

Løsningsforslag- INF2310 vår 2009, UKEOPPGAVER 5

Merk at :

Når vi konvolverer to filterkjerner, vil vi at resultatet skal bli større enn hver av de to filterkjernene, fordi vi gjerne ønsker å bruke denne teknikken til å lage en effektiv implementasjon av filtre.

Når vi konvolverer et bilde med et filter, vil vi vanligvis at ut-bildet skal ha samme størrelse som inn-bildet.

Oppgave 1 – 1D konvolusjon av to filtre

Vi har gitt et 1D-filer $h=[1\ 2\ 1]$ som vi skal konvolvere med et annet filter $b=[1\ 3\ 4\ 3\ 4]$. Konvolusjonen skal beregnes for alle mulige pikselposisjoner. Der hvor vi bare har delvis overlapp, utvider vi med 0-er.

$$g=h*f=[1\ 2\ 1]*[1\ 3\ 4\ 3\ 4] = [1\ 5\ 11\ 14\ 14\ 11\ 4]$$

Merk at størrelsen på resultatet blir større enn hvert av de to filtrene.

Hvis lengden på de to filtrene er hhv k og $m=2w+1$, blir lengden på resultatet $k+2w$.

Oppgave 2 – 2D konvolusjon av to filtre

Vi skal konvolvere et 2D-filter h :

1 1

1 1

med et annet 2-D filter b :

4 1

2 3

Utfør konvolusjonen (manuelt) og finn resultatet. Beregn konvolusjonen for alle mulige pikselposisjoner. Der hvor vi bare har delvis overlapp, utvider vi med 0-er.

Utbildet $g=h*b$ blir:

4 5 1

6 10 4

2 5 3

Oppgave 4 - Middelvei

Et bilde glattes med 3×3 middelvei-filtre.

Det inneholder fremdeles mye støy, og resultatet filtreres en gang til med samme filter.

Hvilket filter vil gi samme resultat i ett steg?

Er dette filteret separabelt?

Gir en vilkårlig kombinasjon av separable filtre et nytt separabelt filter?

Konvolusjon er kommutativ, dvs $f * g = g * f$ og assosiativ, dvs. $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Det spiller altså ingen rolle hvilken rekkefølge sammensatte konvolusjoner utføres i.

Hvis vi har et bilde f som vi konvolverer med filteret h , og konvolverer resultatet med h igjen, så kan vi skrive det som

$$G = (f * h) * h = f * (h * h)$$

Så hvis filteret vårt er et homogent lavpassfilter, finner vi svaret på det første spørsmålet ved å konvolvare filteret med seg selv:

$$h(i, j) * h(i, j) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{81} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Er dette et separabelt filter? Ja, for det kan skrives som

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} * [1 \quad 1 \quad 1] * \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} * [1 \quad 1 \quad 1]$$

Og dette kan stokkes om til

$$\frac{1}{81} [1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 1]^T * [1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 1]$$

Gir en vilkårlig kombinasjon av separable filtre et nytt separabelt filter? Nei, vi kan ikke garantere dette for "en vilkårlig kombinasjon", men en konvolusjon av to separable filtre gir et nytt separabelt filter, etter samme oppskrift som ovenfor.

Oppgave 3 - Median-filtrering

Gitt et 10×7 binært bilde av bokstavene "iq"

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 0 1 0 0 0 0 0 1 1
1 1 1 0 1 1 1 0 1 1
1 0 1 0 1 1 1 0 1 1
1 0 1 0 1 1 0 0 1 1
1 0 1 1 0 0 0 0 0 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

Utfør 3×3 median-filtreringer av dette bildet, der følgende masker skal benyttes (et "0" i en maske-posisjon betyr her at den tilsvarende piksel ikke skal være med i beregningen av medianen). Se bort fra rand-effekter (dvs. anvend bare filtret dersom hele filtret faller innenfor bildet, og sett 1 i første piksel innenfor kanten av ut-bildet), og vis resultatene av filtreringen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har sett at lavpassfiltre er separable i den forstand at vi kan bruke en kolonne-vektor til å lavpass-filtrere i en retning, og så bruke en rad-vektor til å lavpass-filtrere resultatet fra den første filtreringen.

Er median-filtret gitt ved masken a) ovenfor separabelt? Begrunn svaret.
Bruk median-filtrene gitt ved b) og c) ovenfor til å illustrere.

Det kreves kun at man viser hvorvidt filteret i a) kan separeres i filterene b) og c), ikke to generelle filtre.

Løsningshint :

For det første ser vi at ingen av filterene virker godt på dette bildet, det horisontale filteret virker godt på horisontale linjer, men ikke på vertikale og omvendt. Hvis et filter er separabelt, skal vi kunne kjøre f.eks. først filteret i b), så kjøre filteret i c) på resultatet fra første kjøring. Resultatet av dette skal bli det samme som resultatet av filteret i a). Dette er ikke tilfelle, så vi kan konkludere at filteret er ikke separabelt.

Oppgave 5 - Et smartere median-filter ?

Vi vet at et ordinært kvadratisk median-filter ikke gir "riktig" verdi for hjørnepiksler og piksler på tynne linjer.

Undersøk om 5 x 5 filtret

$$\text{median}(\min(A); \min(B); C; \max(A); \max(B))$$

der A er de 16 pikslene i den ytre "smultringen" i vinduet,

B er de 8 pikslene i "smultringen" innenfor,

og C er senterpikset,

tar bedre vare på hjørner, tynne linjer og linjestykker som faller innenfor vinduet.

Løsningshint :

Her er det enkelt å lage seg to test-bilder bestående av et hjørne og en linje, og så filtrere disse. Prøv f.eks. med følgende bilder:

Hjørne-bilde:

```
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 1 1 1 1
0 0 1 1 1 1
0 0 1 1 1 1
0 0 1 1 1 1
0 0 1 1 1 1
```

Linje-bilde:

```
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0
```

Dette filteret bevarer både linjer og hjørner. Det består tilsynelatende av mange operasjoner, men min og max er raske operasjoner, og median-filtreringen gjøres bare på 5 verdier, ikke 5x5.

Du kan også sjekke spissere hjørner på denne måten, og en linje som går diagonalt gjennom bildet, eller et linjestykke som bare går fra bildekanten og inn til sentrum i bildet.