
INF2310 – Digital bildebehandling

FORELESNING 9

FOURIER-TRANSFORM – I

Andreas Kleppe

I går: Det matematiske fundamentet

I dag: Grunnlaget

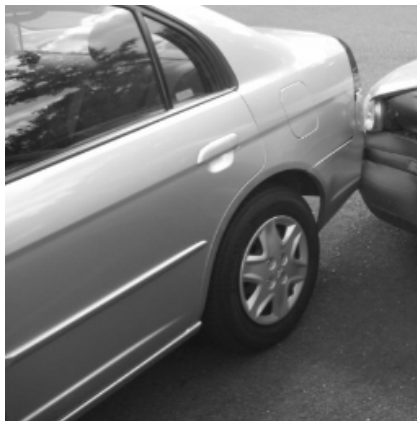
- Grunnlaget og intuisjonen i Fourier-analyse
- 2D diskret Fourier-transform (DFT)

Neste tirsdag: Anvendelse: Filtrering

G&W: 4.2.1, 4.5.5-4.7.1 (unntatt 4.6.6) og 4.11

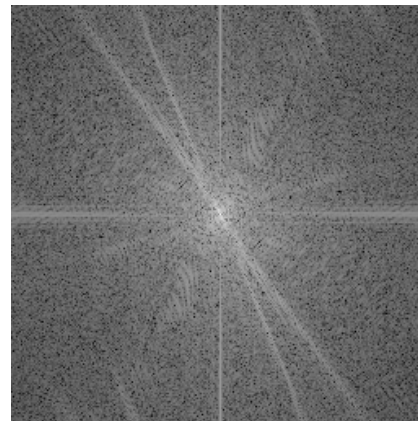
Introduksjon/motivasjon I

- Et gråtone-bilde representeres vanligvis som en matrise av gråtone-intensiteter.
- Dette er bare én av mange måter.
- Grunnlaget for Fourier-analyse:
 - Representer bildet som en **vektet sum av sinuser og cosinuser** med forskjellige frekvenser.
 - I går beviste vi at representasjonen var **unik for ethvert bilde**; det finnes ett og bare ett sett av vektorer for hvert bilde.



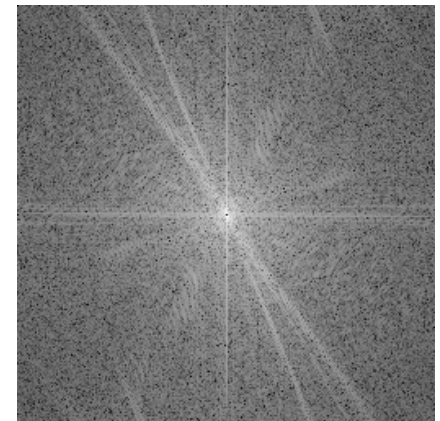
Gråtone-bilde

Fourier-
transform
→
←
Invers
Fourier-
transform



In |realdelen av vektene|

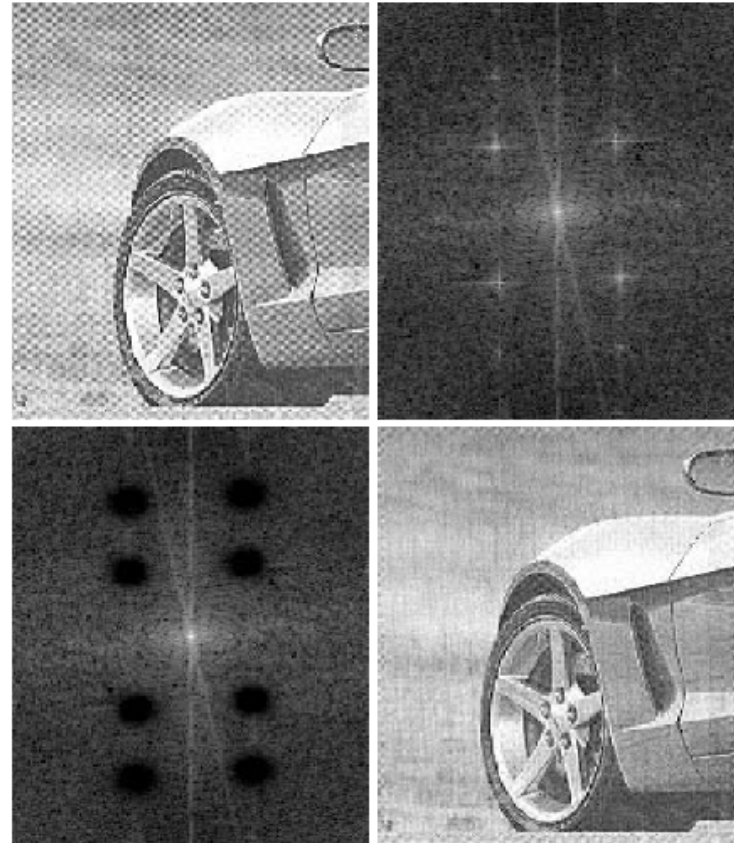
+



In |imaginærdelen av vektene|

Introduksjon/motivasjon II

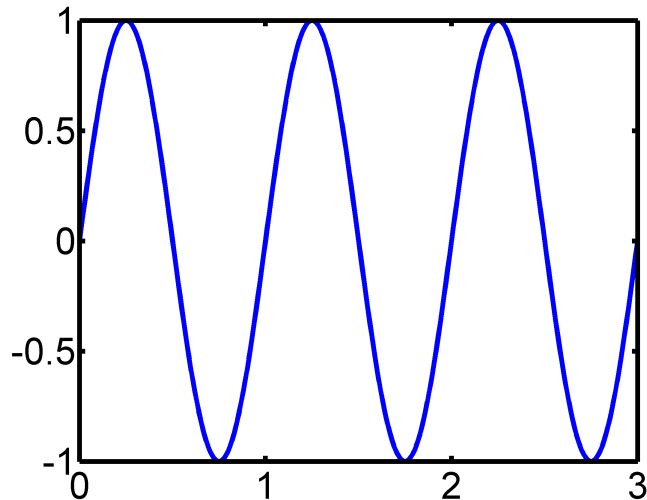
- Representasjons-skiftet kalles et *basis-skifte* i matematikken.
- Flere grunner til å skifte til «Fourier-basisen», bl.a.:
 - Konvolusjons-filtrering:
 - Designe filtre.
 - Analysere filtre.
 - Raskere filtrering med større filtre.
 - Kompresjon.
 - Analysere bilder.
 - Beskrive teksturer.
 - Beskrive objekt-omriss.



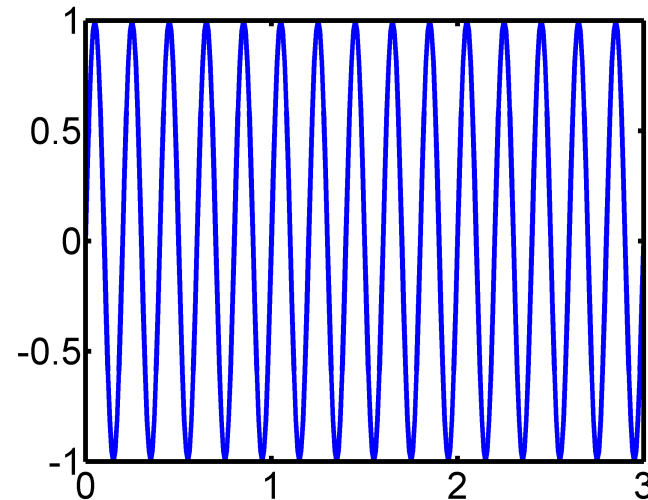
Fjerning av periodisk støy, fig. 4.64 i DIP.
Ut-bildet er resultatet av en konvolusjon, men det er vanskelig å designe filteret i bildedomenet.

Bakgrunn: Frekvens

- *Frekvens* betegner ofte antall svinginger eller forekomster (av en gjentakende hendelse) per tidsenhet.
 - Kan da kalles *tids-frekvens* (eng.: *temporal frequency*).
- Tidsfrekvens er dermed tilknyttet et tids-**intervall** og **ikke** et tids-**punkt**.
- Frekvens er en viktig parameter sinus og cosinus.



$\sin(2\pi x)$ har frekvens 1



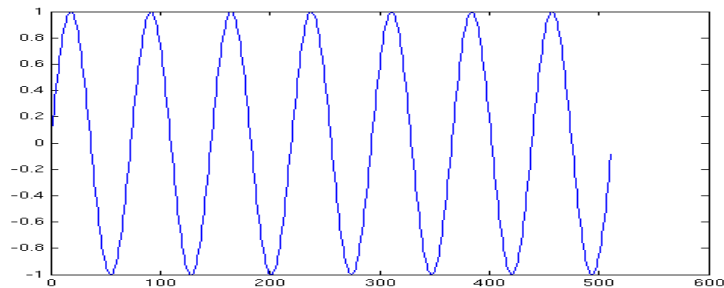
$\sin(10\pi x)$ har frekvens 5

Bakgrunn: Sinus og cosinus

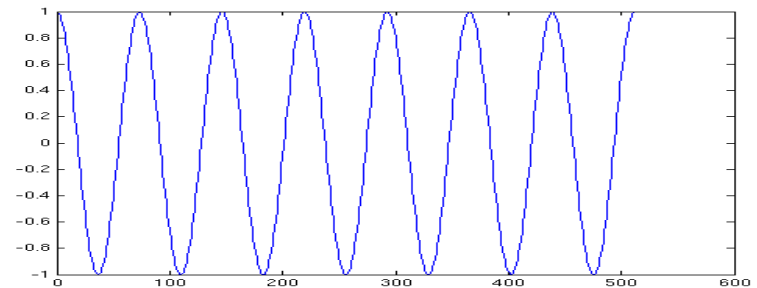
Sinus og cosinus skilles kun ved et *faseskift*, en horisontal forskyvning:

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

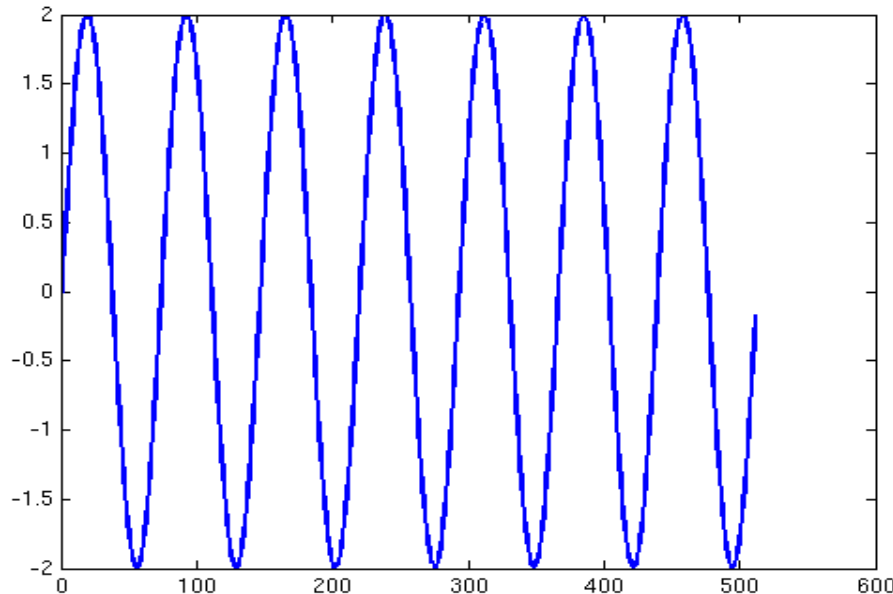


$$\sin(14\pi t/N) = \cos(14\pi t/N - \pi/2)$$



$$\cos(14\pi t/N) = \sin(14\pi t/N + \pi/2)$$

Bakgrunn: Samplet sinus i 1D



I dette eksemplet er
 $A=2$, $u=7$, $N=512$ og $\varphi=0$

$$y(t) = A \sin(2\pi ut/N + \varphi)$$

t : tid; $0, 1, \dots, N-1$

A : amplitude

u : antall hele perioder*

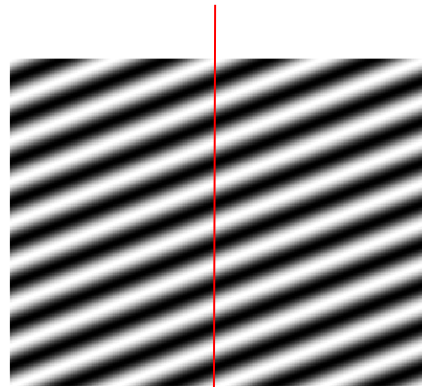
N : antall sampler

φ : horisontal forskyvning (fase)

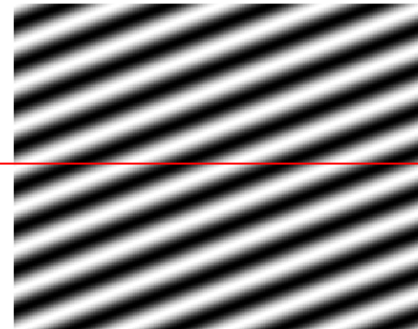
* u kalles ofte for frekvensen, da antar man indirekte at tidsenheten er hele tidsintervallet

Bakgrunn: Sinus i 2D

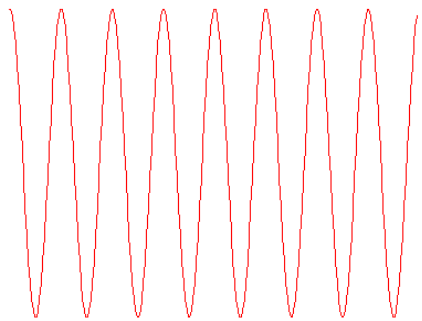
- Flerdimensjonale sinus-funksjoner har **én frekvenskomponent for hver dimensjon:**



2D sinus

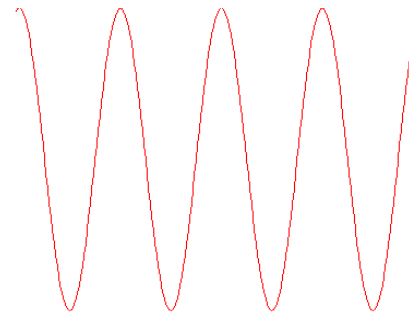


I bildene er sort $-A$ og hvitt A , der A er amplituden til sinusen.



Horizontal
gråtone-profil
→

←
Vertikal
gråtone-profil



Bakgrunn: Samplet sinus i 2D

$$f(x, y) = A \sin\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right) + \varphi\right)$$

x : vertikal romlig koordinat; 0, 1, ..., M-1

y : horisontal romlig koordinat; 0, 1, ..., N-1

A : amplitude

u : antall hele perioder vertikalt*

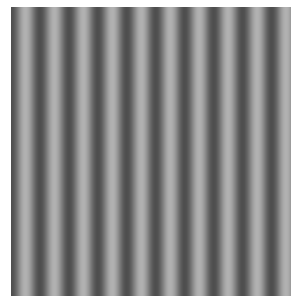
v : antall hele perioder horisontalt*

M : antall sampler vertikalt

N : antall sampler horisontalt

φ : faseforskyvning

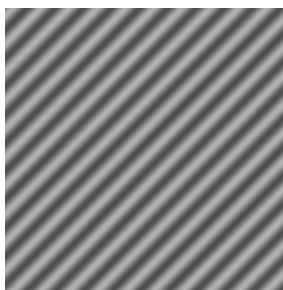
* u og v er også h.h.v. vertikal og horisontal frekvens hvis rom-enheten er hele bildet



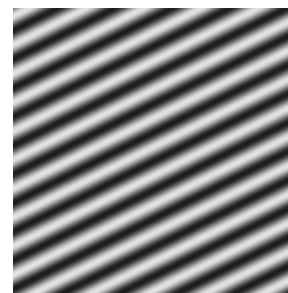
A=50, u=0, v=10



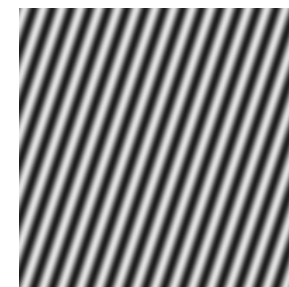
A=20, u=10, v=0



A=50, u=10, v=10



A=100, u=10, v=5



A=100, u=5, v=15

I bildene vises 0 som grått, -127 som sort, og 127 som hvit. φ er 0 i alle disse eksemplene.

Bakgrunn: Frekvens i bilder

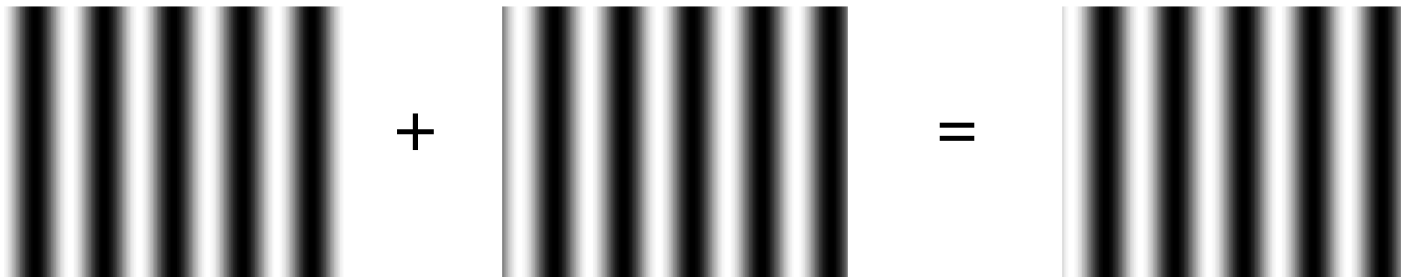
- I bildesammenheng betegner aksene ofte romlige koordinater.
 - Frekvensen, som består av to komponenter, kan derfor kalles *romlig frekvens* (eng.: *spatial frequency*).
- Romlig frekvens er tilknyttet et **bildeutsnitt** og **ikke et bildepunkt**.

Bakgrunn: Frekvens i bilder

- Et bildeutsnitt kan inkludere flere frekvenser:

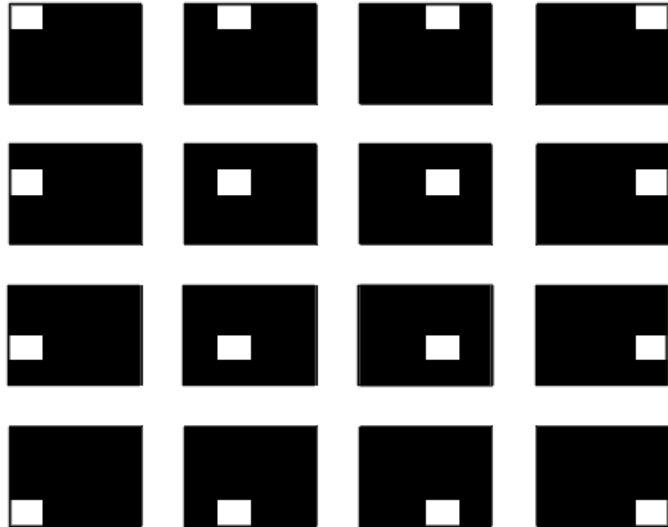


- Summen av to bilder med lik frekvens, men forskjellig fase, er et bilde med samme frekvens, men ny fase



Bakgrunn: Standardbasis for matriser

Eksempel: Standardbasis for 4x4



- Et gråtonebilde representeres vanligvis som en matrise av gråtoneintensiteter.
- Dette tilsvarer å bruke den såkalte *standardbasisen* for matriser.
- Eksempel: 4x4-gråtonebilder:
 - Standardbasisen er de 16 matrisene vist til venstre, der sort er 0 og hvit er 1.
 - En vektet sum av disse matrisene kan unikt representere enhver 4x4-matrise/-gråtonebilde.

Undereksempel:

1	3	2	1
5	4	5	3
4	1	1	2
2	3	2	6

$$= 1 * \begin{matrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{matrix} + 3 * \begin{matrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{matrix} + \dots + 6 * \begin{matrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{matrix}$$

I bildene er sort 0 og hvitt 1.

2D diskret Fourier-transform (2D DFT)

- 2D DFT av et $M \times N$ -bilde er matrisen F som er gitt ved:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

for $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$ og $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

- Merk:
 - $F(u, v)$ er (generelt) et komplekst tall.
 - $F(u, v)$ er en vektet sum av **alle** gråtoneintensitetene i bildet.
- 2D invers diskret Fourier-transform (2D IDFT) er gitt ved:

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

og vil **alltid perfekt reversere** basisskifte gjort av 2D DFT.

- x og y er hhv. vertikal og horisontal koordinat.
- u og v er hhv. vertikal og horisontal frekvens.
- $j = \sqrt{-1}$ er den imaginære enheten (ofte betegnet i i matematikken)

2D diskret Fourier-transform (2D DFT)

- Definisjonen av 2D DFT kan skrives ut ved bruk av Eulers formel;
 $e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \left(\cos \left[2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right] + j \sin \left[-2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right] \right) \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos \left[2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right] + \dots \\ &\dots j \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \sin \left[-2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right] \end{aligned}$$

2D diskret Fourier-transform (2D DFT)

- Altså er:

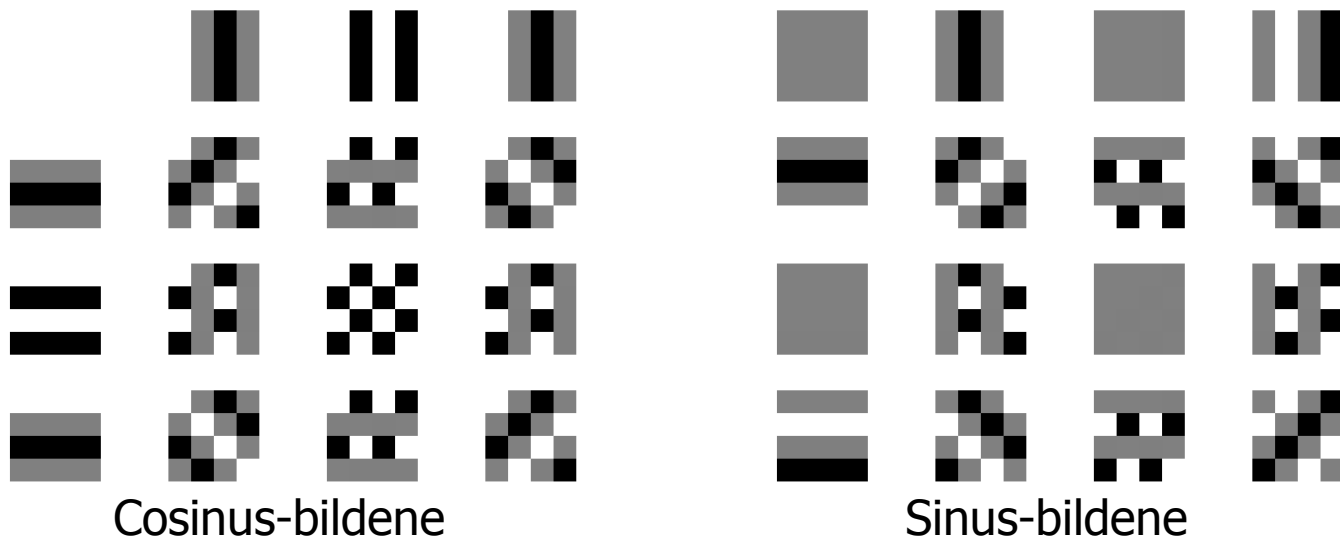
$$\text{real}(F(u, v)) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos \left[2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right]$$

$$\text{imag}(F(u, v)) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \sin \left[-2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right]$$

- Dermed kan f.eks. realdelen til $F(u, v)$ beregnes ved å **punktvis multiplisere** gråtonebildet med et bildet av en cosinus-funksjon med frekvens (u, v) og **summere** alle de resulterende verdiene.

Eksempel: Skifte til 2D DFT-basisen

- Cosinus- og sinus-bildene for 4x4-bilder er:



(i bildene er sort -1, grått er 0 og hvitt er 1)

- Realdelen i (u,v) i 2D DFT-en til et 4x4-gråtonebilde er **summen av punktproduktet** av bildet og cosinus-bilde (u,v) , tilsvarende gir et sinus-bilde en imaginærdel.

Eksempel: Skifte til 2D DFT-basisen

- La oss finne 2D DFT av vårt tidligere eksempelbilde:

- $\text{real}(F(0,0)) = \text{sum} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 4 & 5 & 3 \\ \hline 4 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 6 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right) = 45$

- $\text{imag}(F(0,0)) = \text{sum} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 4 & 5 & 3 \\ \hline 4 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 6 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right) = 0$

- Altså er $F(0,0) = 45$.

Eksempel: Skifte til 2D DFT-basisen

- La oss finne 2D DFT av vårt tidligere eksempelbilde:

- $\text{real}(F(0,1)) = \text{sum} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 4 & 5 & 3 \\ \hline 4 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 6 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} \right) = 2$

- $\text{imag}(F(0,1)) = \text{sum} \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 4 & 5 & 3 \\ \hline 4 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 6 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right) = 1$

- Altså er $F(0,1) = 2+j$.

Eksempel: Skifte til 2D DFT-basisen

- Og slik kan vi fortsette, helt til det siste frekvensen:

- $\text{real}(F(3,3)) = \text{sum}(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 4 & 5 & 3 \\ \hline 4 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 6 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline \end{array}) = -8$

- $\text{imag}(F(3,3)) = \text{sum}(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 4 & 5 & 3 \\ \hline 4 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 6 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}) = 3$

- Altså er $F(3,3) = -8+3j$.

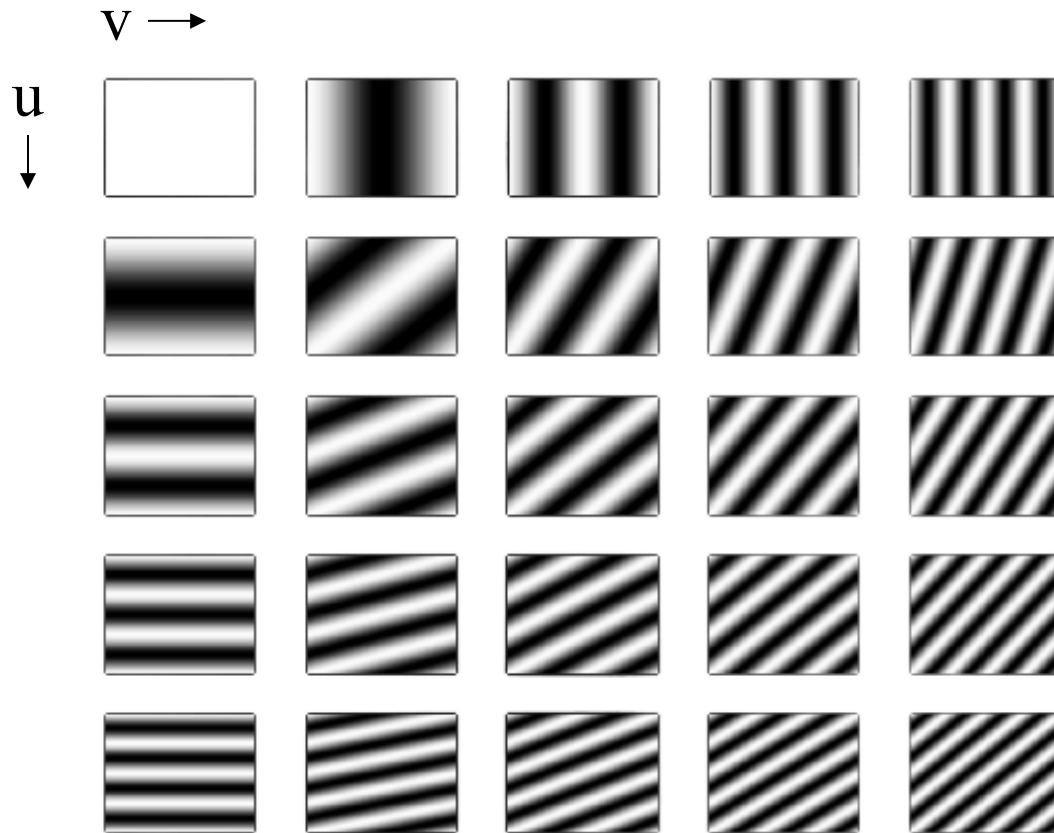
Eksempel: Skifte til 2D DFT-basisen

- Totalt får vi at:

$$\text{real}(F) = \begin{bmatrix} 45 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -8 & -3 & 0 \\ -15 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & -8 \end{bmatrix}, \quad \text{imag}(F) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & -8 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

- 2D DFT av $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ er altså $\begin{bmatrix} 45 & 2+j & -1 & 2-j \\ -1-4j & -8-3j & -3-8j & 3j \\ -15 & 2-3j & 3 & 2+3j \\ -1+4j & -3j & -3+8j & -8+3j \end{bmatrix}$

Cosinus-bilder for større bilder



... til $v = N-1$

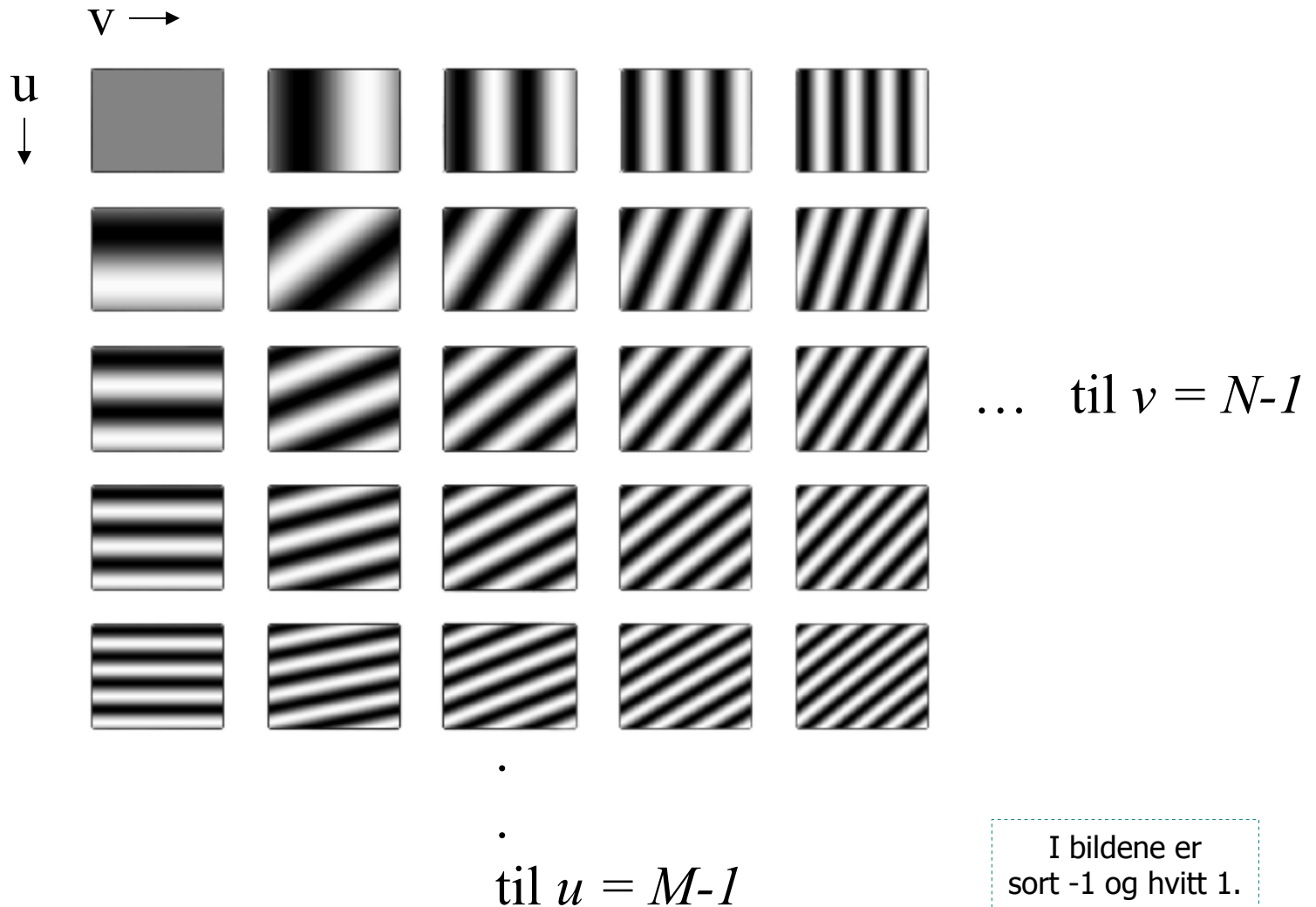
.

.

til $u = M-1$

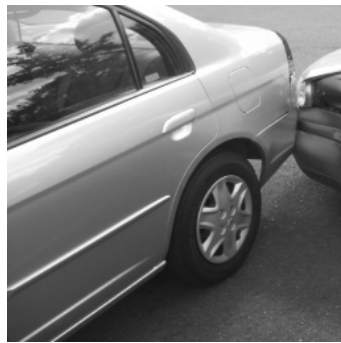
I bildene er
sort -1 og hvitt 1.

Sinus-bilder for større bilder



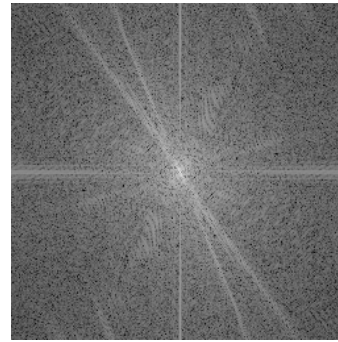
2D DFT på polarform

- Den visuelt **intuitive** informasjonen i 2D DFT er de **store verdiene**:



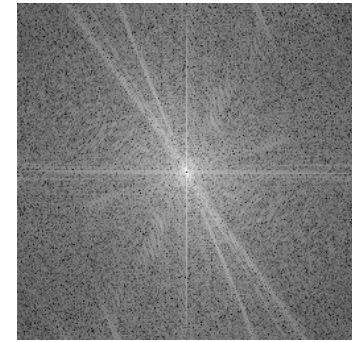
Gråtonebilde

2D DFT
→
←
2D IDFT



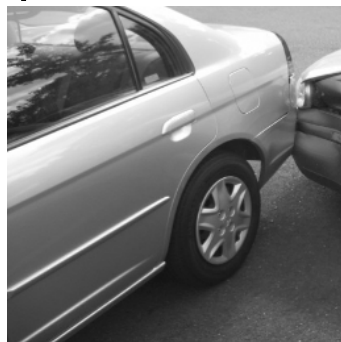
In |realdelen av vektene|

+



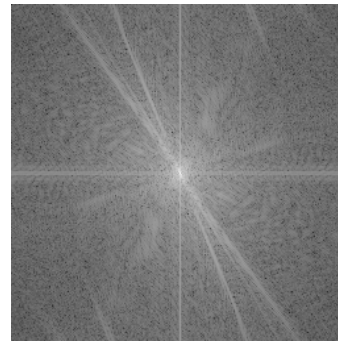
In |imaginærdelen av vektene|

- Denne informasjonen kan **konsentreres** ved å representere de komplekse tallene på polarform, d.v.s. ved amplitude og fase:



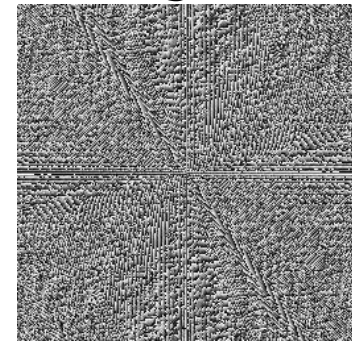
Gråtonebilde

2D DFT
→
←
2D IDFT



In(amplituden av vektene)

+

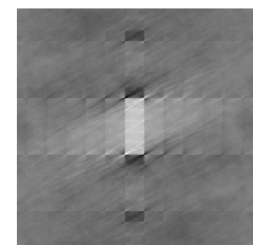
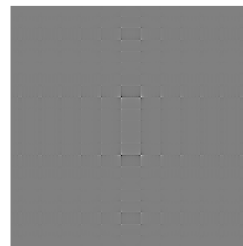
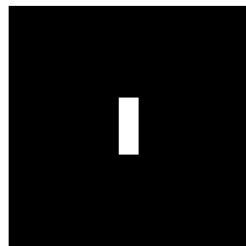
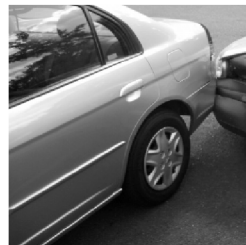


Fasen til vektene

2D DFT på polarform

- Magnituden av en 2D DFT kalles **Fourier-spekteret**.
 - Beskriver hvilke frekvenser gråtonebildet inneholder.
 - Sterkt knyttet til intuisjonen i Fourier-analyse.
- For å rekonstruere det opprinnelige bildet er derimot fasen viktigere:

Alle bildene er
uniformt rekvantifisert
slik at de fyller
gråtone-intervallet.



Rekonstruert
ved bruk av:

Original

Kun fasen

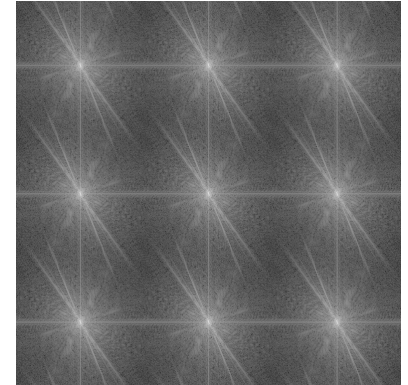
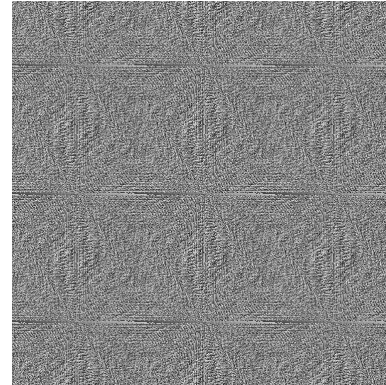
Kun spekteret

Den korrekte
fasen og den
andres spekter

Egenskaper ved 2D DFT

- $F(u,v)$ er **periodisk**:

- $F(u,v) = F(u+kM, v+kN)$
der k er et heltall; $k \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow F(u,v) = F(u+M, v)$
 $= F(u, v+N)$
 $= F(u+M, v+N)$

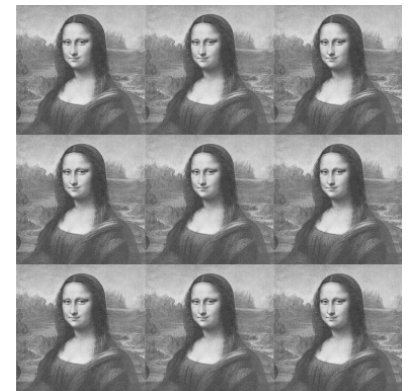


- Bildet antas indirekte å være **periodisk**:

- $f(x,y) = f(x+kM, y+kN)$ der k er et heltall

- $F(u,v)$ er **konjugert symmetrisk** hvis (og bare hvis) $f(x,y)$ er reell.

- Konjugert symmetri: $F(u,v) = F^*(-u,-v)$
 $\Rightarrow |F(u,v)| = |F(-u,-v)|$



Egenskaper ved 2D DFT

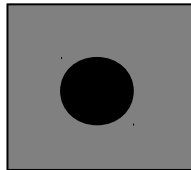
- $F(0,0)$ er **proporsjonal** med middelveiden av bildet, \bar{f} :

$$\begin{aligned} F(0,0) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi(0*x/M+0*y/N)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) = MN \bar{f} \end{aligned}$$

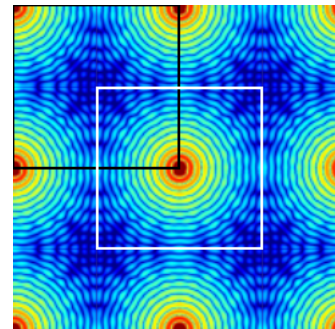
- Shift-teoremet (vises ved innsetning i definisjonene):
 - $f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v) e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}$
 - $f(x,y) e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$
- 2D DFT er **separabelt** i 1D DFT-er; kan beregnes som 1D DFT-ene kolonnevis (alt. radvis) av 1D DFT-ene radvis (alt. kolonnevis).
 - En essensiell egenskap for den praktiske anvendelsen (sammen med FFT) for større bilder.

Framvisning av Fourier-spekteret

- Det vanlig å **forskyve** Fourier-spekteret slik at DC, frekvensen $(0,0)$, ligger midt i bildet.
 - Utsnittet inneholder samme informasjon siden $F(u,v)$ er periodisk.
 - Det er ofte lettere å tolke et slikt Fourier-spekteret; f.eks. vil symmetri innebære speiling om senterpikselet.
- Forskyvingen kan utføres ved å:
 - Enten bytte kvadranter.
 - Eller pre-multiplisere $f(x,y)$ med $(-1)^{x+y}$ (følger av shift-teoremet).



$f(x,y)$: bildet i billedomenet



$|F(u,v)|$: Fourier-spekteret

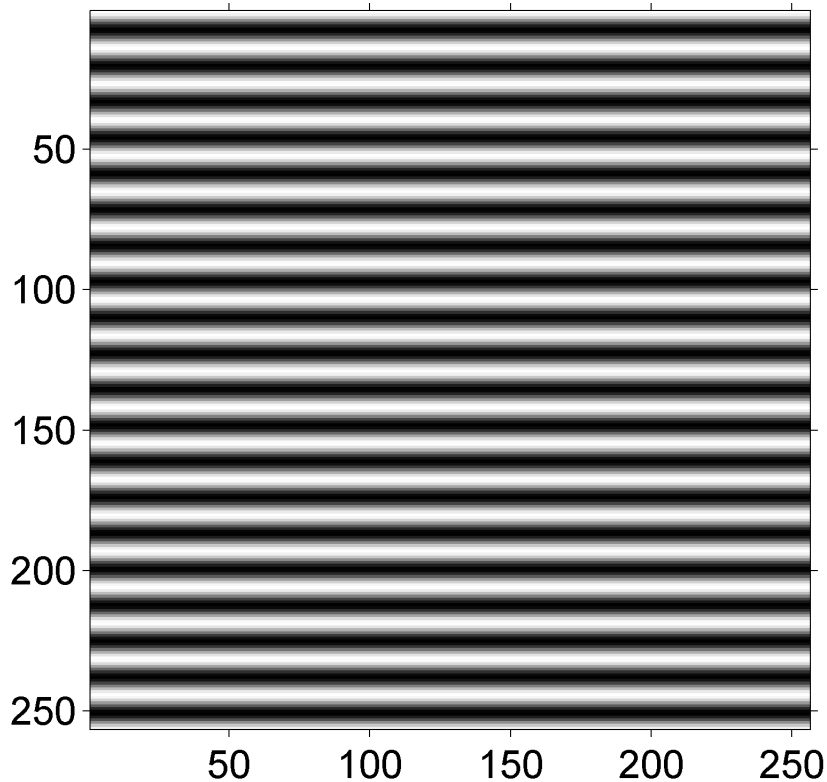
Framvisning av Fourier-spekteret

Skalering av verdiene:

- Ofte stor dynamikk i $|F(u,v)|$ (kan ha høye verdier).
- Vanlig å benytte **logaritmisk skala**.
 - Viser $g(u,v) = C \log(|F(u,v)|+1)$
der C velges slik at man får gråtoner i det ønskede intervallet, f.eks. 0-255 (8-biter).
 - Eksempel på bruk av *logaritmisk mapping*, omtalt i forelesning 4; *Gråtonemapping*.

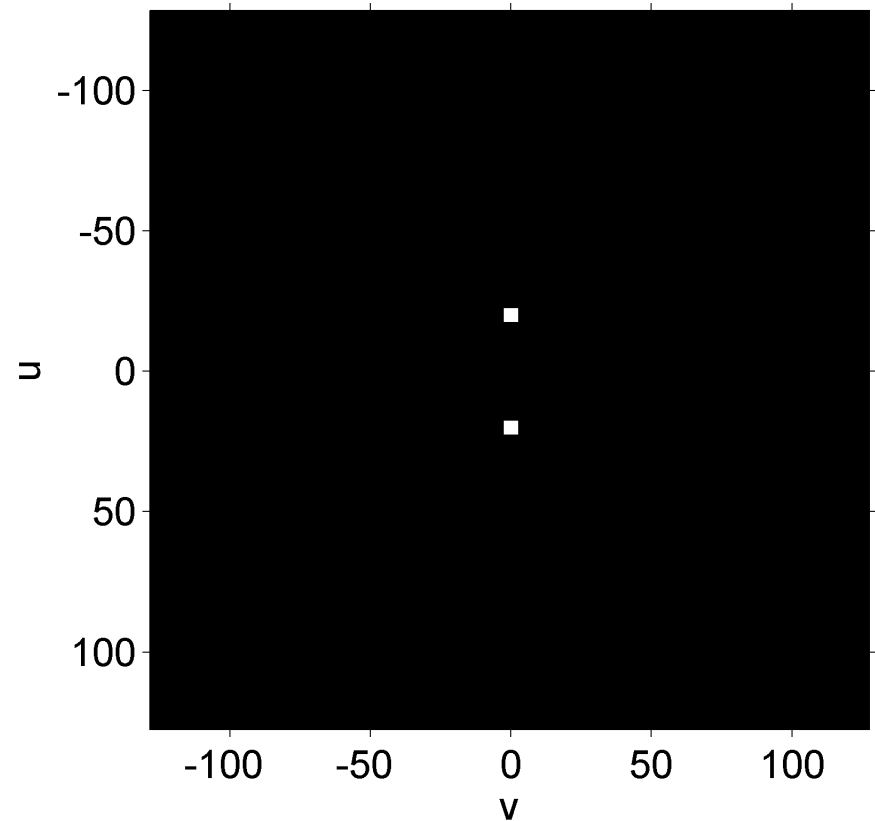
Eksempel: 2D DFT av cosinus med «rett» frekvens

Samplet 2D cosinus
med frekvens (20,0)



Svart og hvitt er hhv. -1 og 1.

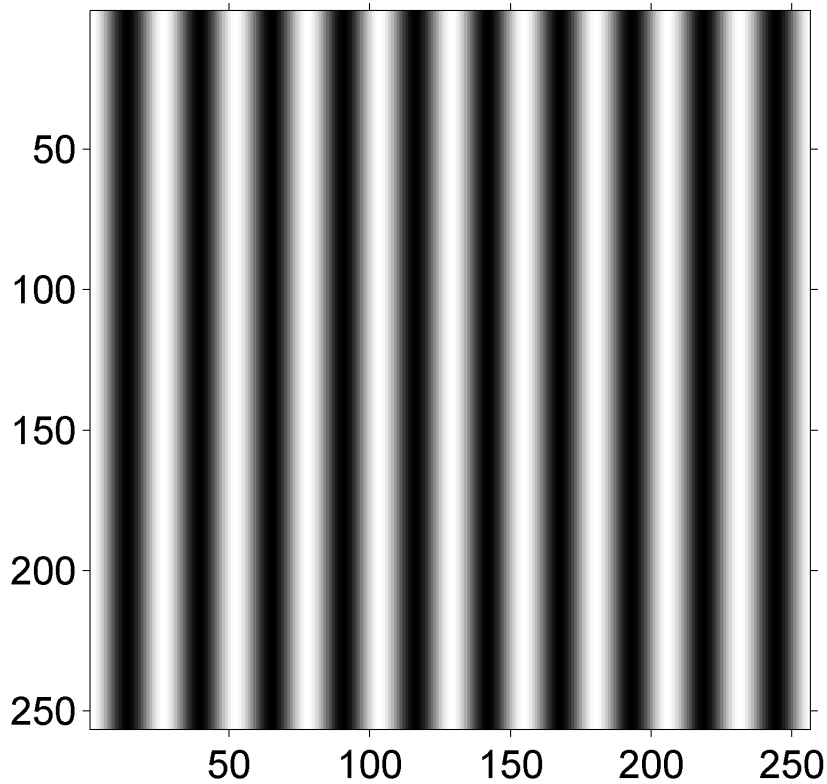
Fourier-spekteret
(her lik 2D DFT-en)



Svart og hvitt er hhv. 0 og $MN/2$.
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

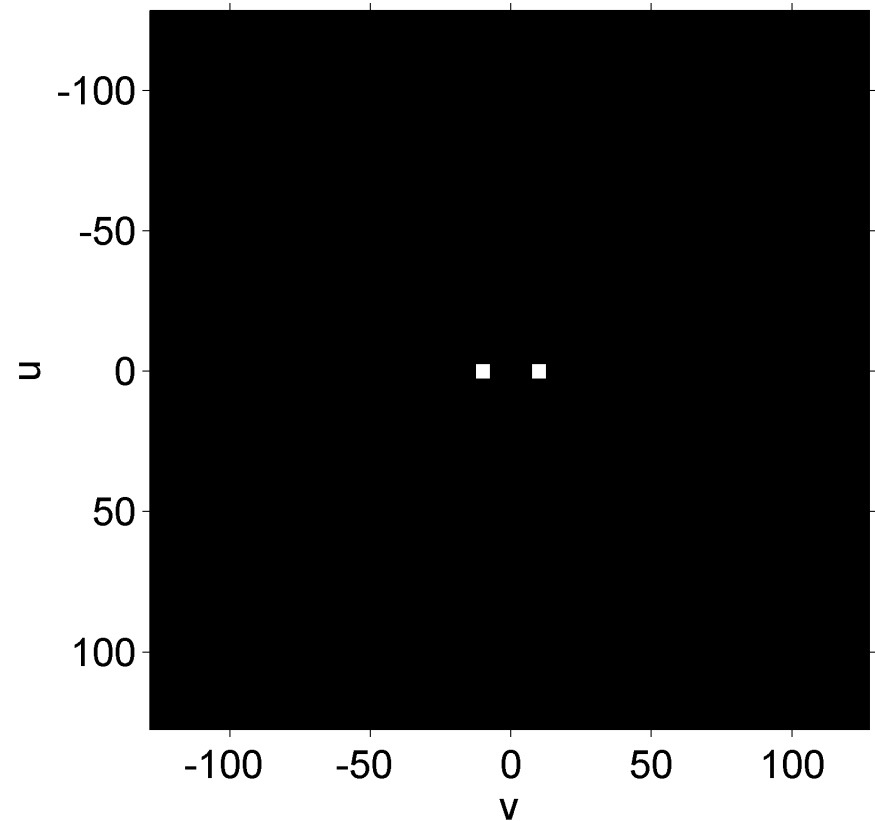
Eksempel: 2D DFT av cosinus med «rett» frekvens

Samplet 2D cosinus
med frekvens (0,10)



Svart og hvitt er hhv. -1 og 1.

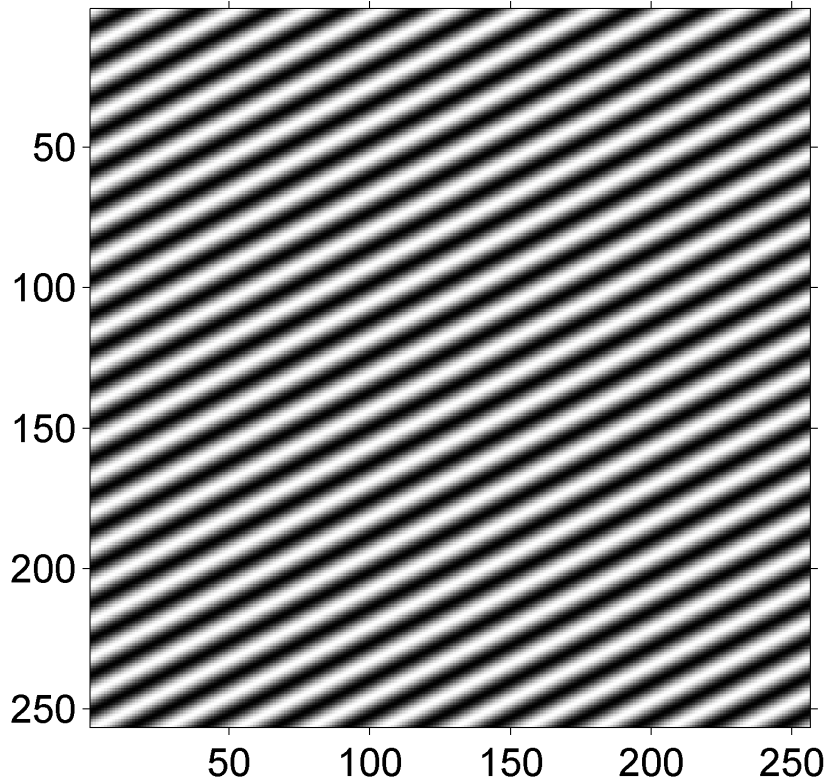
Fourier-spekteret
(her lik 2D DFT-en)



Svart og hvitt er hhv. 0 og $MN/2$.
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

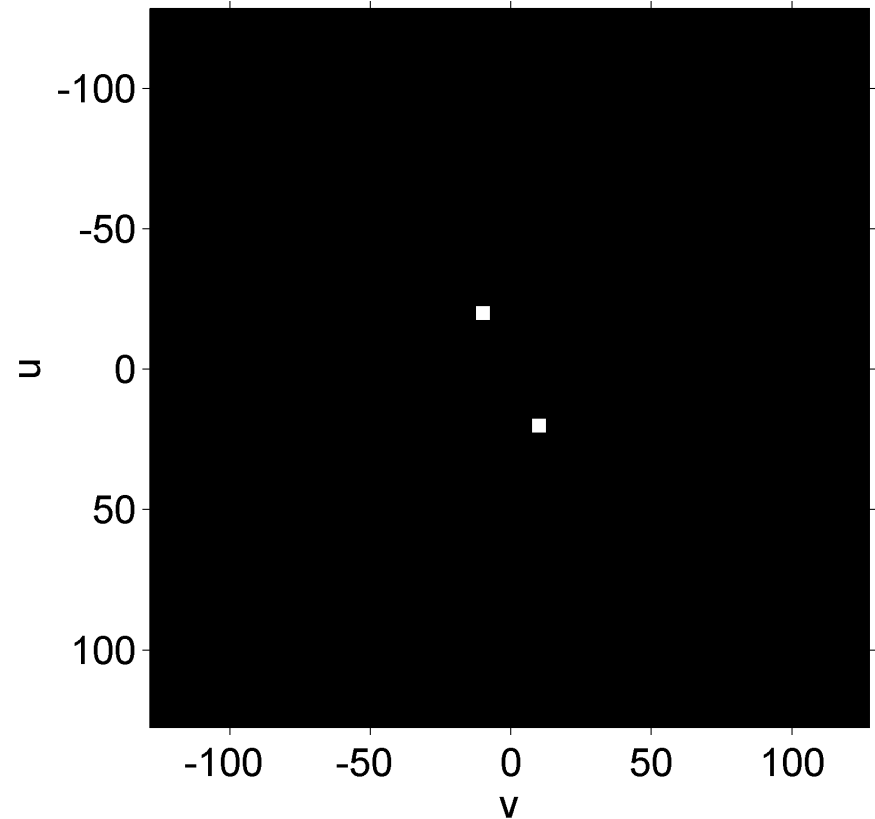
Eksempel: 2D DFT av cosinus med «skrå» frekvens

Samplet 2D cosinus
med frekvens (20,10)



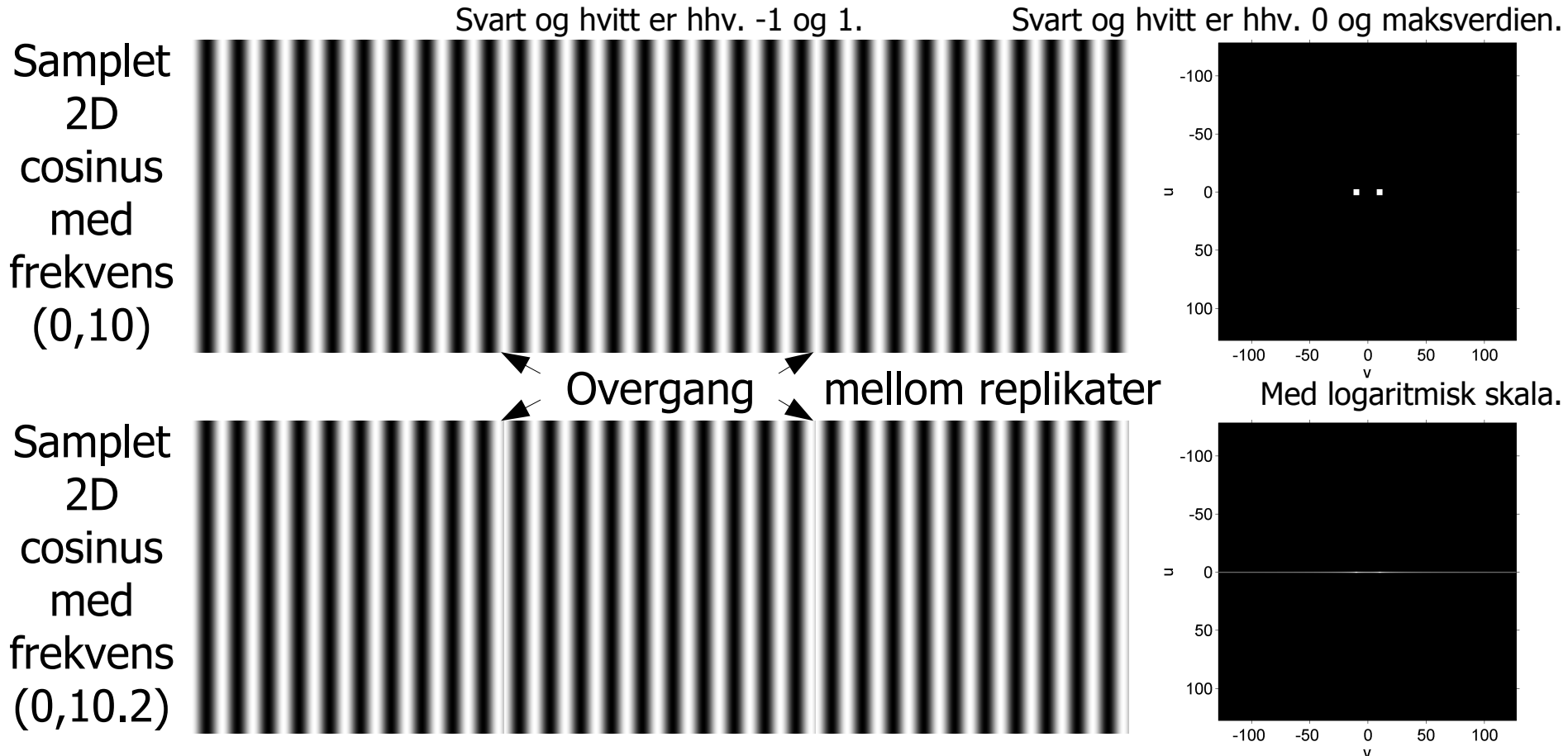
Svart og hvitt er hhv. -1 og 1.

Fourier-spekteret
(her lik 2D DFT-en)



Svart og hvitt er hhv. 0 og $MN/2$.
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

Eksempel: Fourier-spekter av cosinus ikke-heltallig frekvens



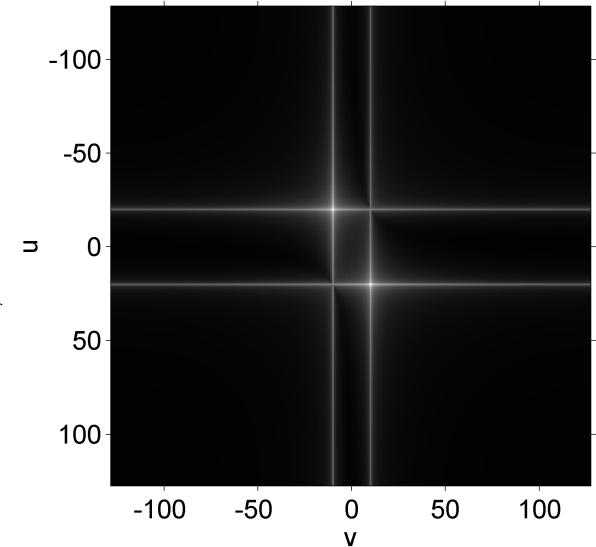
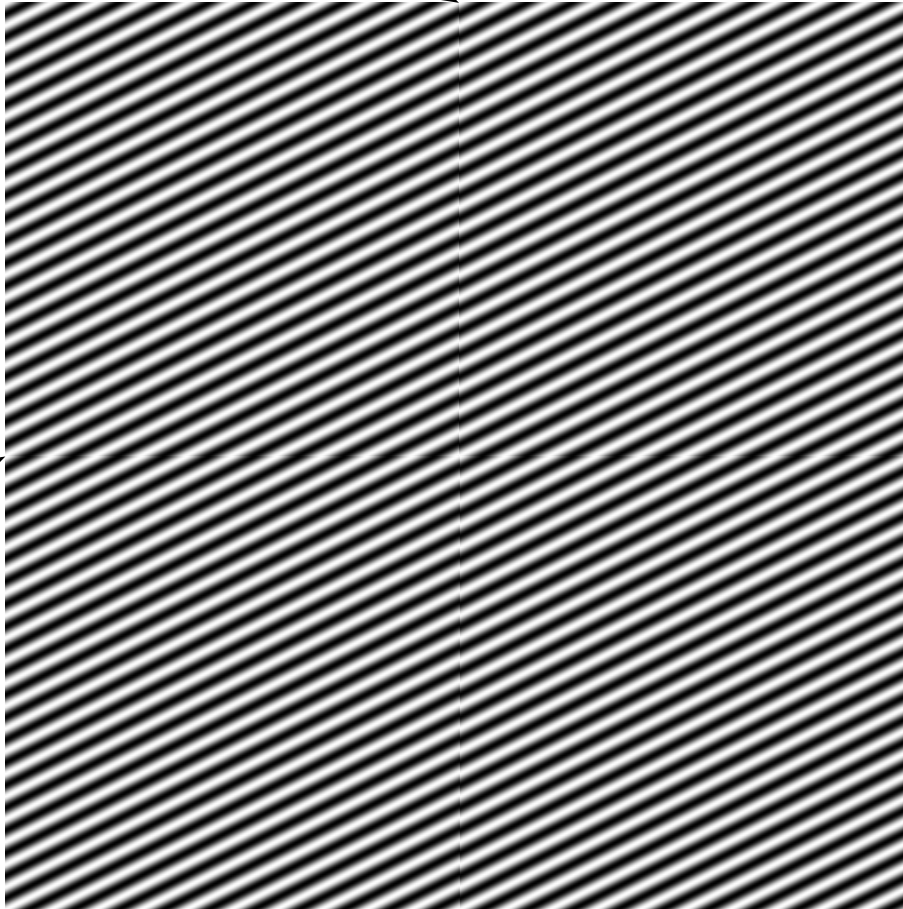
- **Diskontinuitet** oppstår når bildet ikke inneholdet et helt antall perioder!
- Fourier-spekteret blir da **utsmurt** i retningen for diskontinuiteten.

Eksempel: Fourier-spekter av cosinus ikke-heltallig frekvens

- Det samme skjer for «skrå» frekvenser.

Samplet
2D cosinus
med
frekvens
(20.1,10.1)

Overgang
mellom
replikater
(periodiske
utvidelser
av bildet)

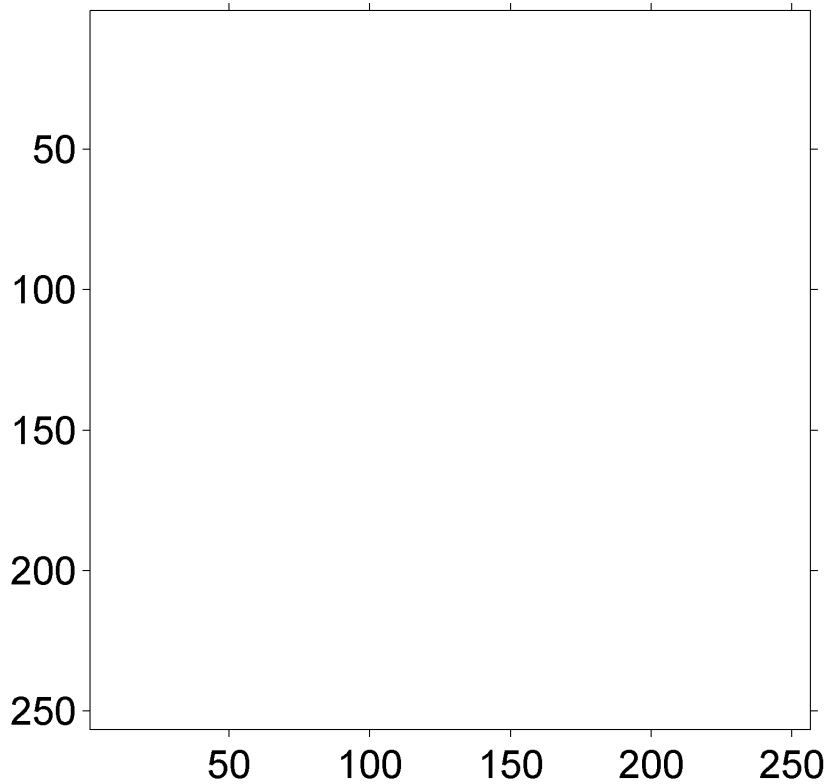


Svart og hvitt er hhv. 0 og maksverdien.
Vist med logaritmisk skala.

Svart og hvitt er hhv. -1 og 1.

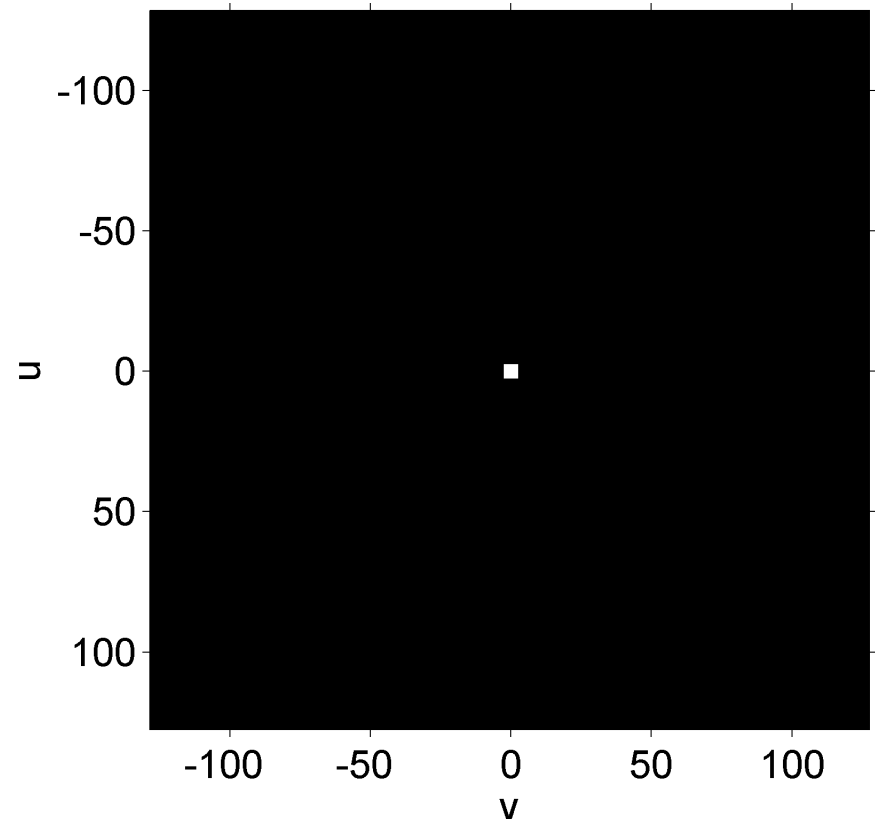
Eksempel: 2D DFT av cosinus med minste frekvens

Samplet 2D cosinus
med frekvens $(0,0)$



(bildet er 1 i alle piksler)

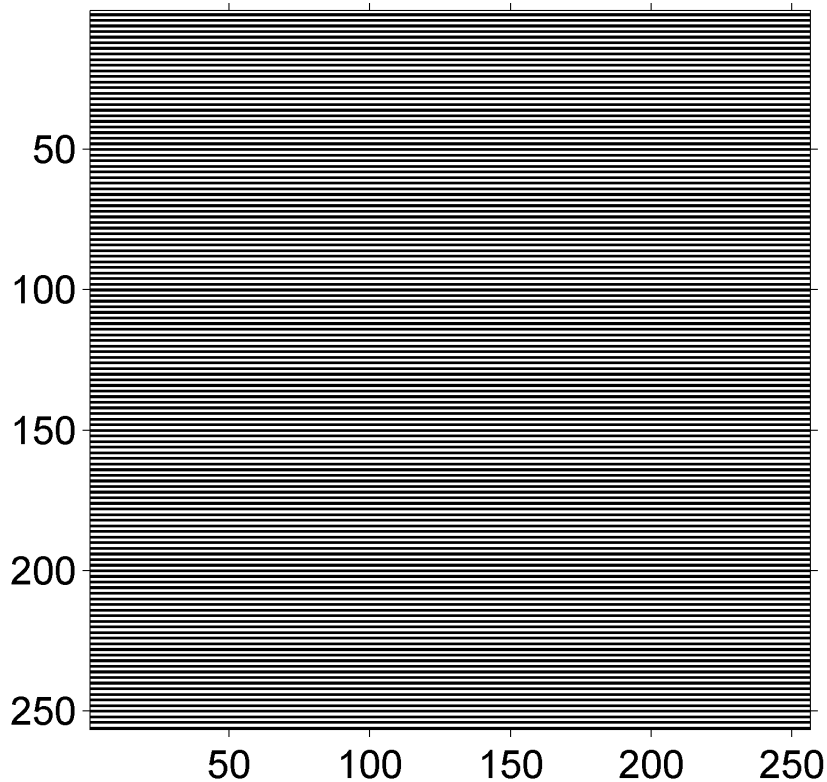
Fourier-spekteret
(her lik 2D DFT-en)



Svart og hvitt er hhv. 0 og MN.
Det hvite pikselet er forstørret for fremvisning.

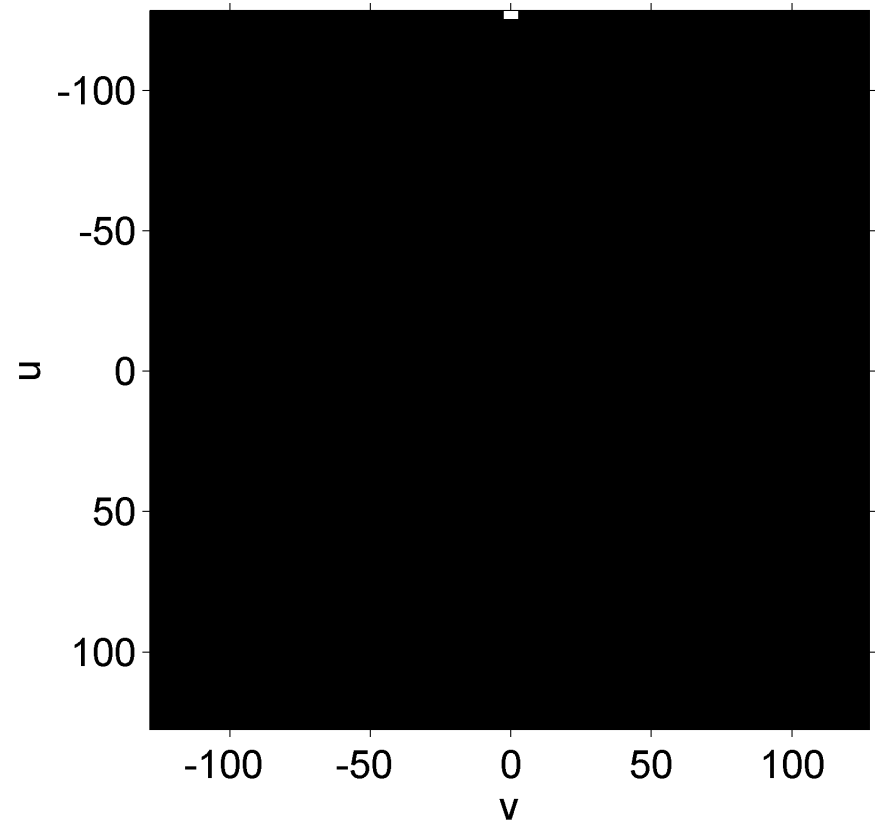
Eksempel: 2D DFT av cosinus med største vertikale frekvens

Samplet 2D cosinus
med frekvens (128,0)



Svart og hvitt er hhv. -1 og 1.

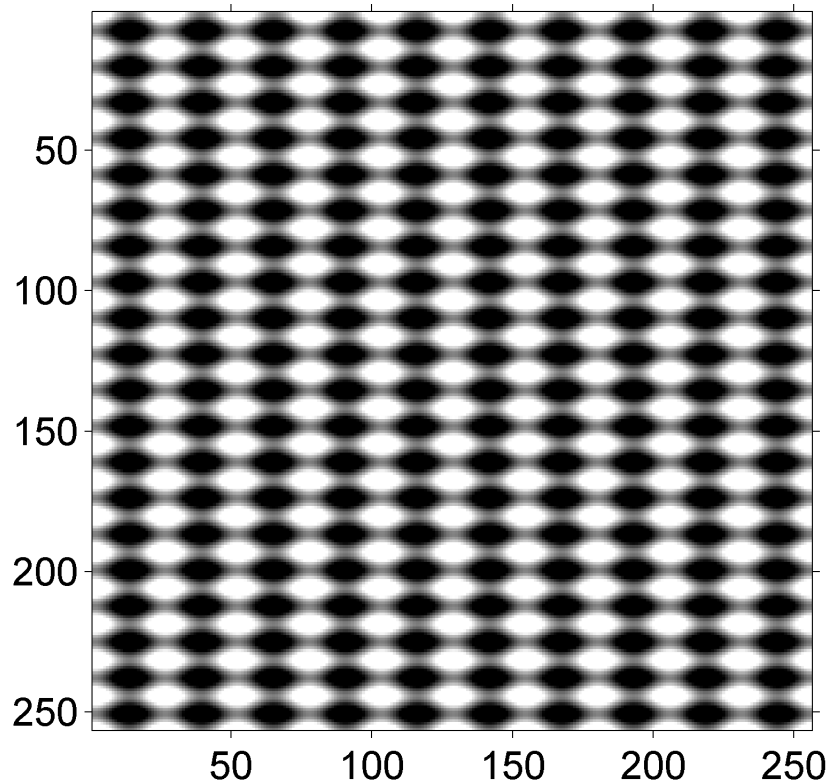
Fourier-spekteret
(her lik 2D DFT-en)



Svart og hvitt er hhv. 0 og MN.
Det hvite pikselet er forstørret for fremvisning.

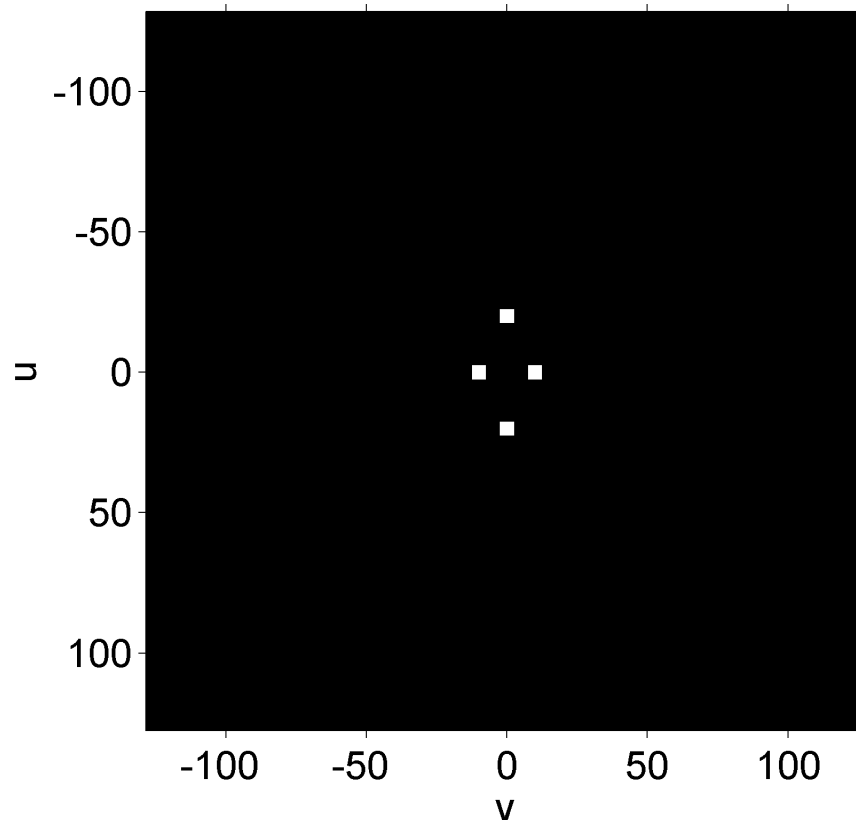
Eksempel: 2D DFT av summen av to cosinuser

cosinus med $(20,0)$ +
cosinus med $(0,10)$



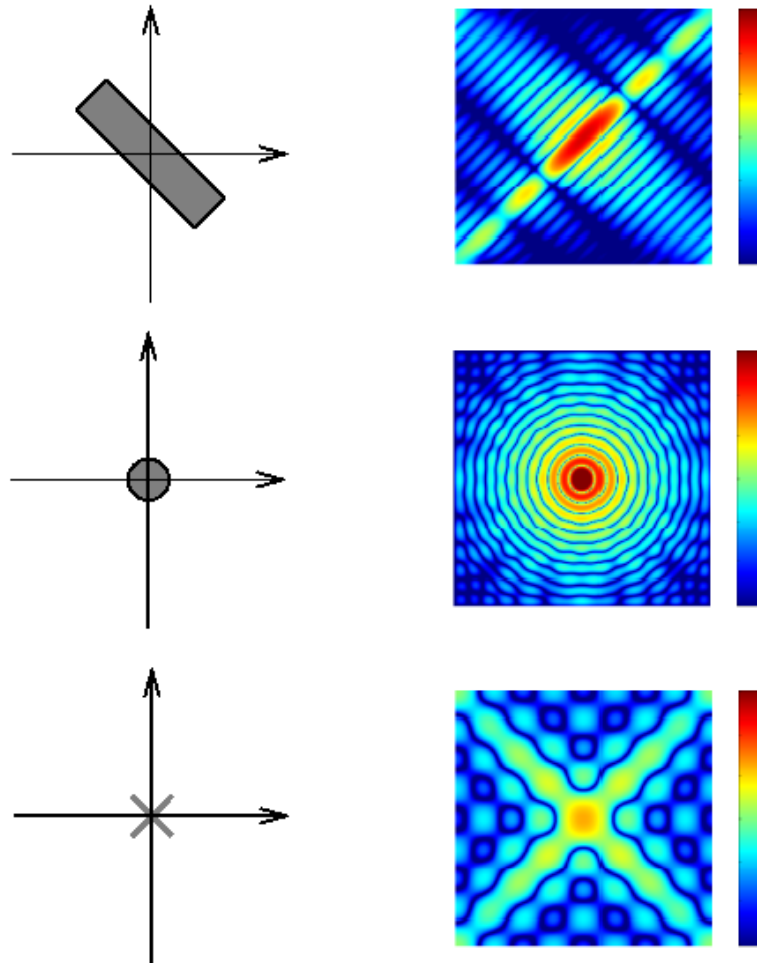
Svart og hvitt er hhv. -2 og 2.

Fourier-spekteret
(her lik 2D DFT-en)

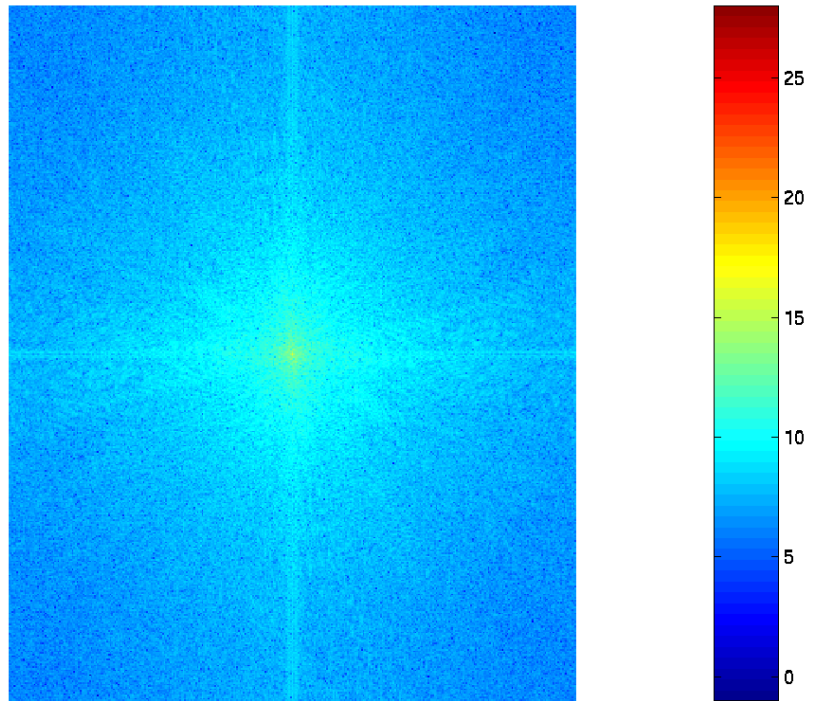


Svart og hvitt er hhv. 0 og $MN/2$.
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

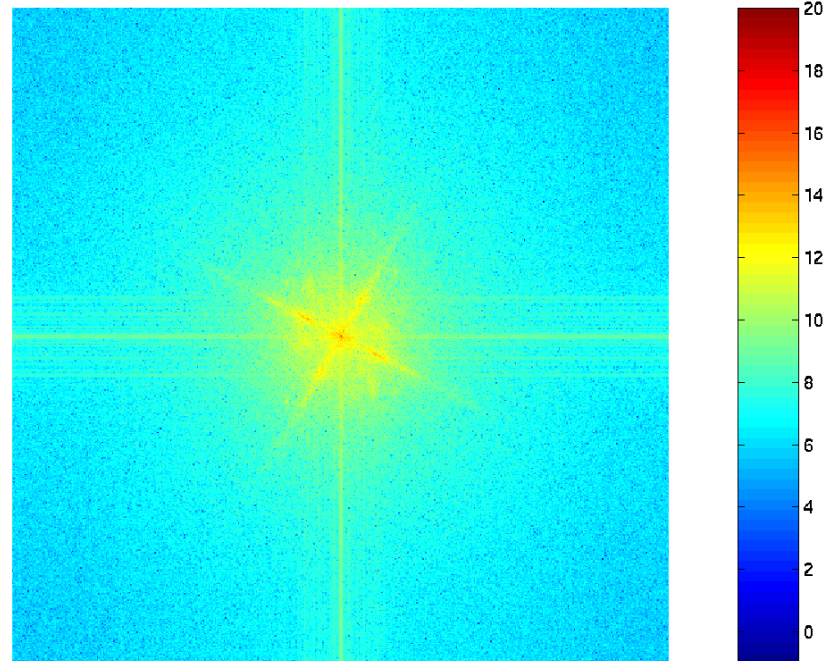
Eksempel: Fourier-spekteret av enkle strukturer



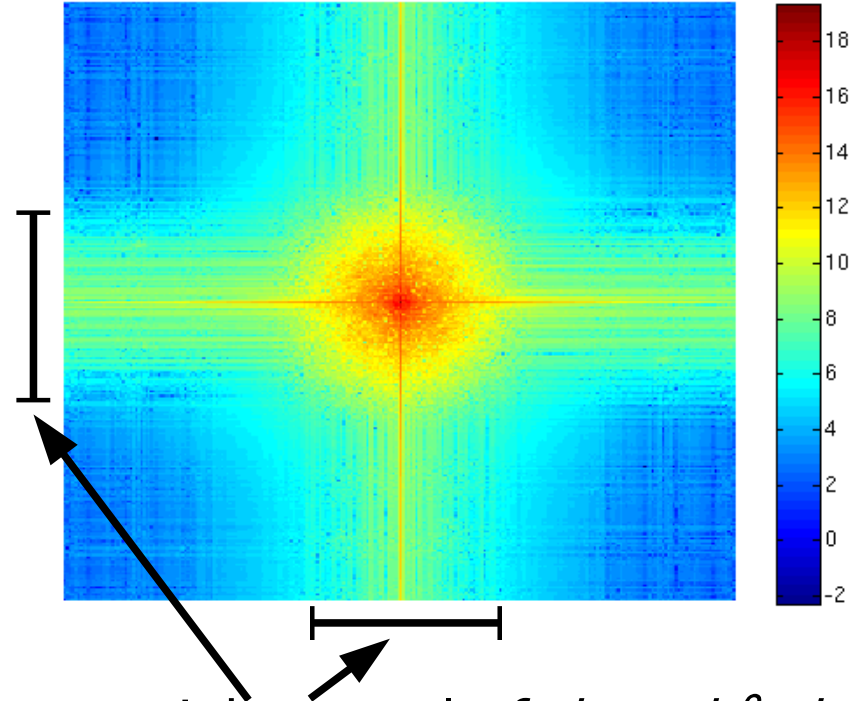
Eksempel: Fourier-spekteret av et «vanlig» bilde



Eksempel: Fourier-spekteret av retningsdominant bilde



Eksempel: Fourier-spekteret av bilde med smal båndbredde



Så å si all *energien* i Fourier-spekteret er i dette smale *frekvensbåndet*.

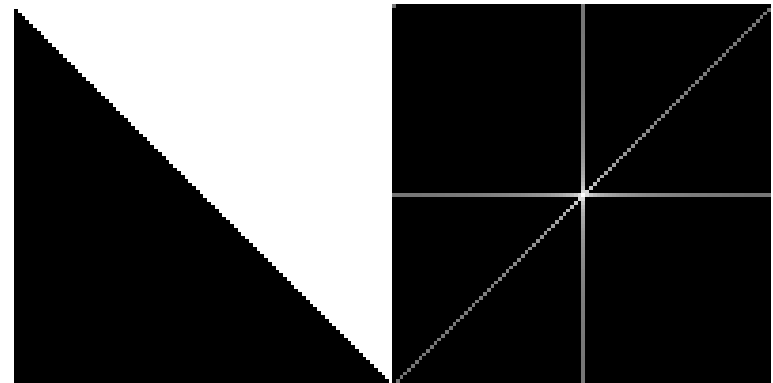
- Et *frekvensbånd* inneholder frekvenser med gitte lengder.
- *Energien* i et frekvensbånd er summen av alle frekvensenes *energi* ;
energien til en frekvens er frekvensens verdi i *energisppekteret*, $|F(u,v)|^2$.

Noen generelle observasjoner om Fourier-spektre

- De **lave frekvensene** (små u og v) inneholder vanligvis den meste av Fourier-spekterets energi.
- Vanligvis noe energi **langs u - og v -aksene**.
 - At bildet er implisitt antatt å være periodisk forårsaker vanligvis diskontinuiteter langs bilderanden og dermed større vertikale og horisontale bidrag.
- Tommelfingerregler om strukturer:
 - **Smal** struktur i bildet \Leftrightarrow **Bred** struktur i Fourier-spekteret
 - **Bred** struktur i bildet \Leftrightarrow **Smal** struktur i Fourier-spekteret
 - \Rightarrow Linjestructur i retning θ i bildet forårsaker linjestructur i retning $\theta \pm 90^\circ$ (vinkelrett på) i Fourier-spekteret.

Fourier-spekter og kanter

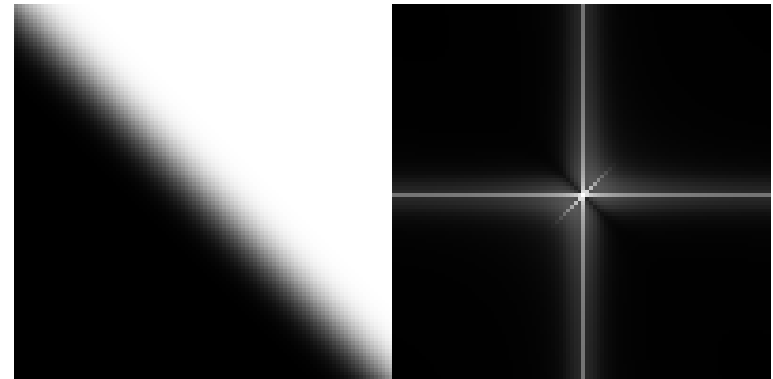
- **Skarp** kant:
 - Vektet sum av mange sin/cos med forskjellige frekvenser.
 - **Mange** positive koeffisienter i Fourier-spekteret.
 - Tydelig linje i Fourier-spekteret vinkelrett på kantretningen.



Bilde

Fourier-
spekter

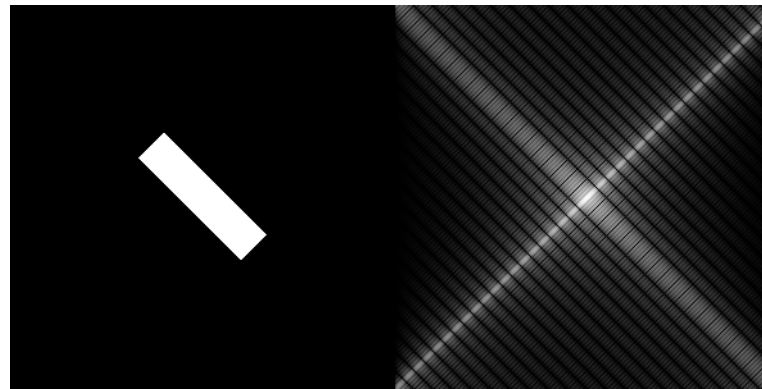
- **Glatt** kant:
 - Vektet sum av færre sin/cos med forskjellige frekvenser.
 - **Færre** positive koeffisienter i Fourier-spekteret.
 - Mindre tydelig linje i Fourier-spekteret vinkelrett på kantretningen.



Fourier-spekter og strukturers kanter

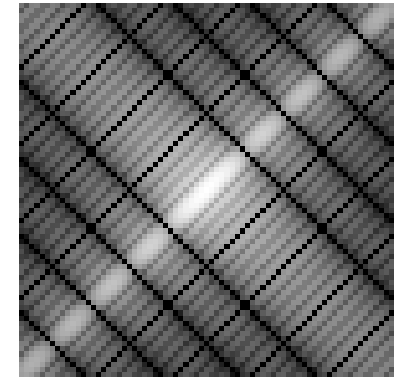
- Tommelfingerregelen:
«smal/bred struktur i bildet tilsvarer bred/smal struktur i Fourier-spekteret»
er akseptabel **uavhengig av kantskarpheten:**

- Glattingens negative påvirkning på verdiene i Fourier-spekteret øker med frekvensen.

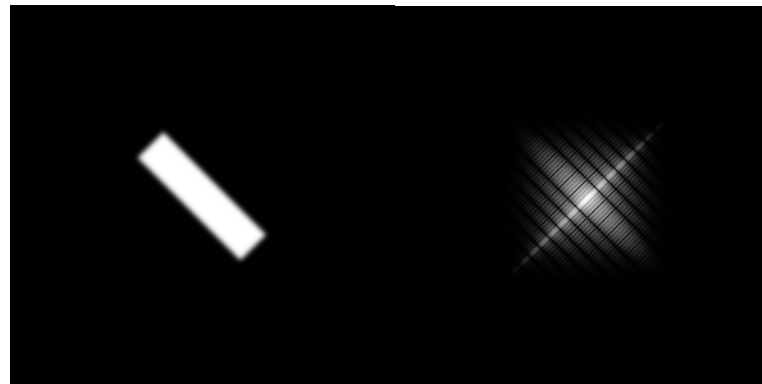


Bilde

Fourier-spekter



4x forstørret



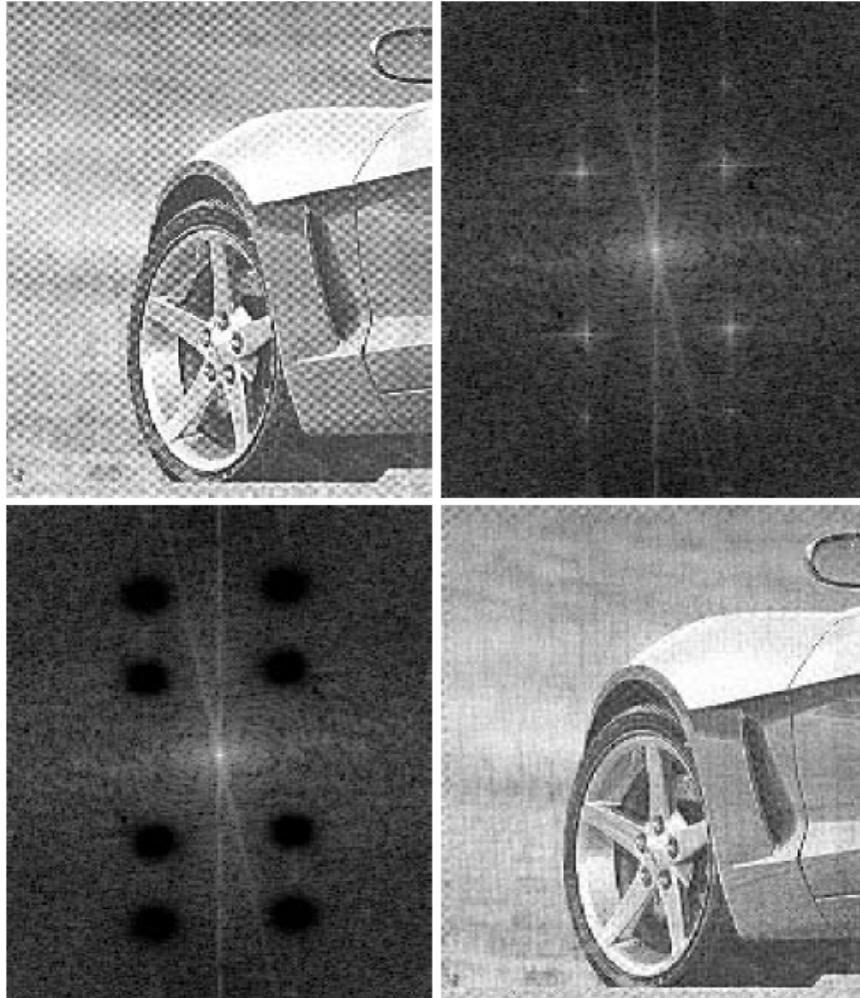
Implementasjon av 2D DFT

- La $f(x,y)$ være et $M \times N$ gråtonebildet.
- Å beregne $F(u,v)$ for én (u,v) ved bruk av definisjonen: $O(MN)$
- Å beregne hele 2D DFT: **$O(M^2N^2)$**
- *Fast Fourier-transform* (FFT) er en algoritme for rask beregning av DFT.
 - Bruker signaler (eller delsignaler) med lengde 2^k der k er heltallig.
 - Har orden $O(N \log_2 N)$ for et signal $f(x)$ av lengde N .
- 2D FFT beregner 2D DFT.
 - Beregner først DFT-ene av hver rad av gråtonebildet (med FFT) og deretter av hver kolonne av matrisen med DFT-radene (med FFT).
 - Har orden **$O(MN \log_2 (MN))$** .

Anvendelser av 2D DFT

- Konvolusjons-filtrering: (mer neste tirsdag!)
 - Design av lineære filtre med bestemte frekvenssegenskaper.
 - Fjerne/dempe visse frekvenser (lavpass, høypass, båndpass).
 - Fjerne periodisk støy.
 - Analyse av konvolusjonsfiltre.
 - Rask implementasjon av større konvolusjonsfiltre.
- Kompresjon:
 - Sterkt relatert til grunnpilaren i JPEG.
(mer i forelesning 12; Kompresjon og koding II)
- Bildeanalyse:
 - Karakterisere teksturer.
 - Karakterisere objekt-omriss.

Eksempel: Fjerne periodisk støy



Ut-bildet er resultatet av å konvolvare inn-bildet med et filter, men det er vanskelig å **designne** konvolusjonsfilteret i billedomenet.

Fig. 4.64 i DIP

2D DFT og Matlab/Octave

- `F = fft2(f);` % Beregn 2D DFT (ved bruk av 2D FFT)
- `f = ifft2(F);` % Beregn 2D IDFT (ved bruk av 2D IFFT)

- `F_r = real(F);` % Realdelen, altså cosinus-bildenes resultat
- `F_i = imag(F);` % Imaginærdelen, altså sinus-bildenes resultat
- `F_r(u+1,v+1);` % Summen av punktproduktet mellom gråtonebildet
 % og cosinus-bildet med frekvens (u,v)
- `F_r(1,1);` % (0,0)-frekvens, ofte kalt *DC-komponenten*

- `F_s = abs(F);` % Fourier-spekteret
- `F_p = angle(F);` % Fasen

- `F_c = fftshift(F);` % Shifter F slik at senterpikselet er DC
- `F = ifftshift(F_c);` % Shifter F_c tilbake (reverserer fftshift)

- `imagesc(log(abs(fftshift(F)) + 1));` % En måte å vise Fourier-spekteret på
- `imshow(log(abs(fftshift(F)) + 1), [0 max(log(abs(F(:))+1))]); axis on;` % annen måte

Oppsummering

- 2D DFT utfører et basisskifte.
 - Resultatet er en matrise av komplekse tall.
 - Disse tallene beskrives vanligvis ved deres amplitude og fase.
 - Både gråtonebildet og dets 2D DTF er implisitt antatt periodisk.
 - Dette er vanligvis er usann antagelse
 - ⇒ diskontinuitet langs bilderanden
 - ⇒ økt bidrag langs u- og v-aksen i Fourier-spekteret
 - Realdelen i (u,v) kan beregnes ved å summere punktproduktet mellom gråtonebildet og cosinus-bildet med frekvens (u,v) .
 - Tilsvarende kan imaginærdelen beregnes ved bruk av sinus-bildet.
- Fourier-spekteret beskriver hvilke frekvenser et gråtonebilde inneholder.
 - Smal/bred struktur i bildet \Leftrightarrow Bred/smål struktur i Fourier-spekteret
 - Skarp/glatt kant i bildet \Leftrightarrow Mange/færre positive koeffisienter i Fourier-spekteret