = -f_k$. Her er $T_k = A_{k-1} - a_{k,k} I$ hvor A_{k-1} er øvre $k-1, k-1$ hjørne av A og f_k består av de $k-1$ første komponentene i kolonne k i A. Dette gir følgende program:*

```
function X=eigvecU(A)
n=length(A);
E=eye(n);
X(:1)=E(:,1);
 for k=2:n
    X(:,k)=[utrisolve(A(1:k-1,1:k-1)-A(k,k),-A(1:k-1,k))
 end
```

Oppgave 3

For et positivt heltall n la $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ være ikkesingulær og $x, x', b \in \mathbb{R}^n$ med $Ax = b$. Videre lar vi $\|\cdot\|$ betegne både en vektornorm på $\mathbb{R}^n$ og den tilhørende operatornorm for nxn-matriser.

3a

Vis at

$$\frac{\|e\|}{\|x\|} \le \mathrm{cond}(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

hvor $e = x - x'$, $r = b - Ax'$ og $\mathrm{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$

Løsning *Vi har*

$$r = b - Ax' = Ax - Ax' = Ae \quad \textit{eller} \quad e = A^{-1} r.$$

Siden vektornormen og matrisenormen vi bruker er kompatible har vi $\|e\| \le \|A^{-1}\| \|r\|$ og $\|b\| = \|Ax\| \le \|A\| \|x\|$. Kombineres disse ulikhetene får vi resultatet.

(Fortsettes på side 4.)

3b

Diskuter betydningen av resultatet i deloppgave 3a når i tenker på x' som en approksimasjon til den eksakte løsningen x av $Ax = b$ og r som residualen til feilen.

Løsning *Størrelsene* $\frac{\|e\|}{\|x\|}$ *og* $\frac{\|r\|}{\|b\|}$ *betegner henholdsvis relativ feil og relativ residual. Dersom cond(A) er stor sier vi at A er dårlig kondisjonert (mhp invertering). Hvis cond(A) er liten (nær 1) sier vi at A er godt kondisjonert (mhp invertering). Observer at den relative residualen er enkel å beregne. Resultatet sier at dersom A er dårlig kondisjonert så kan den relative feil være stor selv om den relative residualen er liten. Dersom A er godt kondisjonert er den relative feil liten dersom den relative residualen er liten.*

Slutt