

---

## INF 2310 – Digital bildebehandling



Forelesning 3  
Geometriske operasjoner

Fritz Albrechtsen

31.01.2012

INF2310

1

---

## Temaer i dag

- Geometriske operasjoner
- Lineære / affine transformasjoner
- Resampling og interpolasjon
- Samregistrering av bilder
  
- Pensum: Kap. 2.4.4 og 2.6.5 i DIP

31.01.2012

INF2310

2

---

## Geometriske operasjoner

- Endrer på pikslenes posisjoner
- Første steg i denne prosessen:
  - Transformer pikselkoordinatene  $(x,y)$  til  $(x',y')$ :
$$x' = T_x(x,y)$$
$$y' = T_y(x,y)$$
  - $T_x$  og  $T_y$  er ofte gitt som polynomer.
- Siden pikselkoordinatene må være heltall, må vi deretter bruke interpolasjon til å finne pikselverdien (gråtonen) i den nye posisjonen.

31.01.2012

INF2310

3

---

## Anvendelser

- Forstørre deler av bilder for visuell inspeksjon («zooome»)
- Rette opp geometriske feil som oppstår under avbildningen
  - Rotasjon i bildeplanet
  - Fiskeøyelinse
  - Radaravbildning av terreng
  - Medisinsk ultralyd
  - ...
- Samregistrere bilder
  - Samregistrere bilder fra ulike sensorer (CT, MR, US)
  - Samregistrere bilder tatt på ulike tidspunkt.
  - Samregistrere bilder med kart i en bestemt kartprojeksjon.
  - Eksempel: Ansiktsgjenkjenning: Finne alle ansiktene i et bilde, "klipp" ut ansiktene, transformer del-bildene slik at ansiktene i bildet blir på samme sted, har samme orientering og samme størrelse som i referansebildene.
- Generere bilder fra andre kameravinkler
- Spesialeffekter

31.01.2012

INF2310

4

## Affine transformasjoner

- Transformerer pikselkoordinatene  $(x,y)$  til  $(x',y')$ :

$$x' = T_x(x,y)$$

$$y' = T_y(x,y)$$

- Affine transformasjoner beskrives ved:

$$x' = a_0x + a_1y + a_2$$

$$y' = b_0x + b_1y + b_2$$

- På matriseform:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

31.01.2012

INF2310

5

## Egenskaper ved affine transformasjoner

- Rette linjer bevares (se ukeoppgave)
- Parallelle linjer forblir parallelle
- Utrykkes ved enkel matrisemultiplikasjon
- Eksempler på affine transformasjoner:
  - Translasjon
  - Rotasjon
  - "Shearing"
  - Skalering
  - Kombinasjoner av disse (!)

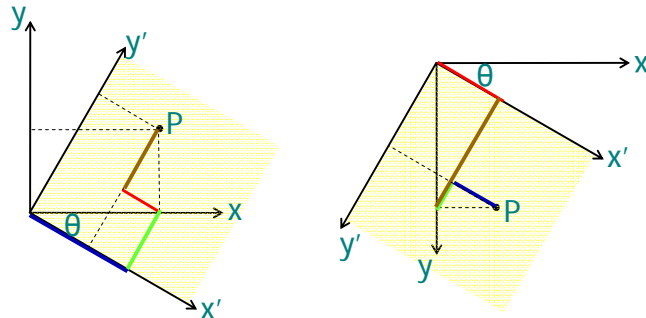
31.01.2012

INF2310

6

## Litt om rotasjon ...

- Høyrehånds koordinatsystem, rotasjon positiv med urviseren:
 
$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta; y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$
- Venstrehånds koordinatsystem, rotasjon positiv med urviseren:
 
$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta; y' = -x \sin \theta + y \cos \theta$$



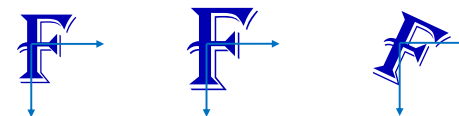
31.01.2012

INF2310

7

## Eksempler på enkle transformasjoner - I

Transformasjon	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	Uttrykk
Identitet	1	0	0	1	0	0	$x' = x$ $y' = y$
Skalering	s	0	0	s	0	0	$x' = sx$ $y' = sy$
Rotasjon	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0	$\sin \theta$	$\cos \theta$	0	$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$ $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

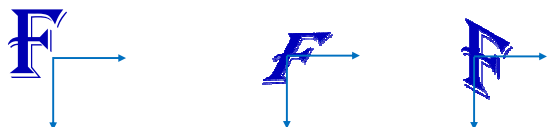
31.01.2012

INF2310

8

## Eksempler på enkle transformasjoner - II

Transformasjon	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	Uttrykk
Translasjon	1	0	$\Delta x$	0	1	$\Delta y$	$x' = x + \Delta x$ $y' = y + \Delta y$
Horizontal "shear" med faktor $s_1$	1	$s_1$	0	0	1	0	$x' = x + s_1 y$ $y' = y$
Vertikal "shear" med faktor $s_2$	1	0	0	$s_2$	1	0	$x' = x$ $y' = s_2 x + y$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

31.01.2012

INF2310

9

## Sammenslåing av affine transformasjoner

$$\left[ \text{transl.} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \quad \left[ \text{rot.} \right] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \text{rot.} \right] \left[ \text{transl.} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \text{transl. \& rot.} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix}$$

(etc.)

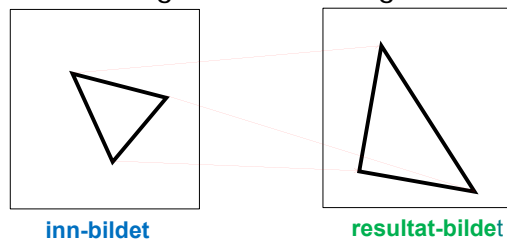
31.01.2012

INF2310

10

## Alternativ måte å finne transformasjonskoeffisientene

- En affin transformasjon kan bestemmes ved å spesifisere tre punkter før og etter avbildningen



- Med disse tre punktparene kan vi finne de 6 koeffisientene;  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$
- Med flere enn 3 punktpar velger man den transformasjonen som minimerer (kvadrat-)feilen summert over alle punktene (mer om dette senere)

31.01.2012

INF2310

11

## Transformasjoner med høyere ordens polynomer

- Bilineære transformasjoner beskrives ved:

$$x' = a_0 x + a_1 y + a_2 + a_3 xy$$

$$y' = b_0 x + b_1 y + b_2 + b_3 xy$$

- Kvadratiske transformasjoner:

$$x' = a_0 x + a_1 y + a_2 + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 y^2$$

$$y' = b_0 x + b_1 y + b_2 + b_3 xy + b_4 x^2 + b_5 y^2$$

- Polynomer av høyere orden gir muligheter for å korrigere for mer «komplekse» avbildningsfeil

31.01.2012

INF2310

12

## Resampling

I illustrasjonen:  
Har kun sample/piksel-  
verdier  
der linjene krysser

Vil gjerne ha bildet samplet  
på et rektangulært grid  
-> resample

Ikke glem at sammenhengen  
mellom romlig oppløsning og  
samplingsrate  
(samplingsteoremet)  
fortsatt gjelder!

31.01.2012

INF2310

13

## Forlengs-mapping

for all  $x', y'$  do  $g(x', y') = 0$

$a_0 = \cos \theta$   
 $a_1 = -\sin \theta$   
 $b_0 = \sin \theta$   
 $b_1 = \cos \theta$

for all  $x, y$  do

$x' = \text{round}(a_0 x + a_1 y)$   
 $y' = \text{round}(b_0 x + b_1 y)$   
if  $(x', y')$  inside  $g$   
 $g(x', y') = f(x, y)$   
end

Eksempel:

Enkel rotasjon ved transformen:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Flytter de posisjonstransformerte  
pikselposisjonene  
til nærmeste pikselposisjon i utbildet.

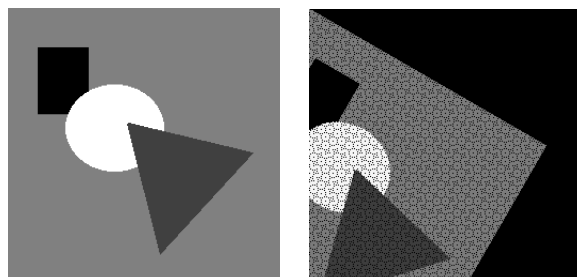
Skriver innbildets  $f(x, y)$  inn i  $g(x', y')$

31.01.2012

INF2310

14

## Forlengs-mapping, forts.



Problemer:

- Ikke alle utpikslar får verdi (hullene i bildet)
- Unødig beregning av pikselkoordinater som allikevel ikke blir synlige (ender utenfor utbildet)
- Samme utbilde-piksel kan bli satt flere ganger

31.01.2012

INF2310

15

## Baklengs-mapping

$a_0 = \cos(-\theta)$   
 $a_1 = -\sin(-\theta)$   
 $b_0 = \sin(-\theta)$   
 $b_1 = \cos(-\theta)$

for alle  $x', y'$  do

$x = \text{round}(a_0 x' + a_1 y')$   
 $y = \text{round}(b_0 x' + b_1 y')$   
if  $(x, y)$  inside  $f$   
 $g(x', y') = f(x, y)$   
else  
 $g(x', y') = 0$   
end

Samme eksempel som  
ved forlengs-mappingen.

NB:  $(x, y)$  rotert med  $\theta$  ga  $(x', y')$   
 $(x', y')$  rotert med  $-\theta$  gir  $(x, y)$

Resample bildet.  
Her; for hvert utbilde-piksel,  
invers-transformér,  
og velg nærmeste piksel  
fra innbildet.

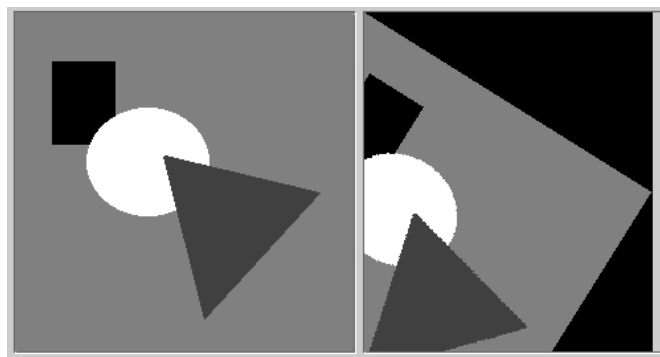
For hver pikselposisjon i ut-bildet:  
Hent pikselverdi fra innbildet.

31.01.2012

INF2310

16

## Baklengs-mapping, forts.

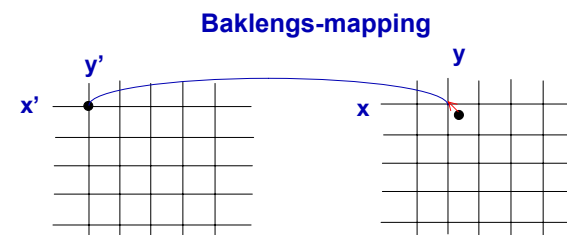


31.01.2012

INF2310

17

## Interpolasjon : Hvilken intensitetsverdi skal pikselen få?



Nullte-ordens interpolasjon eller nærmeste nabo-interpolasjon  
 $g(x',y') = f(\text{round}(x), \text{round}(y))$

=> Intensiteten til  $g(x',y')$  blir en av verdiene fra  $f$

31.01.2012

INF2310

18

## Bilineær interpolasjon - I

- Anta at vi kjenner gråtoneverdien i fire nabo-punkter
- Ønsker å estimere gråtonen i et mellomliggende punkt.
- Gjør to lineære interpolasjoner i én retning først, f.eks i x-retning:

$$f(x, y_1) \approx \frac{(x_2 - x)}{(x_2 - x_1)} f(x_1, y_1) + \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} f(x_2, y_1)$$

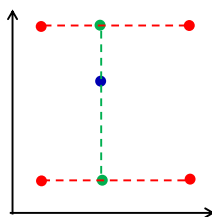
og

$$f(x, y_2) \approx \frac{(x_2 - x)}{(x_2 - x_1)} f(x_1, y_2) + \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} f(x_2, y_2)$$

- Så én interpolasjon i ortogonal retning:

$$f(x, y) \approx \frac{(y_2 - y)}{(y_2 - y_1)} f(x, y_1) + \frac{(y - y_1)}{(y_2 - y_1)} f(x, y_2)$$

- Resultatet er uavhengig av rekkefølgen.
- Den interpolerte flaten er kvadratisk (krum), men lineær langs linjer parallelle med aksene.



31.01.2012

INF2310

19

## Bilineær interpolasjon - II

- Bilineær interpolasjon når  $f$  er kjent i  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$  og  $(1,1)$ :

$$f(x, y) \approx (1 - y)f(x, 0) + y f(x, 1)$$

der

$$f(x, 0) \approx (1 - x) f(0, 0) + x f(1, 0)$$

og

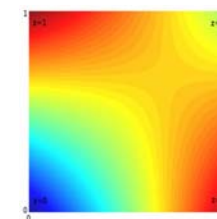
$$f(x, 1) \approx (1 - x) f(0, 1) + x f(1, 1)$$

$$\Rightarrow f(x, y) \approx (1 - x)(1 - y) f(0, 0) + x(1 - y) f(1, 0) + (1 - x)y f(0, 1) + x y f(1, 1)$$

- Eller i matrisenotasjon:

$$f(x, y) \approx \begin{bmatrix} 1 - x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) \\ f(1,0) & f(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - y \\ y \end{bmatrix}$$

- Utvidelsen fra 2D til 3D kalles *trilineær* interpolasjon, og er en lineær interpolasjon mellom resultatene av to bilineære interpolasjoner.



31.01.2012

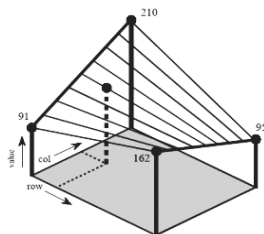
INF2310

20

## Første-ordens interpolasjon/ bilineær interpolasjon

- Intensiteten blir en kombinasjon av pikselverdiene i de fire pikslene som omgir punktet
- Bidragene fra hver av disse vektes med avstanden
- Interpolere i x- og y-intervallene mellom 0 og 1:

$$f(x, y) \approx f(0, 0)(1 - x)(1 - y) + f(1, 0)x(1 - y) + f(0, 1)(1 - x)y + f(1, 1)xy$$



### Praktisk algoritme:

$$x_0 = \text{floor}(x), y_0 = \text{floor}(y)$$

$$x_1 = \text{ceil}(x), y_1 = \text{ceil}(y)$$

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\Delta y = y - y_0$$

$$p = f(x_0, y_0) + [f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)] \Delta x$$

$$q = f(x_0, y_1) + [f(x_1, y_1) - f(x_0, y_1)] \Delta x$$

$$f(x', y') = p + (q - p) \Delta y$$

31.01.2012

INF2310

21

## Bilineær interpolasjon, eksempel



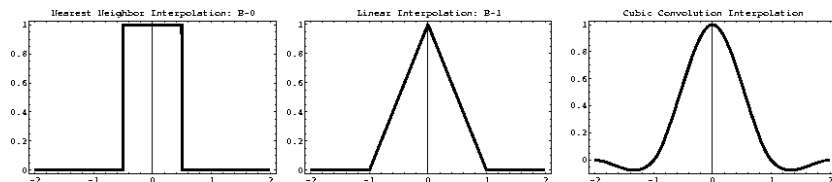
31.01.2012

INF2310

22

## Høyere-ordens interpolasjon

- Bi-kubisk interpolasjon benytter et naboskap på 4x4 piksler
- Interpolasjon kan sees på som (kontinuerlig) konvolusjon med bestemte filtre.



(1D-varianter av nærmeste nabo, lineær og kubisk interpolasjonskjerne)

31.01.2012

INF2310

23

## Interpolasjonsfunksjoner i praksis

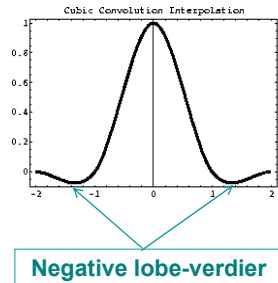
- Nærmeste nabo:
  - Taggete kanter og større totalfeil.
  - Hver ut-piksel har en verdi fra inn-bildet:
    - Ingen rekvantisering er nødvendig:
      - en fordel hvis man vil bevare visse statistiske egenskaper i bildet (eller hvis bildet er segmenert i ulike klasser)
- Bilineær interpolasjon og høyere-ordens interpolasjon:
  - er mer regnekrevende
- Bi-kubisk interpolasjon:
  - gir skarpere bilder og har kontinuerlige deriverte
  - Men er (mye) mer regnekrevende enn bilineær interpolasjon,
  - og kan gi opphav til "kant-glorie-effekter"

31.01.2012

INF2310

24

## "Kant-glorie-effekter" / "ringing" ved kubisk interpolasjon



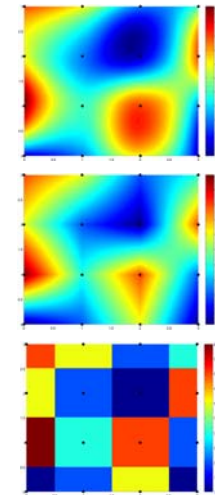
31.01.2012

INF2310

25

## Interpolasjon – en sammenligning

- Bi-kubisk interpolasjon gir glattere flater enn bilineær, men er mer regnekrevende; bruker  $4 \times 4 = 16$  piksler.
- Bi-lineær interpolasjon bruker  $2 \times 2 = 4$  piksler. Derivert er ikke kontinuerlig over flaten.
- Nærmeste nabo gir 2D trappefunksjon, med diskontinuitet midt mellom punktene.

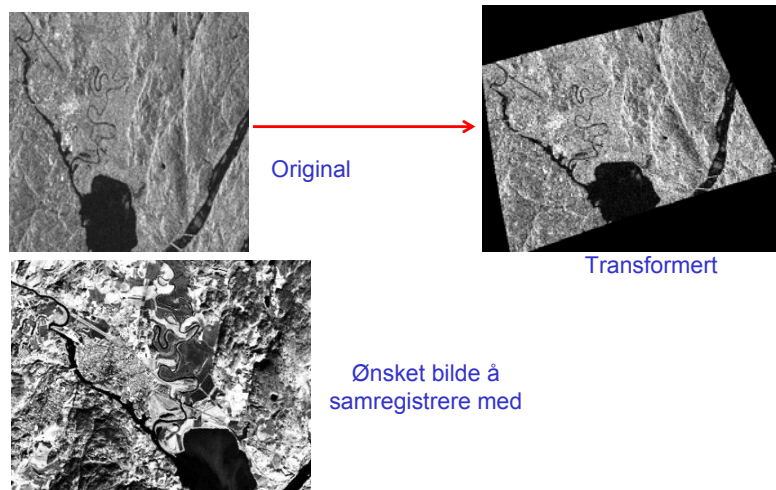


31.01.2012

INF2310

26

## Bruk av geometriske transformasjoner: Samregistrering av bilder



31.01.2012

INF2310

27

## Samregistrering II

- Hvis bildenes kartkoordinater er kjent, benyttes til å finne transformkoeffisientene.
- Hvis ikke, brukes gjerne kontrollpunkter:
  - Kontrollpunkter plukkes ut manuelt
    - lett identifiserbare punkter (landemerker) i begge bildene.
  - Affine transformasjoner er unikt spesifisert med 3 punktpar
    - (bestemmer  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ )
  - Bi-lineære med 4 punktpar
  - Bi-kvadratiske med 6 punktpar
  - Bi-kubiske med 16 punktpar, ...
- I praksis velges ofte mange flere punkter for å få en god transformasjon (se neste side)

31.01.2012

INF2310

28

## Samregistrering III

- Ved flere kontrollpunkter enn nødvendig for å bestemme transformkoeffisientene, benyttes ofte kvadratfeilen som minimeringskriterium.
- Gitt M kontrollpunkter  $(x_i, y_i), (x_i^r, y_i^r)$  («r» indikerer referansebildet) og anta mappingen  $(x_i, y_i) \rightarrow (x_i^r, y_i^r)$
- Polynomkoeffisientene settes til de som minimerer kvadratfeilen mellom kontrollpunktets sanne koordinater  $(x_i^r, y_i^r)$  og de transformerte koordinatene  $(x_i', y_i')$ :

$$J = \sum_{i=1}^M (x_i' - x_i^r)^2 + (y_i' - y_i^r)^2$$

- “Enkel” lineær algebra benyttes til å finne eksakt løsning.

## Samregistrering IV (Minimere kvadratfeilen)

$$J = \sum_{i=1}^M (x_i' - x_i^r)^2 + (y_i' - y_i^r)^2 = J_x + J_y \quad J_x = \sum_{i=1}^M (x_i' - x_i^r)^2$$

$$\begin{matrix} \text{d} & \text{G} & \text{a} \\ \begin{bmatrix} x_1^r \\ x_2^r \\ \vdots \\ x_M^r \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_M & y_M & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

G og a er her basert på en affin transform

Vi er på jakt etter koeffisienten e i denne a-vektoren

$$J_x = (d - Ga)^T (d - Ga) = d^T d + a^T G^T G a - 2a^T G^T d$$

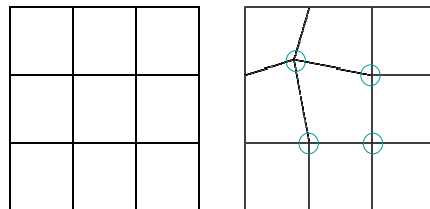
$$\frac{\partial J_x}{\partial a^T} = 2G^T G a - 2G^T d = 0 \quad \Rightarrow \quad a = (G^T G)^{-1} G^T d$$

En enkelt matrise

## Stykkevis transform

- Resampling: Forskjellige transform for ulike deler av bildet
- Oftest bestemmes et kontrollgrid som styrer hvordan de ulike delene skal endres
- Bilineær transformasjon benyttes ofte:
 
$$x' = a_0 x y + a_1 x + a_2 y + a_3$$

$$y' = b_0 x y + b_1 x + b_2 y + b_3$$



Hver firkants fire hjørnepunkter bestemmer entydig den bilineære transformen

## Oppsummering

- Transform/endring av pikslens posisjoner (x-,y-koordinater)
  - Affine transform
- Resampling:
  - Forlengs- og baklengsmapping
- Interpolasjonsmetoder for å bestemme gråtonene til de geometrisk transformerte pikslene:
  - Nærmeste nabo-interpolasjon
  - Bilineær interpolasjon
  - Høyere-ordens interpolasjoner
- Bruk av geometriske operasjoner til å samregistrere bilder
  - Kontrollpunkter
  - Løs ligningssett som minimerer kvadratfeil