Supplement til forelesning 8: Fourier-transform Ib

Andreas Kleppe

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

7. mars 2012

Dagens mål

Dagens mål

Forstå 2D diskret Fourier-transform (DFT) som et ortogonalt basisskifte, og bevise denne sammenhengen

Indreprodukt og ortogonalitet

- Standard indreprodukt på $\mathbb{C}^n$ er definert som $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \vec{x}^T \vec{y}^* = \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i^*$
  - Notasjon: x^* eller $\vec{x}^*$ er den konjugerte
  - Notasjon: Ofte brukes én-indeksering i grunnleggende lineær algebra, vi null-indekserer i stedet
- Et *indreproduktrom* er et vektorrom med et spesifikt indreprodukt
- To vektorer $\vec{x}$ og $\vec{y}$ kalles *ortogonale* (mhp. det spesifiserte indreproduktet) hvis $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$
- Tilsvarende gjelder også for matriser:
  - Standard indreprodukt på $\mathbb{C}^{m,n}$ er definert som $\langle A, B \rangle := \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} b_{ij}^*$
  - To matriser A og B er ortogonale hvis $\langle A, B \rangle = 0$

Basis

- En *basis* for et vektorrom V er en mengde vektorer $\{\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{n-1}\}$ (der $\vec{v}_i \in V$ for alle i) som:
  1. Er lineært uavhengige, dvs., $\sum_{i=0}^{n-1} c_i \vec{v}_i = 0 \Rightarrow c_i = 0 \; \forall i$
  2. Utspenner V, dvs., $V = \mathrm{Span}\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$
- En basis (for V) kan betraktes som en minst mulig mengde som kan representere alle vektorer (i V)
- Å skifte basisen som brukes til å uttrykke en vektor kalles et *basisskifte*
- Et basisskifte endrer hvordan vektoren er representert, men ikke hva den representerer

Ortogonal basis I

- En mengde vektorer $\{\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_{n-1}\}$ kalles en *ortogonal mengde* dersom $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0 \; \forall i \neq j$
- En *ortogonal basis* er en basis og en ortogonalt mengde
- Et *ortogonalt basisskifte* er et basisskifte mellom ortogonale basiser
- Tilsvarende gjelder også for matriser
  - Man kunne faktisk ha betraktet matriser som et spesialtilfelle av vektorene i definisjonene over (inkludert ortogonalitet- og basis-definisjonene)

Ortogonal basis II

Teorem: Ortogonalt basisskifte

La $S := \{\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_{n-1}\}$ være en ortogonal basis for et indreproduktrom. Enhver $\vec{y}$ i dette rommet oppfyller da:

$$\vec{y} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \vec{v}_i$$

der c_i for $i = 0, 1, \ldots, n-1$ er gitt ved:

$$c_i = \frac{\langle \vec{y}, \vec{v}_i \rangle}{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle}$$

$c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ kalles koordinatene til $\vec{y}$ mhp. S

En ortogonal basis

For $u = 0, 1, \ldots, M-1$ og $v = 0, 1, \ldots, N-1$, la:

$$A_{u,v} := \frac{1}{MN} \begin{bmatrix} e^{j2\pi(\frac{u\cdot 0}{M} + \frac{v \cdot 0}{N})} & \cdots & e^{j2\pi(\frac{u\cdot 0}{M} + \frac{v(N-1)}{N})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi(\frac{u(M-1)}{M} + \frac{v\cdot 0}{N})} & \cdots & e^{j2\pi(\frac{u(M-1)}{M} + \frac{v(N-1)}{N})} \end{bmatrix}$$

Påstand:
$A = \{A_{u,v} \mid u = 0, 1, \ldots, M-1 \land v = 0, 1, \ldots, N-1\}$ er da en ortogonal basis for $\mathbb{C}^{M,N}$ (mhp. standard indreprodukt til $\mathbb{C}^{M,N}$)

En ortogonal basis - bevis (basis)

Dersom A er en ortogonal mengde må den også være en basis for det aktuelle rommet, $\mathbb{C}^{M,N}$, fordi:

1. Siden elementene i A er ulik 0, vil ortogonalitet medfører lineær uavhengighet
2. A utspenner $\mathbb{C}^{M,N}$
   - Det finnes MN elementer i A
   - Hvert av disse ligger i $\mathbb{C}^{M,N}$
   - Dimensjonen av $\mathbb{C}^{M,N}$ er MN
   - $\Rightarrow$ dersom elementene i A er lineært uavhengige må de utspenne $\mathbb{C}^{M,N}$

Altså står og faller hele påstanden på om A er en ortogonal mengde

En ortogonal basis - bevis (ortogonalitet I)

A er en ortogonal mengde hvis og bare hvis $\langle A_{u,v}, A_{u',v'}\rangle = 0$ når $u \neq u'$ eller $v \neq v'$. Generelt er:

$$\langle A_{u,v}, A_{u',v'}\rangle = \frac{1}{M^2N^2}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} e^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}e^{-j2\pi(\frac{u'x}{M}+\frac{v'y}{N})}$$
$$= \frac{1}{M^2N^2}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} e^{j2\pi(\frac{(u-u')x}{M}+\frac{(v-v')y}{N})}$$

Dersom $u = u'$ og $v = v'$:

$$\langle A_{u,v}, A_{u',v'}\rangle = \frac{1}{M^2N^2}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} e^0 = \frac{1}{MN}$$

En ortogonal basis - bevis (ortogonalitet II)

Dersom $v \neq v'$:

$$\langle A_{u,v}, A_{u',v'}\rangle = \frac{1}{M^2N^2}\sum_{x=0}^{M-1} e^{j2\pi\frac{(u-u')x}{M}}\sum_{y=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{(v-v')y}{N}}$$

Siden $v \neq v'$ vil $v - v' \in \{-(N-1), \dots, -1, 1, \dots, N-1\}$ og dermed $e^{j2\pi\frac{v-v'}{N}} \neq 1$. Siden $\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1-r^n}{1-r}$ når $r \neq 1$:

$$\langle A_{u,v}, A_{u',v'}\rangle = \frac{1}{M^2N^2}\sum_{x=0}^{M-1} e^{j2\pi\frac{(u-u')x}{M}}\frac{1-e^{j2\pi(v-v')}}{1-e^{j2\pi\frac{v-v'}{N}}}$$
$$= \frac{1}{M^2N^2}\sum_{x=0}^{M-1} e^{j2\pi\frac{(u-u')x}{M}}\frac{1-1}{1-e^{j2\pi\frac{v-v'}{N}}} = 0$$

En ortogonal basis - bevis (ortogonalitet III)

- Dersom $u \neq u'$ kan vi føre et helt tilsvarende resonnement for å vise at $\langle A_{u,v}, A_{u',v'}\rangle = 0$
  1. Summasjonsrekkefølgen byttes
  2. $(v - v')$-eksponensialen trekkes ut
  3. $u - u' \in \{-(M-1), \dots, -1, 1, \dots, M-1\} \Rightarrow e^{j2\pi\frac{u-u'}{M}} \neq 1 \Rightarrow$ kan bruke formelen for geometrisk rekke
  4. Dividenden blir 0, som gjør at hele uttrykket blir 0
- Totalt er $\langle A_{u,v}, A_{u',v'}\rangle$:
  - 0 når $u \neq u'$ eller $v \neq v'$ $\Rightarrow$ A er en ortogonal mengde
  - $(MN)^{-1}$ når $u = u'$ og $v = v'$ $\Rightarrow$ mengden av $\sqrt{MN}A_{u,v}$ er en *ortonormal* mengde (dvs. en ortogonal mengde der alle elementene har indreproduktnorm 1)

2D DFT - et ortogonalt basisskifte I

- Vi har bevist at A en ortogonal basis for $\mathbb{C}^{M,N}$
- ... og at $\langle A_{u,v}, A_{u,v}\rangle = (MN)^{-1}$
- Kan bruke teoremet om ortogonalt basisskifte:
  - Enhver $f \in \mathbb{C}^{M,N}$ oppfyller:

$$f = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} c_{u,v}A_{u,v}$$

som skrevet på komponentform og etter å omdøpe $c_{u,v}$ som $F(u,v)$ er:

$$f(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

Dette er nøyaktig uttrykket for 2D invers diskret Fourier-transform (IDFT)!

2D DFT - et ortogonalt basisskifte II

- Videre sier teoremet om ortogonalt basisskifte at:
  - ... der $c_{u,v} = F(u,v)$ for $u = 0, 1, \ldots, M-1$ og $v = 0, 1, \ldots, N-1$ er gitt ved:

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= \frac{\langle f, A_{u,v}\rangle}{\langle A_{u,v}, A_{u,v}\rangle} \\
&= \frac{(MN)^{-1}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}}{(MN)^{-1}} \\
&= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}
\end{aligned}
$$

Dette er nøyaktig uttrykket for 2D DFT! 2D DFT av f, $F(u,v)\ \forall u, v$, er altså koordinatene til f mhp. A

Oppsummering

2D DFT av $f \in \mathbb{C}^{M,N}$ er koordinatene til f mhp.
$A = \{A_{u,v} : u = 0, 1, \ldots, M-1 \wedge v = 0, 1, \ldots, N-1\}$, der:

$$
A_{u,v} := \frac{1}{MN}\begin{bmatrix}
e^{j2\pi(\frac{u\cdot 0}{M}+\frac{v\cdot 0}{N})} & \cdots & e^{j2\pi(\frac{u\cdot 0}{M}+\frac{v(N-1)}{N})} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
e^{j2\pi(\frac{u(M-1)}{M}+\frac{v\cdot 0}{N})} & \cdots & e^{j2\pi(\frac{u(M-1)}{M}+\frac{v(N-1)}{N})}
\end{bmatrix}
$$

A er en ortogonal basis for $\mathbb{C}^{M,N}$