INF2310 – 20. mars 2012

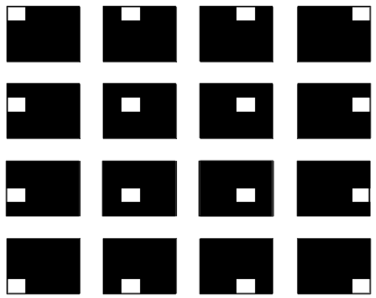
FORELESNING 10: REPETISJON

Denne delen: 2D diskret Fourier-transform (DFT)

- Grunnlaget og intuisjonen i Fourier-analyse
- Konvolusjonsteoremet med anvendelser

Standardbasis for matriser

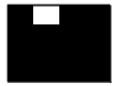
Eksempel: Standardbasis for 4x4



- Et gråtonebilde representeres vanligvis som et rutenett av gråtoneintensiteter
- Dette tilsvarer å bruke den såkalte *standardbasisen* for matriser
- Eksempel: 4x4-gråtonebilder
  - Standardbasisen er de 16 matrisene vist til venstre, der sort er 0 og hvit er 1
  - En vektet sum av disse matrisene kan unikt representere enhver 4x4-matrise/gråtonebilde

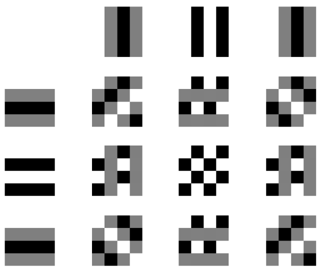
Undereksempel:

1	3	2	1
5	4	5	3
4	1	1	2
2	3	2	6

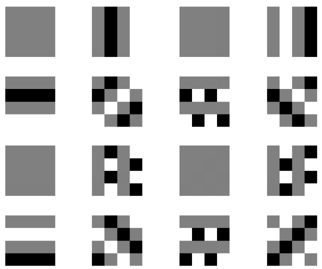
= 1*  + 3*  +…+ 6* 

Alternativ basis

- Det finnes mange andre basiser for matriser
  - Muligheten til å unikt representere enhver matrise ligger i *basis*
- 2D DFT bruker én slik basis som er basert på sinuser og cosinuser med forskjellige frekvenser
  - Disse sinusene og cosinusene er faste for en gitt bildestørrelsen (MxN) og kan representeres som hver sin mengde av bilder:



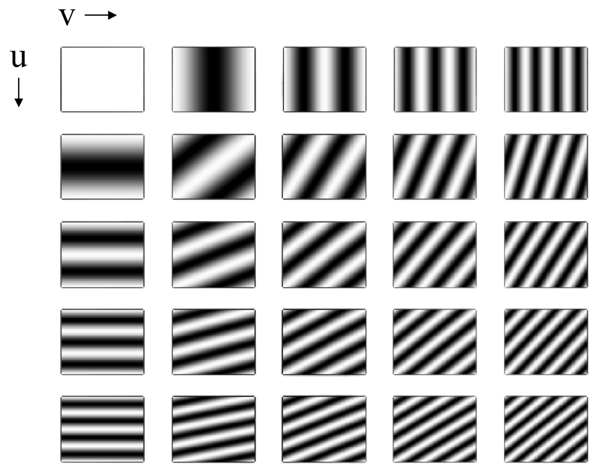
Cosinus-bildene for 4x4-bilder



Sinus-bildene for 4x4-bilder

(i bildene er sort -1, grått er 0 og hvitt er 1)

Cosinus-bilder for større bilder

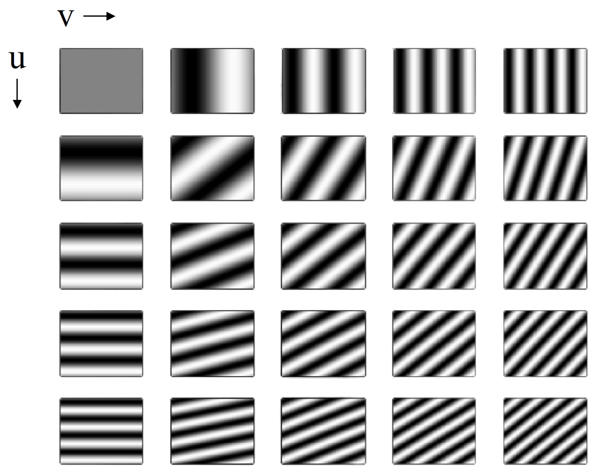


… til v = N-1

.
.
til u = M-1

I illustrasjonene er sort -1 og hvitt 1

Sinus-bilder for større bilder



… til v = N-1

.

.

til u = M-1

I illustrasjonene er sort -1 og hvitt 1

2D diskret Fourier-transform (DFT)

- 2D DFT av enhver *MxN* matrise (til og med kompleks!) er definert som:

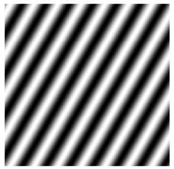
$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

  for u = 0, 1, 2, ..., M-1 og v = 0, 1, 2, ..., N-1
- x og y er hhv. vertikal og horisontal koordinat
- u og v er hhv. vertikal og horisontal frekvens
- $j=\sqrt{-1}$ er den imaginære enheten (ofte betegnet i i matematikken)
- 2D invers diskret Fourier-transform (IDFT) er definert som:

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

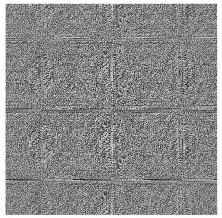
  og vil *alltid perfekt reversere* basisskifte gjort av 2D DFT

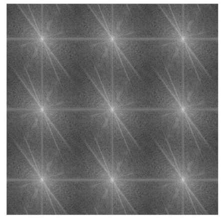
Grunnleggende om 2D DFT

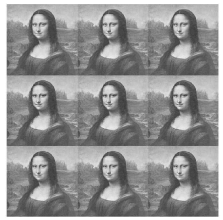
- real(F(u,v)) = sum( x )

  realdelen til 2D DFT-en av frekvensen (u,v) = sum(bildet punkt-multiplisert cosinus-bildet av frekvens (u,v))
- Tilsvarende for imaginærdelen og sinus-bildet
  - F(u,v) er (generelt) et komplekst tall
  - F(u,v) er en vektet sum av *alle* gråtoneintensitetene i bildet
    - Hvert punkt av 2D DFT-en beskriver noe ved *hele* bildet og *ikke et bildepunkt*
- Magnituden av en 2D DFT kalles dets *Fourier-spekteret*
  - Beskriver hvilke frekvenser gråtonebildet inneholder
  - Sterkt knyttet til intuisjonen i Fourier-analyse

Utvalgte egenskaper ved 2D DFT





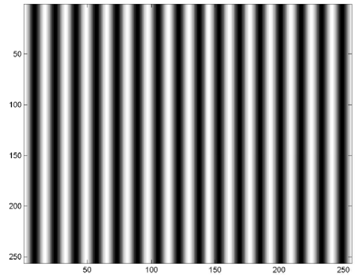


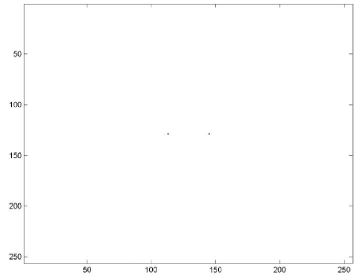
- F(u,v) er periodisk:
  - F(u,v) = F(u+kM,v+kN) der k er et heltall; $k \in \mathbb{Z}$

    ⇒ F(u,v) = F(u+M,v)
    = F(u,v+N)
    = F(u+M,v+N)
- Bildet antas indirekte å være periodisk:
  - f(x,y) = f(x+kM,y+kN) der k er et heltall
- F(u,v) er *konjugert symmetrisk* hvis (og bare hvis) f(x,y) er reell
  - Konjugert symmetri: F(u,v) = F*(-u,-v)

    ⇒ |F(u,v)|=|F(-u,-v)|

Eksempel: Fourier-spekteret av «rette» frekvenser

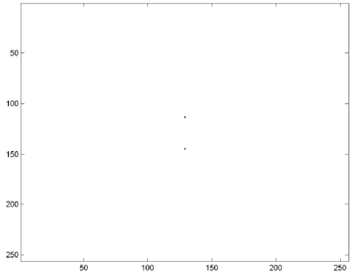




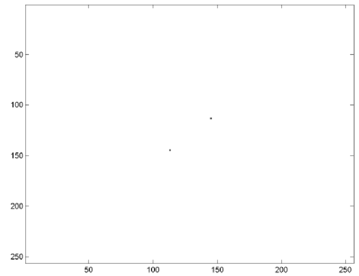
<- Fourier-spekter

Hvitt = 0

Svart = maksimal-intensiteten



Eksempel: Fourier-spekteret av «skrå» frekvenser

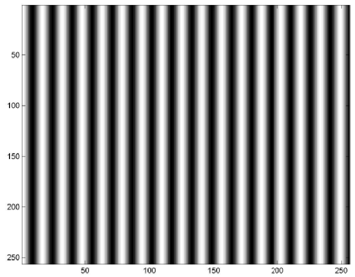


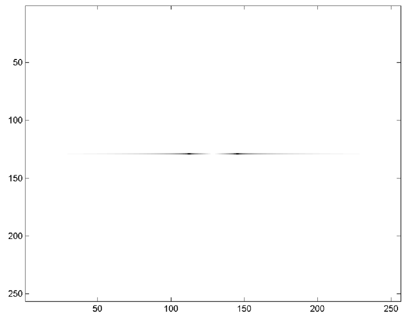
<- Fourier-spekter

Hvitt = 0

Svart = maksimal-intensiteten

Eksempel: Fourier-spekteret ved diskontinuitet I



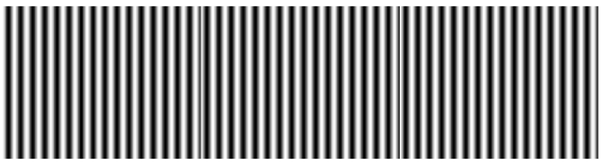


<- Fourier-spekter

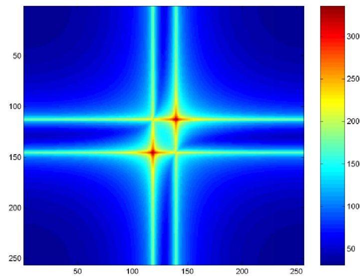
Hvitt = 0

Svart = maksimal-intensiteten

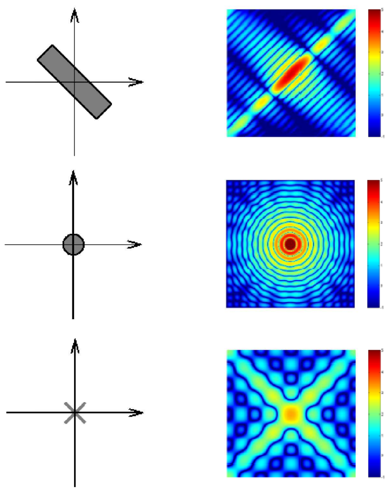
- Diskontinuitet oppstår når bildet ikke inneholdet et helt antall perioder
- Man ser den tydelig ved å repetere bildet i retningen for diskontinuiteten:



Eksempel: Fourier-spekteret ved diskontinuitet II

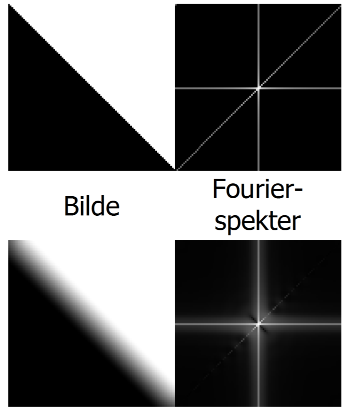


Eksempel: Fourier-spekteret av enkle strukturer



Fourier-spektre og bildekanter

- Skarp bildekant:
  - Vektet sum av mange sin/cos med forskjellige frekvenser
  - Mange positive koeffisienter i Fourier-spekteret
  - Bredt bånd i Fourier-spekteret
- «Blurret» (alt. flytende) bildekant:
  - Vektet sum av færre sin/cos
  - Færre positive koeffisienter i Fourier-spekteret
  - Smalere bånd i Fourier-spekteret



Konvolusjonsteoremet

- Konvolusjonsteoremet består av to deler:

1) Når $\Leftrightarrow$ betegner at høyresiden er 2D DFT-en til venstresiden, er:

$$f(x,y) \star h(x,y) \iff F(u,v) \cdot H(u,v)$$

Sirkelkonvolusjon i bildedomenet $\Leftrightarrow$ Punktvis multiplikasjon i frekvensdomenet

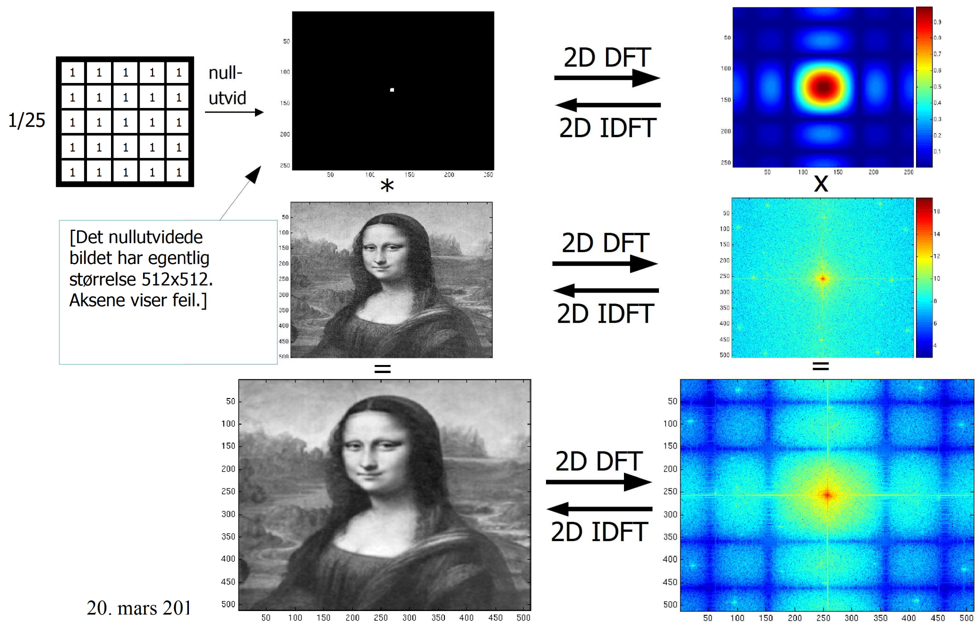
2) Det motsatte gjelder også:

$$f(x,y) \cdot h(x,y) \iff F(u,v) \star H(u,v)$$

Punktvis multiplikasjon i bildedomenet $\Leftrightarrow$ Sirkelkonvolusjon i frekvensdomenet

- Bildene *f* og *h* antatt å ha samme størrelse
  - Nullutvid det minste bildet slik at de får samme størrelse

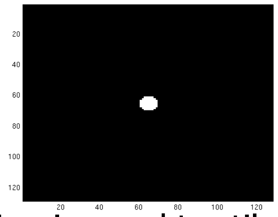
Eksempel: Middelverdifilteret



Anvendelse av konvolusjonsteoremet

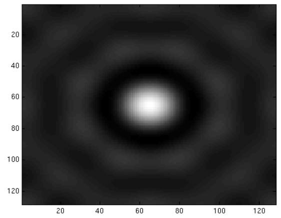
- Design av lineære filtre med bestemte frekvensegenskaper
  - Designe filteret i frekvensdomenet slik at det får de ønskelige frekvensegenskapene
- Analyse av konvolusjonsfiltre
  - 2D DFT-en til et konvolusjonsfilter gir oss innblikk i hvordan filteret vil påvirke de forskjellig frekvenskomponentene
- Rask implementasjon av større konvolusjonsfiltre

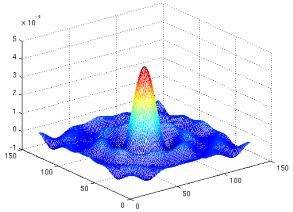
Filterdesign i frekvensdomenet
Ideelt lavpassfilter og «ringing»



Fourier-spekter til et ideelt lavpassfilter

2D IDFT





(trunkert sinc-funksjon)

- Vi får en «ringing»-effekt i bildet
  - Husk også tommelfingerregelen:
    Smal/bred struktur i bildet ⇔ Bred/smal struktur i Fourier-spekteret

Eksempel: Ideelt lavpassfilter

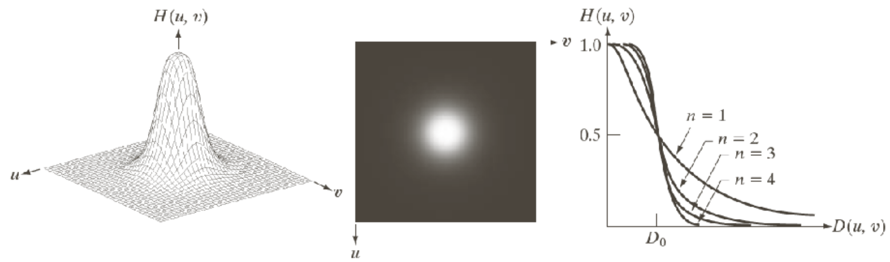
Original

D_0=0.2

D_0=0.3

Se på bildene i god nok oppløsning (du skal se stripe/ringing-effekter i de to til høyre)

Butterworth lavpassfilter



a b c

FIGURE 4.44 (a) Perspective plot of a Butterworth lowpass-filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.

Eksempel: Butterworth lavpassfilter

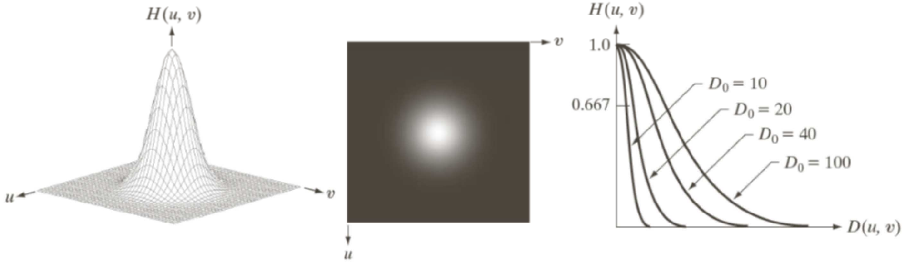
D_0=0.2

n=11

n=41

n=61

Gaussisk lavpassfilter



a b c

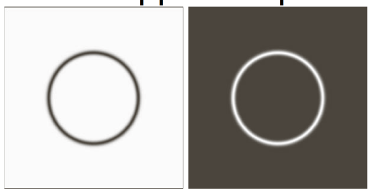
FIGURE 4.47 (a) Perspective plot of a GLPF transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections for various values of D_0.

- 2D IDFT-en av et Gaussisk lavpassfilter er også Gaussisk
  - Ingen ringing i bildedomenet!

Andre typer filtre

- Høypassfilter: $H_{HP}(u,v) = 1 - H_{LP}(u,v)$
- Båndpass-/båndstoppfilter

Båndstopp Båndpass

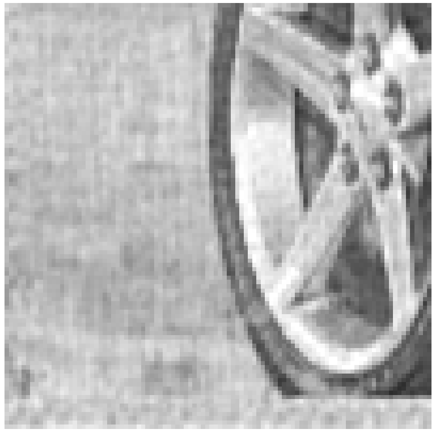


- Notch-filtre slipper igjennom eller stopper mindre predefinerteområdet i Fourier-spekteret
- Alle kan bruke de samme overgangene:
  - Ideelt, Butterworth, Gaussisk eller annen vindusfunksjon

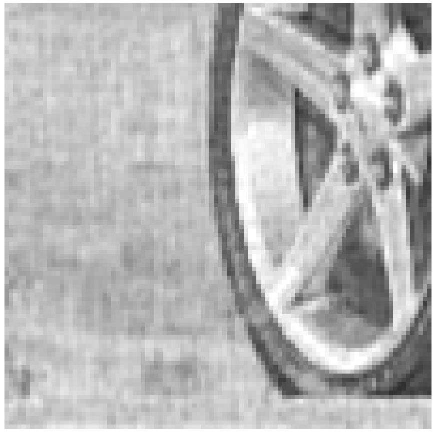
Wraparound-feil

- Periodisitetsegenskapen til 2D DFT gjør at sirkulær indeksering er implisitt antatt når vi filtrerer i frekvensdomenet
- For å behandle randproblemet annerledes må bildet utvides på ønskelig måte *før* 2D DFT-en av det beregnes
  - Filteret må da nullutvides til det utvidede bildet
- Dersom bildet har størrelse MxN og filteret mxn, må det utvidede bildet minst ha størrelse (M+m-1)x(N+n-1)

Eksempel: Wraparound-feil



Uten nullutvidelse



Med nullutvidelse

Oppsummering

- 2D DFT er et representasjonsskifte basert på sinuser og cosinuser med forskjellige frekvenser
- Fourier-spekteret beskriver hvilke frekvenser bilde inneholder
  - Smal/bred struktur i bildet ⇔ Bred/smal struktur i Fourier-spekteret
  - Skarp/blurret kant i bildet ⇔ Mange/færre positive koeffisienter i Fourier-spekteret
- Konvolusjonsteoremet:
  - Sirkelkonvolusjon i bildedomenet tilsvarer punktmultiplikasjon i frekvensdomenet, og omvendt
- Anvendelser:
  - Design av filtre i frekvensdomenet (husk wraparound-feil!)
    - Lavpass, høypass, båndpass, båndstopp, notch
  - Analyse og rask implementasjon av konvolusjonsfiltre