

# Det matematiske fundamentet til den diskrete Fourier-transformen

Supplement til forelesning 9  
INF2310 - Digital bildebehandling

Andreas Kleppe

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

8. april 2013

# Dagens mål

## Dagens mål

Forstå 2D diskret Fourier-transform (2D DFT) som et ortogonalt basisskifte, og bevise denne sammenhengen.

# Standard indreprodukt

- Standard indreprodukt i  $\mathbb{R}^N$  er:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \vec{x}^T \vec{y} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i$$

- Notasjon: Ofte én-indekseres vektorelementene i grunnleggende lineær algebra, men vi null-indeksrer.
  - Notasjon: Ofte angis dimensjonene med små bokstaver, men vi bruker store bokstaver, f.eks.  $N$  istedetfor  $n$ .
  - $\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$  er den euklidske normen.
- Standard indreprodukt i  $\mathbb{C}^N$  er:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \vec{x}^T \vec{y}^* = \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i^*$$

- Notasjon: \* betegner kompleks-konjugering.

# Ortogonalitet

- Et *indreproduktrom* er et vektorrom med et spesifikt indreprodukt.
  - F.eks.  $\mathbb{R}^3$  med den euklidske normen.
- To vektorer  $\vec{x}$  og  $\vec{y}$  kalles *ortogonale* i et indreproduktrom hvis  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ . Vi skriver at  $\vec{x} \perp \vec{y}$ .
  - Her betegner  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  indreproduktet til indreproduktrommet.

# Standard indreprodukt for komplekse matriser

- Standard indreprodukt i  $\mathbb{C}^{M,N}$  er:

$$\langle A, B \rangle := \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_{ij} b_{ij}^*$$

- To matriser  $A$  og  $B$  er ortogonale hvis  $\langle A, B \rangle = 0$ .
  - Dette er egentlig bare en spesialtilfelle av definisjonen på forrige slide fordi  $\mathbb{C}^{M,N}$  er et vektorrom på lik linje med  $\mathbb{C}^N$ ; begrepet *vektor* brukes i denne sammenhengen som en betegnelse på elementene i et vektorrom.

# Basis

- En *basis* for et vektorrom  $V$  er en mengde vektorer  $\{\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{N-1}\}$  (der  $\vec{v}_i \in V$  for alle  $i$ ) som:
  - 1 Er lineært uavhengige, d.v.s.,  $\sum_{i=0}^{N-1} c_i \vec{v}_i = 0 \Rightarrow c_i = 0 \forall i$
  - 2 Utspenner  $V$ , d.v.s.,  $V = \text{Span}\{v_0, \dots, v_{N-1}\}$
- En basis (for  $V$ ) kan betraktes som en minst mulig mengde som kan representere alle vektorer (i  $V$ ).
- Å skifte basisen som brukes til å uttrykke en vektor kalles et *basisskifte*.
- Et basisskifte endrer hvordan vektoren er representert, men ikke hva den representerer.

# Ortogonal basis I

- En mengde vektorer  $\{\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{N-1}\}$  kalles en *ortogonal mengde* dersom  $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0 \forall i \neq j$
- En *ortogonal basis* er en basis og en ortogonalt mengde.
- Et *ortogonalt basisskifte* er et basisskifte mellom ortogonale basiser.

# Ortogonal basis II

## Teorem: Ortogonalt basisskifte

La  $S := \{\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{N-1}\}$  være en ortogonal basis for et indreproduktrom. Enhver  $\vec{y}$  i dette rommet kan da skrives som:

$$\vec{y} = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \vec{v}_i$$

der  $c_i$  for  $i = 0, 1, \dots, N - 1$  er gitt ved:

$$c_i = \frac{\langle \vec{y}, \vec{v}_i \rangle}{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle}$$

der  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  betegner indreproduktet til indreproduktrommet.  $c_0, c_1, \dots, c_{N-1}$  kalles koordinatene til  $\vec{y}$  m.h.p.  $S$ .



# En ortogonal basis

For  $u = 0, 1, \dots, M - 1$  og  $v = 0, 1, \dots, N - 1$ , la:

$$A_{u,v} := \frac{1}{MN} \begin{bmatrix} e^{j2\pi\left(\frac{u \cdot 0}{M} + \frac{v \cdot 0}{N}\right)} & \dots & e^{j2\pi\left(\frac{u \cdot 0}{M} + \frac{v(N-1)}{N}\right)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi\left(\frac{u(M-1)}{M} + \frac{v \cdot 0}{N}\right)} & \dots & e^{j2\pi\left(\frac{u(M-1)}{M} + \frac{v(N-1)}{N}\right)} \end{bmatrix}$$

## Teorem

$A = \{A_{u,v} \mid u = 0, 1, \dots, M - 1 \wedge v = 0, 1, \dots, N - 1\}$  er en ortogonal basis for  $\mathbb{C}^{M,N}$  m.h.p. standard indreprodukt i  $\mathbb{C}^{M,N}$ .

# En ortogonal basis - bevis (basis)

Dersom  $A$  er en ortogonal *mengde*

må den også være en *basis* for det aktuelle rommet,  $\mathbb{C}^{M,N}$ :

- 1 Siden elementene i  $A$ ,  $A_{u,v}$ , er ulik 0-matrisen, vil ortogonalitet medføre lineær uavhengighet.
- 2  $A$  utspenner  $\mathbb{C}^{M,N}$  hvis elementene er lineært uavhengige:
  - Det finnes  $MN$  elementer i  $A$ .
  - Hver matrise ligger i  $\mathbb{C}^{M,N}$ .
  - Dimensjonen av  $\mathbb{C}^{M,N}$  er  $MN$ .
  - $\Rightarrow$  dersom elementene i  $A$  er lineært uavhengige må de utspenne  $\mathbb{C}^{M,N}$ .

Altså står og faller hele teoremet på om  $A$  er en ortogonal mengde.

# En ortogonal basis - bevis (ortogonalitet I)

$A$  er en ortogonal mengde hvis og bare hvis  $\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = 0$  når  $u \neq u'$  og/eller  $v \neq v'$ . Generelt er:

$$\begin{aligned}\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle &= \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} e^{j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} e^{-j2\pi \left( \frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N} \right)} \\ &= \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} e^{j2\pi \left( \frac{(u-u')x}{M} + \frac{(v-v')y}{N} \right)}\end{aligned}$$

Dersom  $u = u'$  og  $v = v'$  (trengs ikke for å vise ortogonalitet):

$$\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} e^0 = \frac{1}{MN}$$

## En ortogonal basis - bevis (ortogonalitet II)

Dersom  $v \neq v'$ :

$$\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} e^{j2\pi \frac{(u-u')x}{M}} \sum_{y=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{(v-v')y}{N}}$$

Siden  $v \neq v'$  vil  $v - v' \in \{-(N-1), \dots, -1, 1, \dots, N-1\}$  og dermed  $e^{j2\pi \frac{v-v'}{N}} \neq 1$ . Siden  $\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1-r^n}{1-r}$  når  $r \neq 1$ :

$$\begin{aligned} \langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle &= \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} e^{j2\pi \frac{(u-u')x}{M}} \cdot \frac{1 - e^{j2\pi(v-v')}}{1 - e^{j2\pi \frac{v-v'}{N}}} \\ &= \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} e^{j2\pi \frac{(u-u')x}{M}} \cdot \frac{1 - 1}{1 - e^{j2\pi \frac{v-v'}{N}}} = 0 \end{aligned}$$

# En ortogonal basis - bevis (ortogonalitet III)

Dersom  $u \neq u'$  kan vi føre et helt tilsvarende resonnement for å vise at  $\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = 0$ :

- 1 Bytt summasjonsrekkefølgen.
- 2 Trekk ut potensen med  $v - v'$  i eksponenten fra indre sum.
- 3  $u - u' \in \{-(M-1), \dots, -1, 1, \dots, M-1\}$   
 $\Rightarrow e^{j2\pi \frac{u-u'}{M}} \neq 1$   
 $\Rightarrow$  kan bruke formelen for geometrisk rekke.
- 4 Telleren blir 0  $\Rightarrow$  hele uttrykket blir 0.

# En ortogonal basis - bevis (ortogonalitet IV)

Vi har altså vist at  $\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = (MN)^{-1} \delta(u - u', v - v')$ ,  
der  $\delta$  er Kronecker delta, d.v.s. at:

- 0 når  $u \neq u'$  og/eller  $v \neq v'$ .
  - $\Rightarrow A$  er en ortogonal mengde.
- $(MN)^{-1}$  når  $u = u'$  og  $v = v'$ .
  - $\Rightarrow$  mengden av  $\sqrt{MNA_{u,v}}$  for  $u = 0, 1, \dots, M - 1$  og  $v = 0, 1, \dots, N - 1$  er en *ortonormal* mengde (d.v.s. en ortogonal mengde der alle elementene har indreproduktnorm 1).

Sammen med basis-beviset har vi dermed bevist teoremet;  
 $A = \{A_{u,v} \mid u = 0, 1, \dots, M - 1 \wedge v = 0, 1, \dots, N - 1\}$  er en  
ortogonal basis for  $\mathbb{C}^{M,N}$  m.h.p. standard indreprodukt i  $\mathbb{C}^{M,N}$ .



# 2D DFT - et ortogonalt basisskifte I

Siden  $A$  er en ortogonal basis for  $\mathbb{C}^{M,N}$  m.h.p. dets standard indreprodukt, så sier teoremet om ortogonalt basisskifte at:

- Enhver  $f \in \mathbb{C}^{M,N}$  oppfyller:

$$f = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} c_{u,v} A_{u,v}$$

som etter og omdøpt  $c_{u,v}$  til  $F(u, v)$  kan skrives på komponentform som:

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

# 2D DFT - et ortogonalt basisskifte II

Videre sier teoremet om ortogonalt basisskifte:

- ... der  $c_{u,v} = F(u, v)$  for  $u = 0, 1, \dots, M - 1$  og  $v = 0, 1, \dots, N - 1$  er gitt ved:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{\langle f, A_{u,v} \rangle}{\langle A_{u,v}, A_{u,v} \rangle} \\ &= \frac{(MN)^{-1} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}}{(MN)^{-1}} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \end{aligned}$$



## 2D DFT - et ortogonalt basisskifte III

- Vi definerer 2D diskret Fourier-transform (2D DFT) av et bilde  $f \in \mathbb{R}^{M,N}$  som koordinatene til  $f$  m.h.p.  $A$ .
- Altså er 2D DFT av  $f$  matrisen  $F \in \mathbb{C}^{M,N}$  som er gitt ved:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

for  $u = 0, 1, \dots, M - 1$  og  $v = 0, 1, \dots, N - 1$ .

- Vi gå tilbake til standardbasisen for matriser ved å bruke:

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

for  $x = 0, 1, \dots, M - 1$  og  $y = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Kalles 2D invers diskret Fourier-transform (2D IDFT).

# Egenskaper ved 2D DFT: Periodisk

Betegn 2D DFT-en til bildet  $f \in \mathbb{R}^{M,N}$  som  $F$ .

$F$  er periodisk

$F(u, v) = F(u + kM, v + kN)$  når  $k \in \mathbb{Z}$ .

Bevis:

$$\begin{aligned} F(u + kM, v + kN) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left( \frac{(u+kM)x}{M} + \frac{(v+kN)y}{N} \right)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} e^{-j2\pi k(x+y)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} = F(u, v) \end{aligned}$$

□

PS: Gjelder selv om  $f$  er kompleks.

# Egenskaper ved 2D DFT: $f$ blir også periodisk

Betegn 2D DFT-en til bildet  $f \in \mathbb{R}^{M,N}$  som  $F$ .

$f$  er periodisk

$f(x, y) = f(x + kM, y + kN)$  når  $k \in \mathbb{Z}$ .

Bevis: Som forrige:

$$\begin{aligned} f(x + kM, y + kN) &= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi \left( \frac{(u+kM)x}{M} + \frac{(v+kN)y}{N} \right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} e^{j2\pi k(x+y)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} = f(x, y) \quad \square \end{aligned}$$

Altså antas indirekte at  $f$  er periodisk når vi bruker 2D DFT.

# Egenskaper ved 2D DFT: Konjugert symmetrisk

Betegn 2D DFT-en til bildet  $f \in \mathbb{R}^{M,N}$  som  $F$ .

$F$  er konjugert symmetrisk

$$F(u, v) = F^*(-u, -v).$$

Bevis:

$$\begin{aligned} F^*(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f^*(x, y) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} = F(-u, -v) \end{aligned}$$

Siden  $F(-u, -v) = F^*(u, v)$ , så er  $F(u, v) = F^*(-u, -v)$ .

□

Merk:  $f$  må være reell!

# Egenskaper ved 2D DFT: Sinus og cosinus I

Eulers formel relaterer den komplekse eksponentialen til de trigonometriske funksjonene:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

Fra denne formelen får vi de to trigonometriske identitetene:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\cos \theta + \cos \theta}{2} + \frac{j \sin \theta - j \sin \theta}{2} \\ &= \frac{\cos \theta + j \sin \theta + \cos(-\theta) + j \sin(-\theta)}{2} = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{j \sin \theta + j \sin \theta}{2j} + \frac{\cos \theta - \cos \theta}{2j} \\ &= \frac{j \sin \theta + \cos \theta - j \sin(-\theta) - \cos(-\theta)}{2j} = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \end{aligned}$$

## Egenskaper ved 2D DFT: Sinus og cosinus II

## Korollar: 2D DFT av en samplet 2D cosinus

2D DFT-en av cosinusen  $f(x, y) = \cos\left(2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)\right)$ ,  
der  $x = 0, 1, \dots, M-1$  og  $y = 0, 1, \dots, N-1$ ,  
er  $F(u, v) = \frac{MN}{2} (\delta(u - u', v - v') + \delta(u + u', v + v'))$ .

Bevis:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \cos\left(2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)\right) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \frac{e^{j2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)} + e^{-j2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)}}{2} e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \frac{MN}{2} (\delta(u - u', v - v') + \delta(u + u', v + v')) \end{aligned}$$

□

## Egenskaper ved 2D DFT: Sinus og cosinus III

## Korollar: 2D DFT av en samplet 2D sinus

2D DFT-en av sinusen  $f(x, y) = \sin\left(2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)\right)$ ,  
der  $x = 0, 1, \dots, M - 1$  og  $y = 0, 1, \dots, N - 1$ ,  
er  $F(u, v) = \frac{MN}{2j} (\delta(u - u', v - v') - \delta(u + u', v + v'))$ .

Bevis: Helt analogt med forrige bevis:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \sin\left(2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)\right) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \frac{e^{j2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)} - e^{-j2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)}}{2j} e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \frac{MN}{2j} (\delta(u - u', v - v') - \delta(u + u', v + v')) \end{aligned}$$

□

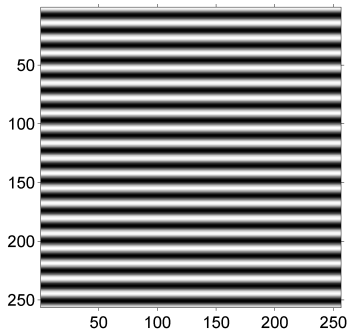
# Egenskaper ved 2D DFT: Sinus og cosinus IV

- 2D DFT-en til en samplet 2D sinus eller cosinus med frekvens  $(u', v')$  er altså hhv.  
 $\frac{MN}{2j} (\delta(u - u', v - v') - \delta(u + u', v + v'))$  og  
 $\frac{MN}{2} (\delta(u - u', v - v') + \delta(u + u', v + v'))$ .
  - Enheten til frekvensen er per bildelengde,  $M \times N$ .
- Absoluttverdien av 2D DFT-en angir frekvensen!
  - At det er et symmetrisk par er en nødvendighet ettersom  $f$  er reell;  
vi har jo vist at 2D DFT da er konjugert symmetrisk.



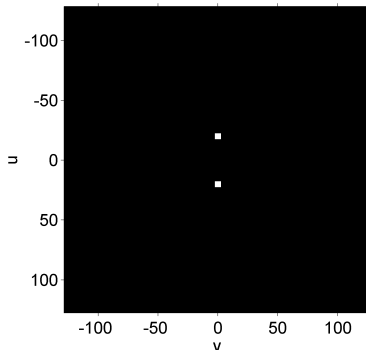
## Eksempel I: 2D DFT av samplet 2D cosinus

Samplet 2D cosinus  
med frekvens  $(20, 0)$



Svart og hvitt indikerer hhv. -1 og 1.

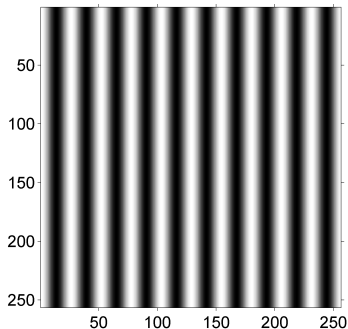
(Absoluttverdien av)  
2D DFT-en



Svart og hvitt indikerer hhv. 0 og  $MN/2$ .  
Merk at senterpikselet er  $(0,0)$ -frekvensen.  
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

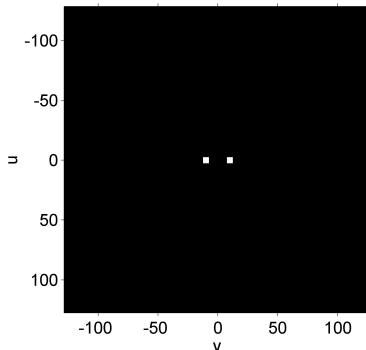
## Eksempel II: 2D DFT av samplet 2D cosinus

Samplet 2D cosinus  
med frekvens  $(0, 10)$



Svart og hvitt indikerer hhv. -1 og 1.

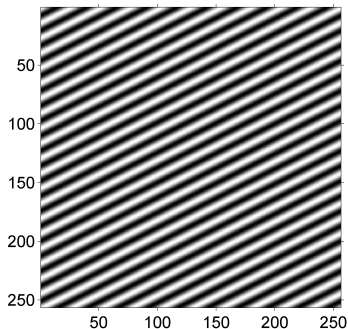
(Absoluttverdien av)  
2D DFT-en



Svart og hvitt indikerer hhv. 0 og  $MN/2$ .  
Merk at senterpikselet er  $(0,0)$ -frekvensen.  
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

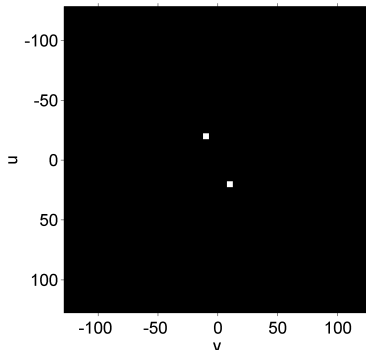
## Eksempel III: 2D DFT av samplet 2D cosinus

Samplet 2D cosinus  
med frekvens (20, 10)



Svart og hvitt indikerer hhv. -1 og 1.

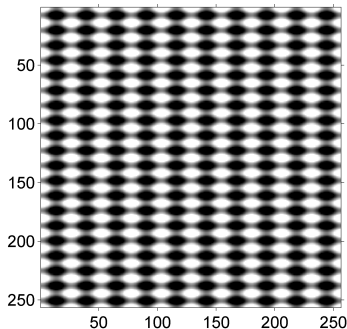
(Absoluttverdien av)  
2D DFT-en



Svart og hvitt indikerer hhv. 0 og  $MN/2$ .  
Merk at senterpikselet er (0,0)-frekvensen.  
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

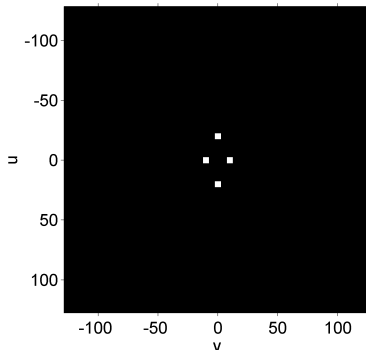
## Eksempel IV: 2D DFT av summen av to cosinuser

cosinus med  $(20, 0)$  +  
cosinus med  $(0, 10)$



Svart og hvitt indikerer hhv.  $-2$  og  $2$ .

(Absoluttverdien av)  
2D DFT-en



Svart og hvitt indikerer hhv.  $0$  og  $MN/2$ .  
Merk at senterpikselet er  $(0,0)$ -frekvensen.  
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

## Oppsummering

- 2D DFT av bildet  $f \in \mathbb{R}^{M,N}$  er koordinatene til  $f$  m.h.p.  $A = \{A_{u,v} : u = 0, 1, \dots, M-1 \wedge v = 0, 1, \dots, N-1\}$ , der:

$$A_{u,v} := \frac{1}{MN} \begin{bmatrix} e^{j2\pi\left(\frac{u \cdot 0}{M} + \frac{v \cdot 0}{N}\right)} & \dots & e^{j2\pi\left(\frac{u \cdot 0}{M} + \frac{v(N-1)}{N}\right)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi\left(\frac{u(M-1)}{M} + \frac{v \cdot 0}{N}\right)} & \dots & e^{j2\pi\left(\frac{u(M-1)}{M} + \frac{v(N-1)}{N}\right)} \end{bmatrix}$$

- $A$  er en ortogonal basis for  $\mathbb{C}^{M,N}$ .
- 2D DFT av en sinus eller cosinus med frekvens  $(u, v)$  er kun ulik 0 i  $(u, v)$  og  $(-u, -v)$ .