

Introduksjon/motivasjon I

INF2310 – 6. mars 2012

FORELESNING 8: FOURIER-TRANSFORM I

I dag: Grunnlaget

- Grunnlaget og intuisjonen i Fourier-analyse
- 2D diskret Fourier-transform (DFT)

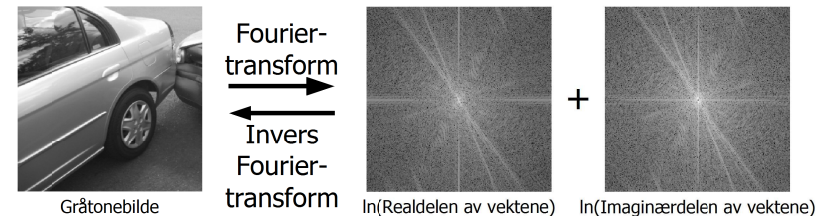
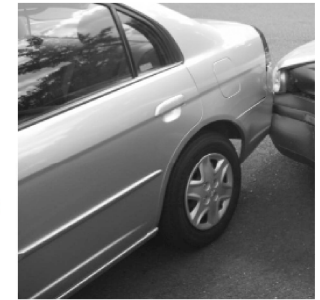
I morgen: Matematisk fundament

- Forklare og bevise 2D DFT som et ortogonalt basisskifte

Neste tirsdag: Anvendelse

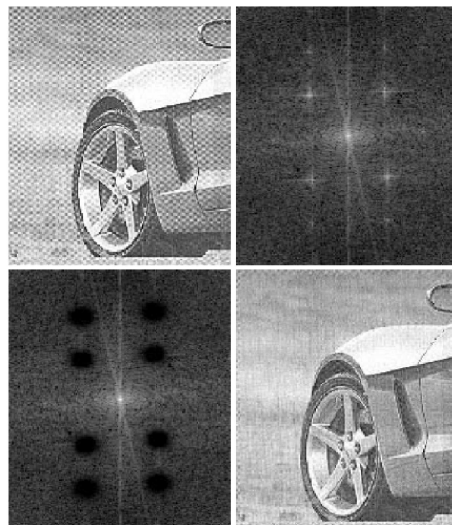
- Konvolusjonsteoremet
- Filtre og filtrering i frekvensdomenet

- Et gråtonebilde representeres vanligvis som et rutenett av gråtoneintensiteter
- Dette er bare én av mange måter
- Grunnlaget for Fourier-analyse:
 - Representer bildet som en *vektet sum* av sinuser og cosinuser med forskjellige frekvenser
 - Det kan vises at en slik representasjon er *entydig*, det finnes ett og bare ett sett av vektorer for hver bildet



Introduksjon/motivasjon II

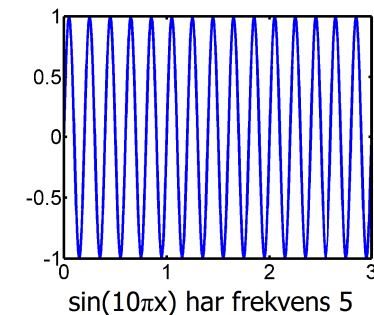
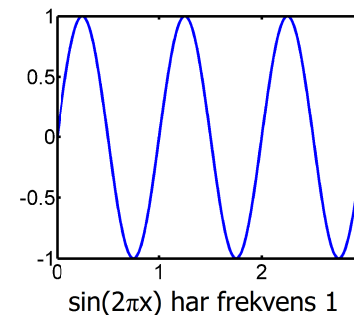
- Et slikt representasjonsskifte kalles et *basisskifte* i matematikken
- Flere grunner til å skifte til Fourier-basisen, blant annet:
 - Filtrering av bilder
 - Fjerne periodisk støy
 - Analyse av lineære filtre (konvolusjonsteoremet)
 - Rask implementasjon av større konvolusjonsfiltre
 - Kompresjon



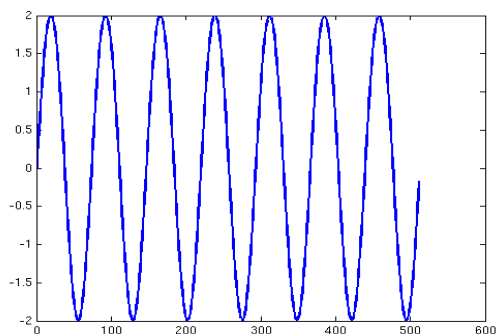
Fjerning av periodisk støy, fig. 4.64 i DIP

Bakgrunn: Frekvens

- *Frekvens* betegner ofte antall svinginger eller forekomster (av en gjentakende hendelse) per tidsenhet
 - Kan også kalles *tidsfrekvens* (eng. *temporal frequency*)
- Slik frekvens er dermed tilknyttet et tidsintervall og *ikke et tidspunkt*
- Frekvens er en viktig parameter i de trigonometriske funksjonene sinus og cosinus



Bakgrunn: Samplet sinus i 1D



I dette eksemplet er
 $A=2$, $u=7$, $N=512$ og $\varphi=0$

En generell samplet sinus-funksjon kan skrives som:

$$y(t) = A \sin(2\pi ut/N + \varphi)$$

t : tid; $0, 1, \dots, N-1$
 A : amplitude
 u : antall hele perioder*
 N : antall sampler
 φ : horisontal forskyvning (fase)

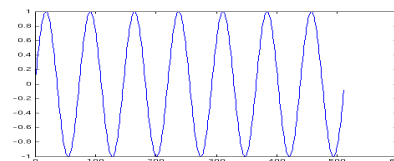
* u er også frekvensen hvis tids-enheten er hele tidsintervallet

Bakgrunn: Sinus og cosinus

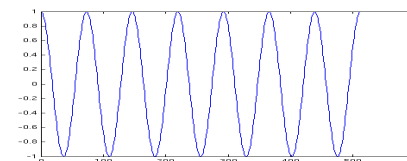
Sinus og cosinus skilles kun ved et *faseskift*, en horisontal forskyvning

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



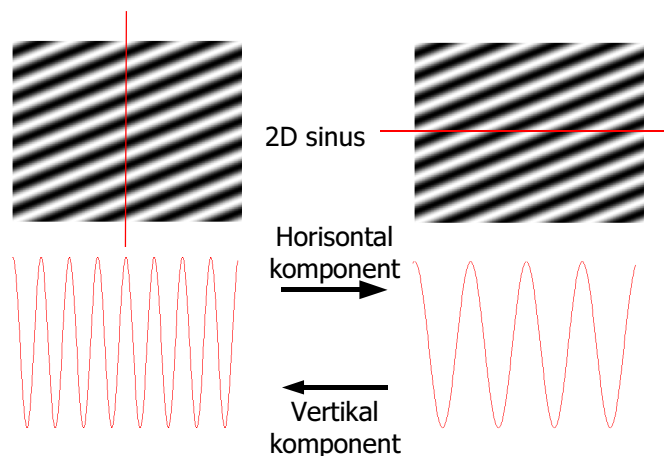
$$\sin(14\pi t/N) = \cos(14\pi t/N - \pi/2)$$



$$\cos(14\pi t/N) = \sin(14\pi t/N + \pi/2)$$

Bakgrunn: Sinus i 2D

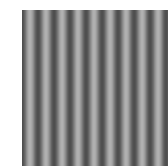
- Flerdimensjonale sinus-funksjoner har én frekvenskomponent for hver dimensjon



Bakgrunn: Samplet sinus i 2D

$$f(x, y) = A \sin\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right) + \varphi\right)$$

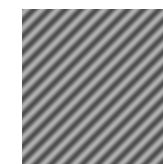
x : vertikal romlig koordinat; $0, 1, \dots, M-1$
 y : horisontal romlig koordinat; $0, 1, \dots, N-1$
 A : amplitude
 u : antall hele perioder vertikalt*
 v : antall hele perioder horisontalt*
 M : antall sampler vertikalt
 N : antall sampler horisontalt
 φ : faseforskyvning



$A=50$, $u=0$, $v=10$



$A=20$, $u=10$, $v=0$



$A=50$, $u=10$, $v=10$



$A=100$, $u=10$, $v=5$



$A=100$, $u=5$, $v=15$

* u og v er også hhv. vertikal og horisontal frekvens hvis rom-enheten er hele bildet

I eksemplene vises 0 som grått, -127 som sort, og 127 som hvit. φ er 0 i alle disse eksemplene.

Bakgrunn: Samplet sinus i 2D

- I bildesammenheng betegner aksene ofte romlige koordinater
 - Den flerdimensjonal frekvensen kalles derfor en *romlig* frekvens
- Romlig frekvens er tilknyttet et bildeutsnitt og *ikke et bildepunkt*
- Et bildeutsnitt kan inkludere flere frekvenser:

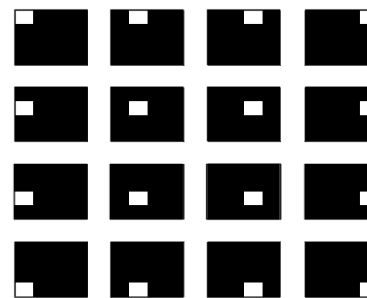


- Summen av to bilder med lik frekvens, men forskjellig fase, er et bilde med samme frekvens, men ny fase



Bakgrunn: Standardbasis for matriser

Eksempel: Standardbasis for 4x4



- Et gråtonebilde representeres vanligvis som et rutenett av gråtoneintensiteter
- Dette tilsvarer å bruke den såkalte *standardbasisen* for matriser
- Eksempel: 4x4-gråtonebilder
 - Standardbasisen er de 16 matrisene vist til venstre, der sort er 0 og hvit er 1
 - En vektet sum av disse matrisene kan unikt representere enhver 4x4-matrise/gråtonebilde

Undereksempel:

1	3	2	1
5	4	5	3
4	1	1	2
2	3	2	6

$$= 1 * \begin{matrix} \blacksquare & & & \\ & \blacksquare & & \\ & & \blacksquare & \\ & & & \blacksquare \end{matrix} + 3 * \begin{matrix} \blacksquare & \blacksquare & & \\ & \blacksquare & & \\ & & \blacksquare & \\ & & & \blacksquare \end{matrix} + \dots + 6 * \begin{matrix} & & & \blacksquare \\ & & & \\ & & & \\ & & & \blacksquare \end{matrix}$$

2D diskret Fourier-transform (DFT) I

2D DFT av enhver $M \times N$ matrise (til og med kompleks!) er definert som:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

for $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$ og $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$

- x og y er hhv. vertikal og horisontal koordinat
- u og v er hhv. vertikal og horisontal frekvens
- $j = \sqrt{-1}$ er den imaginære enheten (ofte betegnet i i matematikken)
- Merk:
 - $F(u, v)$ er (generelt) et komplekst tall
 - $F(u, v)$ er en vektet sum av *alle* gråtoneintensitetene i bildet
- 2D invers diskret Fourier-transform (IDFT) er definert som:

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

og vil *alltid perfekt reversere* basisskifte gjort av 2D DFT

2D diskret Fourier-transform (DFT) II

- Definisjonen av 2D DFT kan skrives ut ved bruk av Eulers formel; $e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \left(\cos \left[2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right] + j \sin \left[-2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right] \right)$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos \left[2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right] + \dots$$

$$\dots + j \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \sin \left[-2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right]$$

2D diskret Fourier-transform (DFT) III

- Altså er:

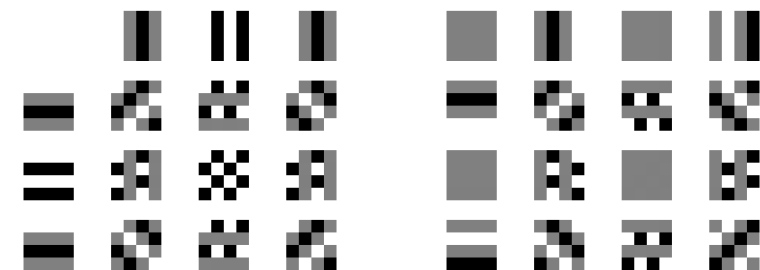
$$\text{real}(F(u, v)) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos \left[2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right]$$

$$\text{imag}(F(u, v)) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \sin \left[-2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right]$$

- Dermed kan f.eks. realdelen til $F(u, v)$ beregnes ved å punktvis multiplisere gråtonebildet med et bilde av en cosinus-funksjon og summere alle de resulterende verdiene

Eksempel på basisskifte ved 2D DFT I

- Cosinus- og sinus-bildene for 4x4-bilder er:



Cosinus-bildene

Sinus-bildene

(i bildene er sort -1, grått er 0 og hvitt er 1)

- Summen av punktproduktet mellom et vilkårlig 4x4-gråtonebilde og cosinus-bildene skal gi realdelene til 2D DFT, tilsvarende skal sinus-bildene gi imaginærdelene

Eksempel på basisskifte ved 2D DFT II

- La oss finne 2D DFT av vårt tidligere eksempelbilde:

$$\text{real}(F(0,0)) = \text{sum} \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = 45$$

$$\text{imag}(F(0,0)) = \text{sum} \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

- Altså er $F(0,0) = 45$

Eksempel på basisskifte ved 2D DFT III

- La oss finne 2D DFT av vårt tidligere eksempelbilde:

$$\text{real}(F(0,1)) = \text{sum} \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 2$$

$$\text{imag}(F(0,1)) = \text{sum} \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 1$$

- Altså er $F(0,1) = 2+i$

Eksempel på basisskifte ved 2D DFT IV

- Og slik kan man fortsette, helt til det siste frekvensen:

- $$\text{real}(F(3,3)) = \text{sum} \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = -8$$

- $$\text{imag}(F(3,3)) = \text{sum} \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = 3$$

- Altså er $F(3,3) = -8+3i$

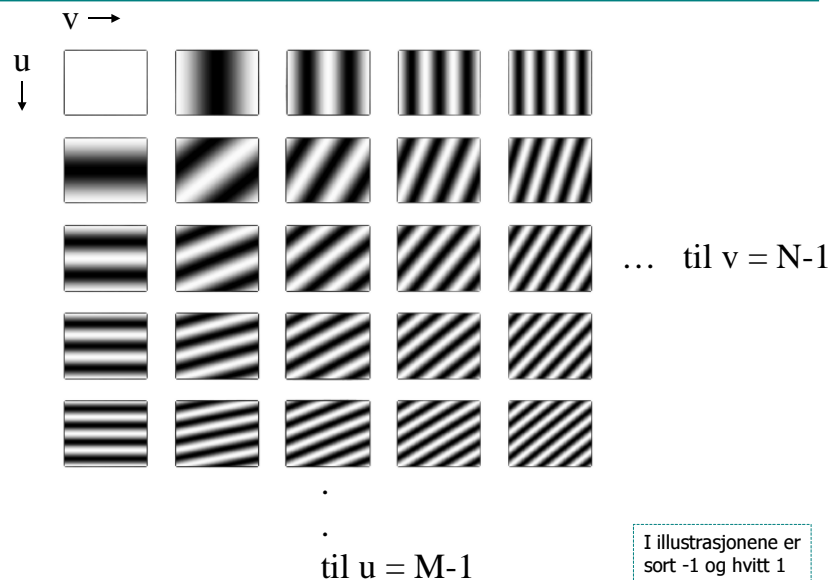
Eksempel på basisskifte ved 2D DFT V

- Totalt får man at:

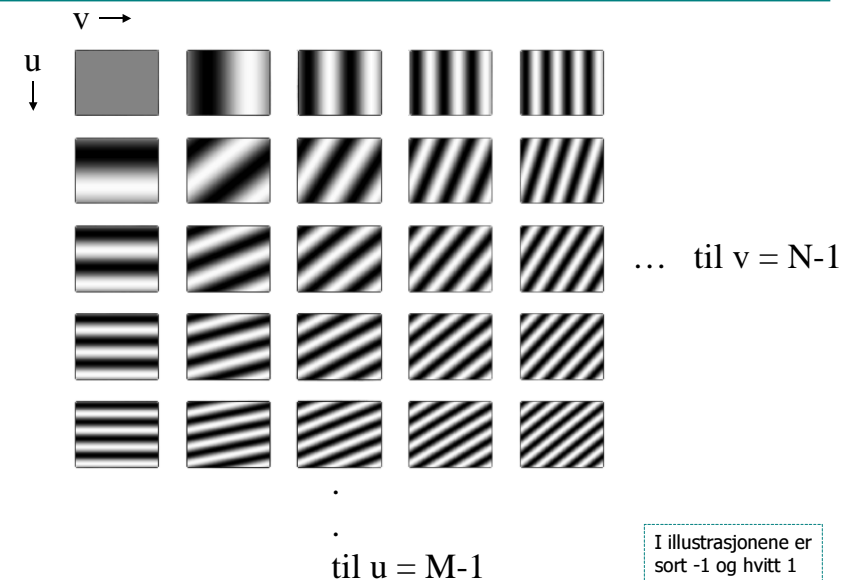
$$\text{real}(F) = \begin{bmatrix} 45 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -8 & -3 & 0 \\ -15 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \end{bmatrix}, \quad \text{imag}(F) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & -8 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

- 2D DFT av $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ er altså $\begin{bmatrix} 45 & 2+i & -1 & 2-i \\ -1-4i & -8-3i & -3-8i & 3i \\ -15 & 2-3i & 3 & 2+3i \\ -1+4i & -3i & -3+8i & -8+3i \end{bmatrix}$

Cosinus-bilder for større bilder

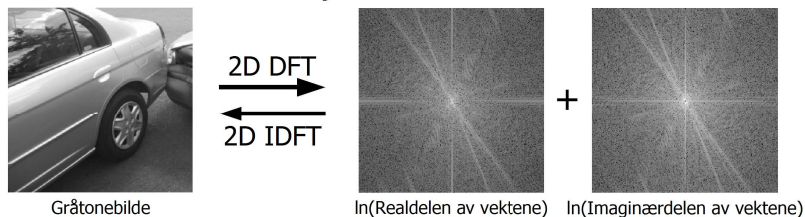


Sinus-bilder for større bilder

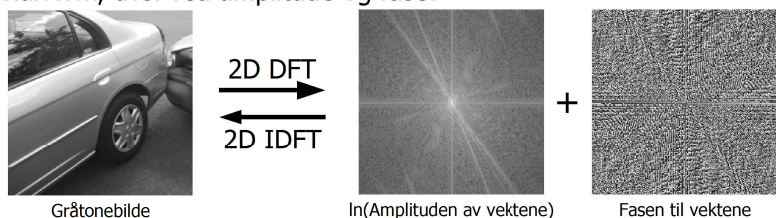


2D DFT på polarform I

- Den visuelt intuitive informasjonen i 2D DFT er de store verdiene:



- Denne kan konsentreres ved å representere de komplekse tallene på polarform, dvs. ved amplitude og fase:



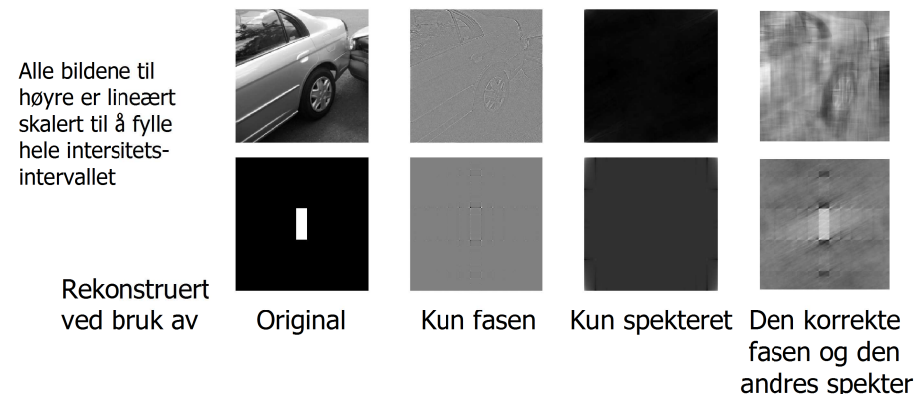
6. mars 2012

INF2310

21 / 42

2D DFT på polarform II

- Magnituden av en 2D DFT kalles *Fourier-spekteret*
 - Beskriver hvilke frekvenser gråtonebildet inneholder
 - Sterkt knyttet til intuisjonen i Fourier-analyse
- For å rekonstruere det opprinnelige bildet er derimot fasen viktigere:

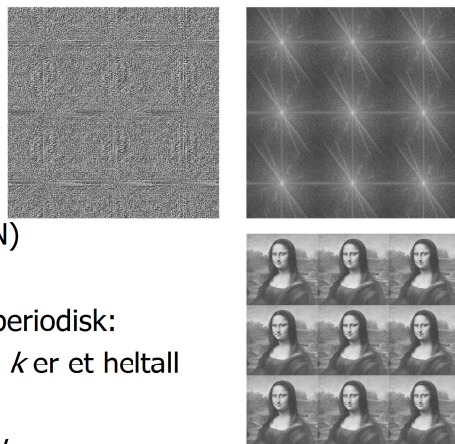


6. mars 2012

22 / 42

Egenskaper ved 2D DFT I

- $F(u,v)$ er periodisk:
 - $F(u,v) = F(u+kM, v+kN)$ der k er et heltall; $k \in \mathbb{Z}$
 - $\Rightarrow F(u,v) = F(u+M, v) = F(u, v+N) = F(u+M, v+N)$
- Bildet antas indirekte å være periodisk:
 - $f(x,y) = f(x+kM, y+kN)$ der k er et heltall
- $F(u,v)$ er *konjugert symmetrisk* hvis (og bare hvis) $f(x,y)$ er reell
 - Konjugert symmetri: $F(u,v) = F^*(-u,-v)$
 - $\Rightarrow |F(u,v)| = |F(-u,-v)|$



6. mars 2012

INF2310

23 / 42

Egenskaper ved 2D DFT II

- $F(0,0)$ er proporsjonal med middelverdien i bildet:

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi(0*x/M + 0*y/N)} = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) = MN \bar{f}(x,y)$$

- Shift-teoremet (vises ved innsetning i definisjonene):
 - $f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v) e^{-j2\pi(ux_0/M + vy_0/N)}$
 - $f(x,y) e^{j2\pi(ux_0/M + vy_0/N)} \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$
- 2D DFT er separabelt i 1D DFT-er; kan beregnes som 1D DFT-ene kolonnevis (alt. radvis) av 1D DFT-ene radvis (alt. kolonnevis)
 - En essensiell egenskap for den praktiske anvendelsen (sammen med FFT) for større bilder

6. mars 2012

INF2310

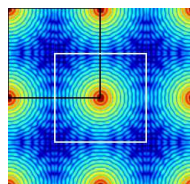
24 / 42

Framvisning av Fourier-spekteret I

- Siden $F(u,v)$ er periodisk med periode (M,N) , er det vanlig å forskyve spekteret slik at origo ($u=v=0$) ligger midt i bildet
 - Bytte kvadranter
 - eller pre-multiplisere $f(x,y)$ med $(-1)^{x+y}$ (følge av shift-teoremet)



$f(x,y)$
 $f(x,y)$: billedomenet



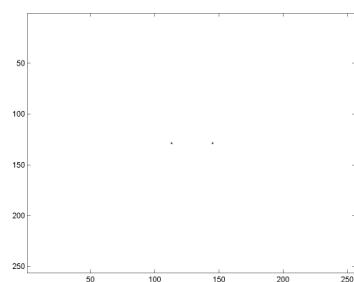
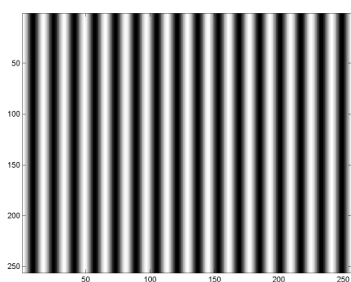
$|F(u,v)|$
 $F(u,v)$: frekvensdomenet
 $|F(u,v)|$ er Fourier-spekteret til $f(x,y)$
 $|F(u,v)|^2$ kalles *energisppekteret* til $f(x,y)$

Framvisning av Fourier-spekteret II

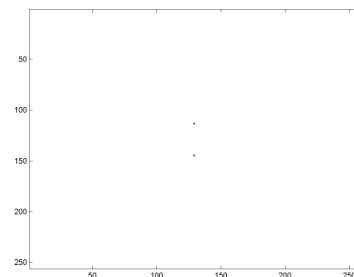
Skalering av verdier:

- Ofte stor dynamikk i $|F(u,v)|$ (kan ha høye verdier)
- Vanlig å benytte logaritmisk skala
 - $g(u,v) = C \log(|F(u,v)| + 1)$, der C velges slik at man får gråtoner i det ønskede intervallet, f.eks. 0-255 (8 bit)
 - Eksempel på bruk av *logaritmisk mapping*, omtalt i forelesning 4; *Gråtone-transformasjoner*

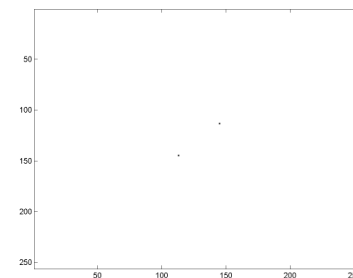
Eksempel: Fourier-spekteret av «rette» frekvenser



<- Fourier-spekter
 Hvitt = 0
 Svart = maksimal-intensiteten

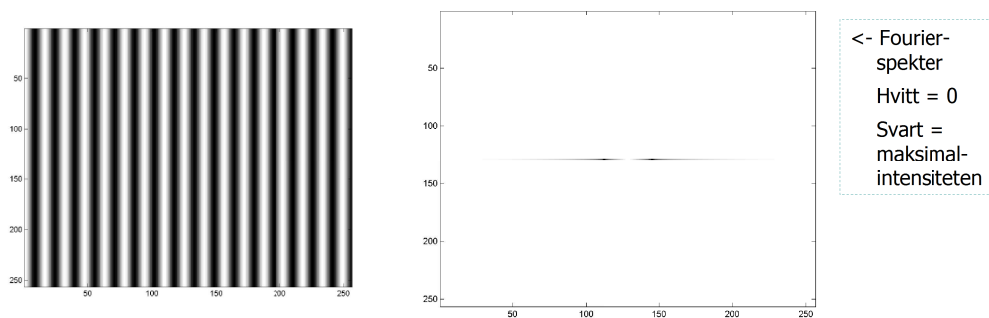


Eksempel: Fourier-spekteret av «skrå» frekvenser

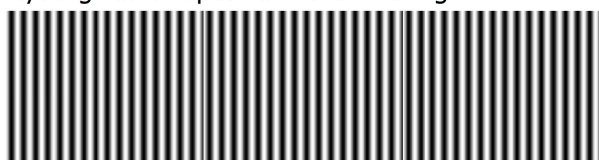


<- Fourier-spekter
 Hvitt = 0
 Svart = maksimal-intensiteten

Eksempel: Fourier-spekteret ved diskontinuitet I



- Diskontinuitet oppstår når bildet ikke inneholder et helt antall perioder
- Man ser den tydelig ved å repetere bildet i retningen for diskontinuiteten:

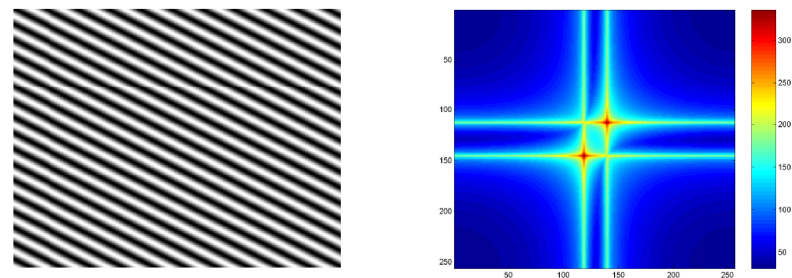


6. mars 2012

INF2310

29 / 42

Eksempel: Fourier-spekteret ved diskontinuitet II



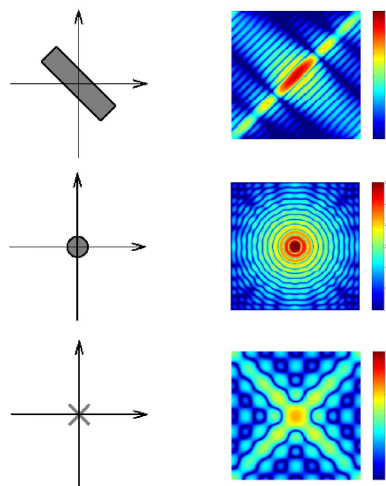
6. mars 2012

INF2310

30 / 42

Eksempel: Fourier-spekteret av enkle strukturer

Examples of the Fourier transform for other simple shapes are shown be

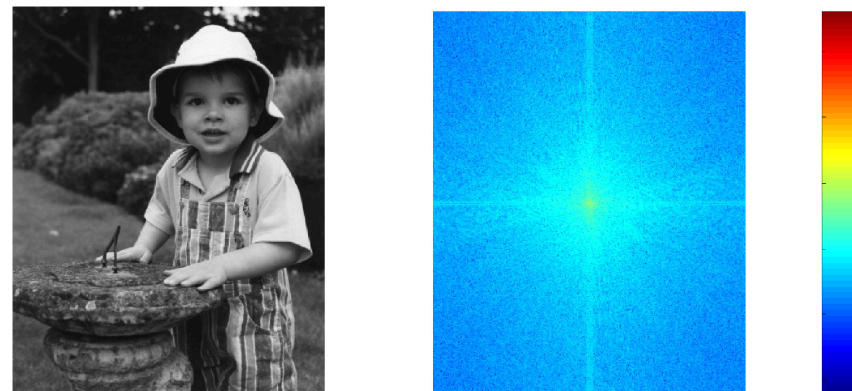


6. mars 2012

INF2310

31 / 42

Eksempel: Fourier-spekteret av «vanlig» bilde

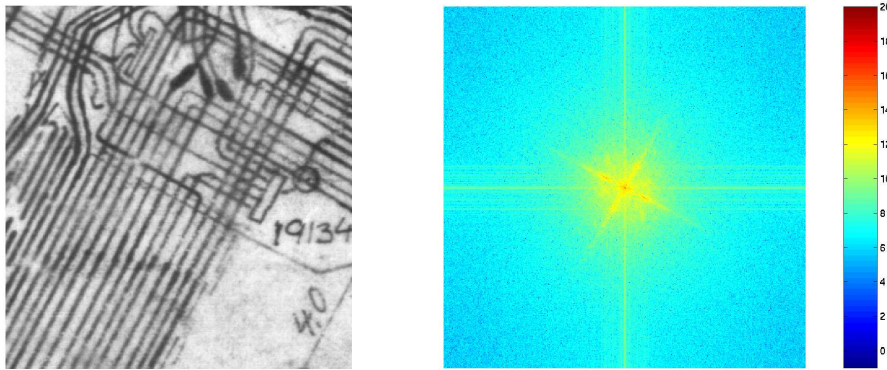


6. mars 2012

INF2310

32 / 42

Eksempel: Fourier-spekteret av retningsdominant bilde

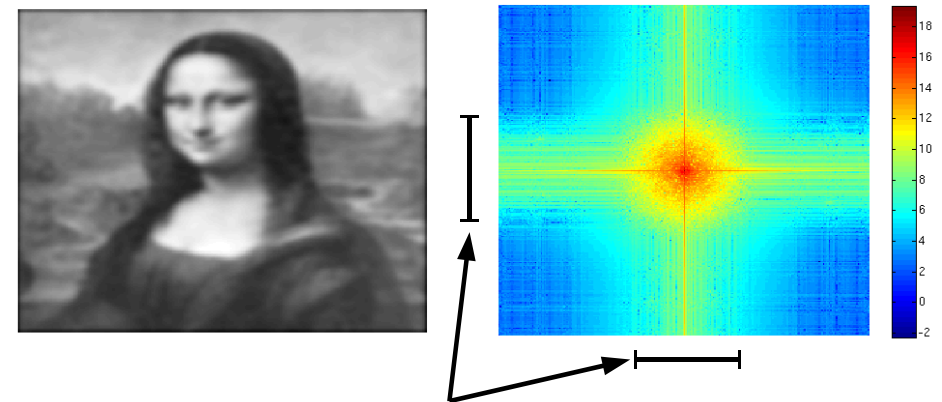


6. mars 2012

INF2310

33 / 42

Eksempel: Fourier-spekteret av bilde med smal båndbredde



Så å si all *energien* er i dette smale *båndet* (både vertikalt og horisontalt)

- Et område av Fourier-spekteret kalles ofte et *bånd*
- *Energien* til et bilde er summen av alle elementene i energispekteret

6. mars 2012

INF2310

34 / 42

Noen generelle observasjoner om Fourier-spektre

- De lave frekvensene (små u og v) inneholder vanligvis den meste av Fourier-spekterets energi
- Vanligvis noe energi langs u - og v -aksene
 - At bildet er implisitt antatt å være periodisk forårsaker vanligvis diskontinuiteter langs bildekantene og dermed større vertikale og horisontale bidrag
- Tommelfingerregler om strukturer:
 - Smal struktur i bildet \Leftrightarrow Bred struktur i Fourier-spekteret
 - Bred struktur i bildet \Leftrightarrow Smal struktur i Fourier-spekteret
 - \Rightarrow Linjestruktur i retning θ i bildet forårsaker linjestruktur i retning $\theta \pm 90^\circ$ (normalt på) i Fourier-spekteret

6. mars 2012

INF2310

35 / 42

Fourier-spektre og bildekant

Skarp bildekant:

- Vektet sum av mange \sin/\cos med forskjellige frekvenser
- Mange positive koeffisienter i Fourier-spekteret
- Bredt bånd i Fourier-spekteret



Bilde

Fourier-spekter

«Blurret» (alt. flytende) bildekant:

- Vektet sum av færre \sin/\cos
- Færre positive koeffisienter i Fourier-spekteret
- Smalere bånd i Fourier-spekteret



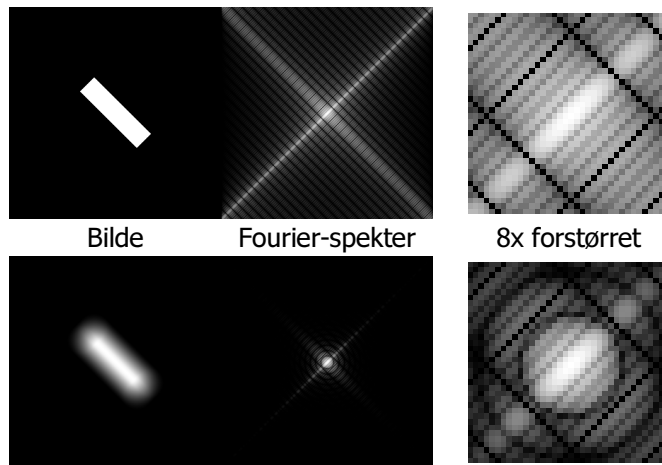
6. mars 2012

INF2310

36 / 42

Fourier-spektre og strukturers kanter

- Tommelfingerregelen «smal/bred struktur i bildet tilsvarer bred/smål struktur i Fourier-spekteret» er akseptabel uavhengig av kantskarpheten
- Blurringens negative påvirkning på koeffisientene i Fourier-spekteret øker med frekvensen



Implementasjon av 2D DFT

- La $f(x,y)$ være et $M \times N$ gråtonebildet
- Beregne $F(u,v)$ for én (u,v) ved bruk av definisjonen: $O(MN)$
- Beregne hele 2D DFT: $O(M^2N^2)$
- *Fast Fourier-transform* (FFT) er en algoritme for rask beregning av DFT
 - Bruker signaler (eller delsignaler) med lengde 2^k der k er heltallig
 - Har orden $O(N \log_2 N)$ for et signal $f(x)$ av lengde N
- 2D FFT beregner 2D DFT
 - Beregner først DFT-ene av hver rad av gråtonebildet (med FFT) og deretter av hver kolonne av matrisen med DFT-radene (med FFT)
 - Har orden $O(MN \log_2(MN))$

Anvendelser av 2D DFT

- Filtrering – mer om neste tirsdag
 - Analyse av konvolusjonsfiltre
 - Design av lineære filtre med bestemte frekvenssegenskaper
 - Fjerne/dempe visse frekvenser (lavpass, høypass, båndpass)
 - Fjerne periodisk støy
 - Rask implementasjon av større konvolusjonsfiltre
- Bildeanalyse
 - Karakterisere objekter eller tekstur
- Kompresjon
 - Sterkt relatert til grunnpilaren i JPEG

Eksempel: Fjerne periodisk støy

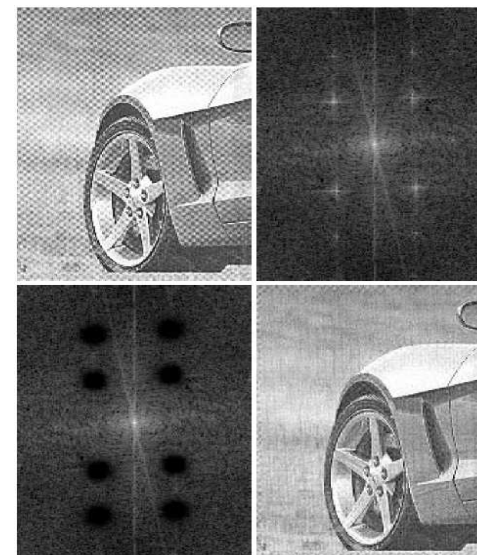


Fig. 4.64 i DIP

2D DFT og Matlab/Octave

- `F = fft2(f);` % Beregn 2D DFT (ved bruk av 2D FFT)
- `f = ifft2(F);` % Beregn 2D IDFT (ved bruk av 2D IFFT)
- `F_r = real(F);` % Realdelen, altså cosinus-bildenes resultat
- `F_i = imag(F);` % Imaginærdelen, altså sinus-bildenes resultat
- `F_r(u+1,v+1);` % Summen av punktproduktet mellom gråtonebildet
 % og cosinus-bildet med frekvens (u,v)
- `F_r(1,1);` % (0,0)-frekvens, ofte kalt *DC-komponenten*
- `F_s = abs(F);` % Fourier-spekteret
- `F_p = angle(F);` % Fasen
- `fftshift;` Flytter kvadranter slik at nullfrekvensen er i midten av «bildet»
- `ifftshift;` Flytter kvadrantene tilbake (reverserer `fftshift`)
- `imshow(log(abs(fftshift(F)) + 1), [0 max(log(abs(F(:)) + 1))]); axis on;`

Oppsummering

- 2D DFT utfører et basisskifte
 - Resultatet er en matrise av komplekse tall
 - Disse tallene beskrives vanligvis ved deres amplitude og fase
 - Både gråtonebildet og dets 2D DTF er implisitt antatt periodisk
 - Dette er vanligvis er usann antagelse
 - ⇒ diskontinuitet langs bildekantene
 - ⇒ økt bidrag langs u- og v-aksen i Fourier-spekteret
 - Realdelen i (u,v) kan beregnes ved å summere punktproduktet mellom gråtonebildet og cosinus-bildet med frekvens (u,v)
 - Tilsvarende kan imaginærdelen beregnes ved bruk av sinus-bildet
- Fourier-spekteret beskriver hvilke frekvenser et gråtonebilde inneholder
 - Smal/bred struktur i bildet ⇔ Bred/smål struktur i Fourier-spekteret
 - Skarp/blurret kant i bildet ⇔ Mange/færre positive koeffisienter i Fourier-spekteret