INF2310 – Digital bildebehandling

Forelesning 14

Morfologiske operasjoner på binære bilder

Andreas Kleppe

Repetisjon av grunnleggende mengdeteori

Fundamentale operatorer

Sammensatte operatorer

Eksempler på anvendelser

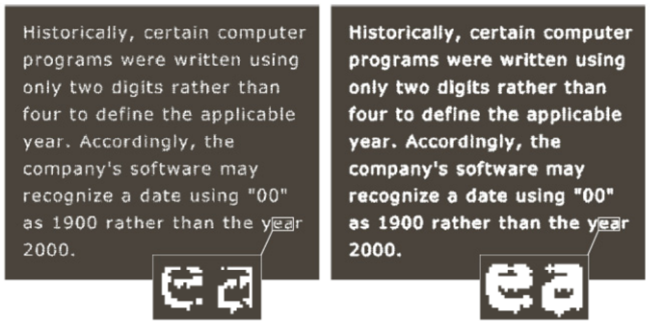
G&W: 9.1-9.5.2 og 9.5.5, og deler av 2.6.4 og 9.5.9

Introduksjon

- **Matematisk morfologi** brukes ofte som et steg i analyse av bilder.
- **Modifiserer formen** (eng.: *shape*) **til objekter** v.b.a. lokale operasjoner.
- Kan brukes til å **fjerne uønskede effekter** etter segmentering:
  - Fjerne små objekter (antas å være støy).
  - Glatte omrisset til større objekter.
  - Fylle hull i objekter.
  - Lenke sammen objekter.
- Kan brukes som et steg for å **beskrive/analysere av objekter**:
  - Finne omriss av objekter.
  - Tynne objekter.
  - Finne objekter som inneholder en viss struktur.
  - Finne mønstre i et bilde.
- Operasjonene er ofte enkle og kan utføres svært raskt.
- Kan generaliseres til gråtonebilder (har da enda flere anvendelser).

Eksempel: Lenke sammen objekter

- Morfologiske operasjoner er ofte velegnet til å forbedre en segmentering.
- Eks.: Lenke sammen defragmentere objekter:



0	1	0
1	1	1
0	1	0

a c
b

FIGURE 9.7 (a) Sample text of poor resolution with broken characters (see magnified view). (b) Structuring element. (c) Dilation of (a) by (b). Broken segments were joined.

Litt mengdeteori

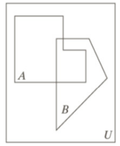
- En **mengde** (eng.: *set*) består av **elementer**.
  - **Rekkefølgen** av elementene og **antallet** av hver element er **ubestemt**.
- Dersom elementet a er inneholdt i mengden A skriver vi: $a \in A$
- Dersom elementet a ikke er inneholdt i mengden A skriver vi: $a \notin A$
- $\varnothing$ er mengden uten noen elementer og kalles **den tomme mengden**.
- A^c er **komplementet til A** og består av alle elementene som ikke er i A.

- **A er en delmengde av B** dersom alle elementene i A også er elementer i B, og dette betegnes: $A \subseteq B$
- **Unionen av to mengder A og B** er mengden som består av alle elementer som er i A og/eller B, og dette betegnes: $A \cup B$
- **Snittet av to mengder A og B** er mengden som består av alle elementer som er i både A og B, dette betegnes: $A \cap B$

Mengder og binære bilder

- La A være en mengde i Z^2.
  - Hvert element i A er da et punkt (a_1, a_2) der a_1 og a_2 er heltall.
- Et binært bilde kan beskrives ved forgrunnspikslenes koordinater. Mengden av disse pikslene er en mengde i Z^2.

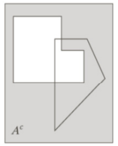
Konturen av to binære bilder, A og B



I figurene markerer grått med i mengden, og hvitt ikke med. (Fra figur 2.31 i G&W)

- **Komplementet** til et binært bilde f:

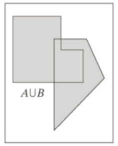
$$h(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ hvis } f(x,y) = 0 \\ 0 \text{ hvis } f(x,y) = 1 \end{cases}$$



Komplementet til A

- **Unionen** av to bilder f og g:

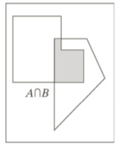
$$h = f \cup g \equiv h(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ hvis } f(x,y) = 1 \text{ eller } g(x,y) = 1 \\ 0 \text{ ellers} \end{cases}$$



Unionen av A og B

- **Snittet** av to bilder f og g:

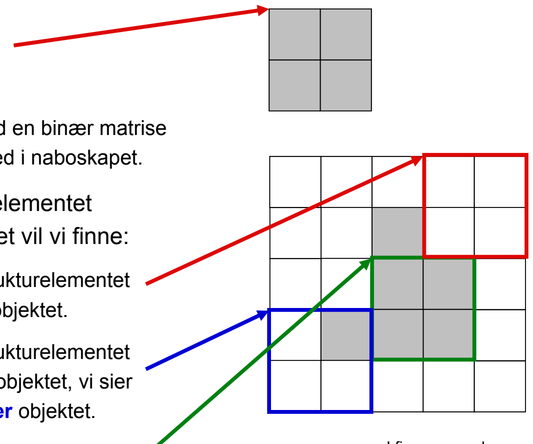
$$h = f \cap g \equiv h(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ hvis } f(x,y) = 1 \text{ og } g(x,y) = 1 \\ 0 \text{ ellers} \end{cases}$$



Snittet av A og B

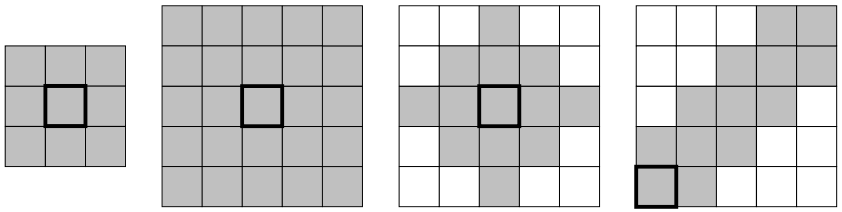
Tre sentrale begrep

- Et **strukturelement** for et binært bilde er et **naboskap**.
  - Typisk definert ved en binær matrise der 1 markerer med i naboskapet.
- Når vi fører strukturelementet over det binære bildet vil vi finne:
  - Posisjoner der strukturelementet **ikke overlapper** objektet.
  - Posisjoner der strukturelementet delvis overlapper objektet, vi sier at elementet **treffer** objektet.
  - Posisjoner der strukturelementet ligger inni objektet, vi sier at elementet **passer** i objektet.



I figurene markerer grått med i mengden (forgrunnspiksel), og hvitt ikke med.

Strukturelementenes form og origo

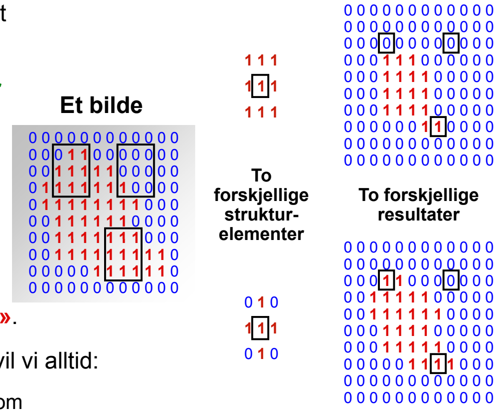


I figurene markerer grått med i naboskapet / strukturelementet, og hvitt ikke med.

- Strukturelementer kan ha ulik form og størrelse.
- Må bestemme et **origo**.
  - Origo markerer pikselen som evt. endrer verdi.
  - Origo *kan* ligge utenfor strukturelementet.
  - Origo bør markeres når man angir strukturelementet, f.eks. ved $\square$

Passer strukturelementet til det binære bildet?

- Vi flytter strukturelementet rundt over et binært bilde.
- Strukturelementet **passer** i posisjonen (x,y) i bildet hvis hvert element ≠ 0 i strukturelementet overlapper en pikselverdi ≠ 0 i bildet.
- Kan tenkes på som en **«minimums-korrelasjon»**.
- I denne sammenhengen vil vi alltid:
  - Ignorere pikselverdier som overlapper 0 i strukturelementet.
    - 0 markerer jo «ikke er med i naboskapet».
  - Anta at piksler utenfor bildet er 0.



Erosjon

- Plasser strukturelementet S slik at origo overlapper posisjon (x,y) inn-bildet f, og beregn ut-bildet g ved å bruke regelen:

$$g(x,y)=\begin{cases}1 & \text{hvis S passer f}\\ 0 & \text{ellers}\end{cases}$$

- Erosjon av et bilde f med strukturelementet S betegnes:

$$f \;\theta\; S$$

- Mer presist: Erosjonen av mengden A med strukturelementet B er definert som posisjonene til alle piksler z som er slik at B er inkludert i A når origo i B plasseres i z:

$$A \;\theta\; B=\{z\,|\,(B)_z \subseteq A\}$$

```
0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0
1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0
0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0
0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0
0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0
0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0
0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1
0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0
```

erodert med

```
1 1 1        0 1 0
1 [1] 1      1 [1] 1
1 1 1        0 1 0
```

gir / **gir**

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0      0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0      0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```


Effekter av erosjon

- Erodering **krymper** objekter.
- Piksler fjernes også innenfra, hvis objektet har hull.
- Erosjon fjerner «små» utstikk i objektets omriss.
  - «Små» er relativt til størrelsen av strukturelementet.
- Erosjon utvider innbuktninger i objektets omriss.
- Resultatet er avhengig av strukturelementet.
- Større strukturelement gir mer erosjon/fjerning.

```
0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0
```

erodert med

```
1 1 1        0 1 0
1 [1] 1      1 [1] 1
1 1 1        0 1 0
```

gir / **gir**

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0      0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 0
0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0      0 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0
0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0      0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0
0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0      0 0 1 1 0 1 1 1 1 1 0
0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0      0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0      0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```


Iterativ erosjon

- Vi sa at «Større strukturelement gir mer erosjon/fjerning».
- Resultatet av erosjon med et **stort strukturelement** er (nesten) **lik** resultatet av **gjentatt** erosjon med et **mindre strukturelement** med samme form.
- Hvis s_2 er formlik s_1, men dobbelt så stort, så er:

$$f \ominus s_2 \approx (f \ominus s_1) \ominus s_1$$

```
0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0
```

erodert 2 ganger med

```
1 1 1        0 1 0
1 [1] 1      1 [1] 1
1 1 1        0 1 0
```

gir / **gir**

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0      0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0      0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```


Anvendelse av erosjon: Kantdeteksjon

- Erodering fjerner piksler langs omrisset av et objekt.
- Vi kan finne kantene av objektene i bildet ved å subtrahere et erodert bilde fra originalbildet: **g = f - (f ⊖ S)**
- Strukturelementet avgjør 4- eller 8-tilkoblet:

Et bilde

```
0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0
```

erodert med / **gir** => **differanse**

```
0 1 0
1 [1] 1
0 1 0
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0
0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 0      0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0
0 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0      0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0
0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0      1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1
0 0 1 1 0 1 1 1 1 1 0      0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 1
0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0      0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0      0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0
```

Sammenhengende kanter dersom man bruker 8-tilkobling

```
1 1 1
1 [1] 1
1 1 1
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0
0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0      0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 0
0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0      0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0
0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0      1 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1
0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0      0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 1
0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0      0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0      0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0      0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0
```

Sammenhengende kanter ved bruk av 4-tilkobling

Eksempel: Kantdeteksjon ved erosjon

```
0 1 0
1 1 1
0 1 0
```

```
1 1 1
1 1 1
1 1 1
```

Et bilde **erodert med** **=>** **differanse**

Treffer strukturelementet det binære bildet?

- Vi flytter strukturelementet rundt over et binært bilde.
- Strukturelementet **treffer** i posisjonen (x,y) i bildet hvis et element ≠ 0 i strukturelementet overlapper en pikselverdi ≠ 0 i bildet.
- Her reflekterer vi (roterer 180°) strukturelementet før vi flytter det rundt.
- Kan tenkes på som en **«maximums-konvolusjon»**.

Et bilde

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0
0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0
0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0
0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0
0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

To forskjellige struktur-elementer

```
1 1 1
1 1 1
1 1 1
```

```
0 1 0
1 1 1
0 1 0
```

To forskjellige resultater

```
0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0
0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1
```

```
0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0
0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0
```

Fortsatt vil vi:
- Ignorere pikselverdier som overlapper 0 i strukturelementet.
- Anta at piksler utenfor bildet er 0.

Dilasjon (dilatasjon)

- Roter S og plasser det slik at origo overlapper (x,y) i inn-bildet f, og beregn ut-bildet g ved:

$$g(x,y)=\begin{cases}1 & \text{hvis S \underline{treffer} f}\\ 0 & \text{ellers}\end{cases}$$

- Dilasjon av et bilde f med strukturelementet S betegnes:

$$f \oplus S$$

- Mer presist:
  Dilasjonen av mengden A med strukturelementet B er definert som posisjonene til alle piksler z som er slik at en 180° rotert B har minst ett felles element med A når origo i B plasseres i z:

$$A \oplus B = \{z \mid (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$$

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0
0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0
0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0
0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0
0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0
0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

dilatert med

```
1 1 1
1 1 1
1 1 1
```

gir

```
1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0
1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0
0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1
0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1
```

```
0 1 0
1 1 1
0 1 0
```

gir

```
0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0
1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0
0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0
0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0
0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0
0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0
0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1
0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0
```


Effekter av dilasjon

- Dilasjon **utvider** objekter.
- Dilasjon fyller i hull i objektet.
  - Fyller igjen hullet hvis strukturelementet er stort nok i forhold til hullet.
- Dilasjon glatter ut innbuktninger i objektets omriss.
- Resultatet er avhengig av strukturelementet.
- Større strukturelement gir større dilasjons-effekt.

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0
0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0
0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

dilatert med

```
1 1 1
1 1 1
1 1 1
```

gir

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0
0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0
0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

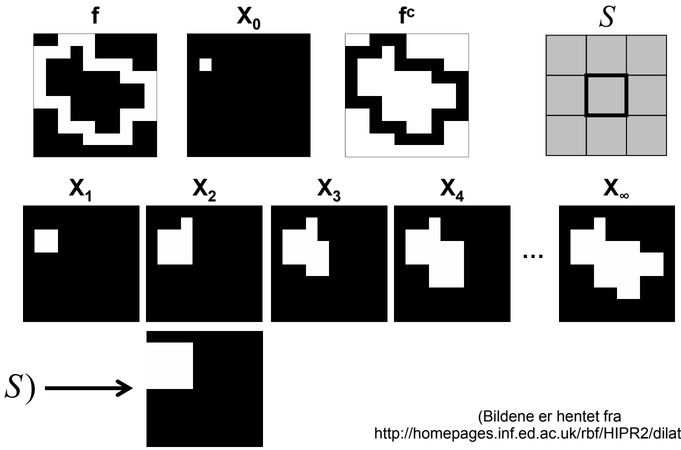
```
0 1 0
1 1 1
0 1 0
```

gir

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0
0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0
0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0
0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0
0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

Anvendelse av dilasjon: Region-fylling

- La X_0 inneholde et punkt i regionen som skal fylles.
- Deretter iterer $X_k = (X_{k-1} \oplus S) \cap f^c$ inntil konvergens:

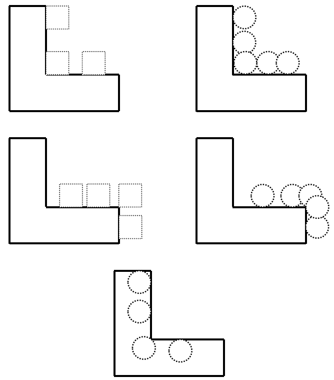


$(X_1 \oplus S) \longrightarrow$

(Bildene er hentet fra http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/dilate.htm)

Effekter av sirkulære strukturelementer på hjørner

- Både dilatering og erodering med **kvadratiske strukturelementer bevarer formen til hjørner**.
- **Dilatering** av **konkave** hjørner med sirkulære strukturelementer **bevare** hjørnenes form.
- **Dilatering** av **konvekse** hjørner med sirkulære strukturelementer **avrunde** hjørnene.
- Sirkulære strukturelementer gir **avrundede** hjørner ved **erosjon** av **konkave** hjørner.
  - Konvekse hjørner bevares.



Dualitet

- **Dilasjon og erosjon er duale** med hensyn til komplementering og reflektering (180° rotering), d.v.s. at dilasjon og erosjon kan uttrykkes ved hverandre:

$$f \oplus S = \left(f^c \ominus \hat{S}\right)^c$$
$$f \ominus S = \left(f^c \oplus \hat{S}\right)^c$$

- For å dilatere f med <u>symmetrisk</u> S kan vi erodere komplementet til f med S, og ta komplementet av resultatet.
  - Tilsvarende for å erodere.
- => Dilasjon og erosjon kan utføres av samme prosedyre, forutsatt at vi kan 180° rotere et strukturelement og finne komplementet til et binært bilde.

et bilde

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0
0 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0
0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

komplementet

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 0 0 1 1 0 0 0 1 1
1 1 1 0 0 0 1 1 0 1 1
1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1
1 1 1 1 0 1 1 1 0 1 1
1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1
1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

dilatert med

```
0 1 0
1 1 1
0 1 0
```

erodert med

```
0 1 0
1 1 1
0 1 0
```

gir

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 0
0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0
0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0
0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0
0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

gir

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 0 0 1 1 0 0 0 1 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 1
1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1
1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1
1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1
1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

og disse bildene er komplementære

Dualitet og effekter av sirkulære strukturelementer på hjørner

- Erosjon er å finne de posisjonene der strukturelementet passer inni forgrunnen.
- Dilasjon er å finne de posisjonene der (det 180° roterte) strukturelementet passer inni bakgrunnen, og så komplementere resultatet.
  - Det er dette den ene dualitetsformelen sier.
- => Siden **erosjonen** av **konkave** hjørner med et **sirkulært strukturelement avrunder** hjørnene, så vil **dilasjonen** avrunde **konvekse** hjørner når vi benytter samme strukturelement.
  - Merk: Et konvekst forgrunns-hjørne er også et konkavt bakgrunns-hjørne.
- Logikken fungerer like bra omvendt vei.

Dilasjon: Andre egenskaper

- **Dilasjon er kommutativ.**

$$f \oplus S = S \oplus f$$

  - Selv om det er en konvensjon at første operand er bildet og andre er strukturelementet, så har dette altså ingen betydning.

- **Dilasjon er assosiativ.**

$$f \oplus (S_1 \oplus S_2) = (f \oplus S_1) \oplus S_2$$

  - Hvis S kan dekomponeres, d.v.s. at S er S_1 dilatert med S_2, kan vi spare en del regnetid, spesielt hvis S_1 og S_2 er én-dimensjonale. Eksempel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Erosjon: Andre egenskaper

- Erosjon er IKKE kommutativ:

$$f \ \theta \ S \neq S \ \theta \ f$$

- Erosjon er heller IKKE assosiativ, men suksessiv erosjon av bildet f med A og så med B er ekvivalent med erosjon av bildet f med A **dilatert** med B:

$$(f \ \theta \ \mathrm{A}) \ \theta \ \mathrm{B} = f \ \theta \ (\mathrm{A} \oplus \mathrm{B})$$

  - Passer det med denne tidligere påstanden?
    «Hvis s_2 er formlik s_1,
    men dobbelt så stort,
    så er $f \ \theta \ s_2 \approx (f \ \theta \ s_1) \ \theta \ s_1$»

Åpning

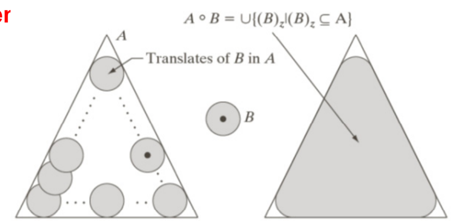
- **Erosjon** av et bilde **fjerner** alle strukturer som ikke kan inneholde strukturelementet, og «**krymper**» alle andre strukturer.
- Hvis vi **dilaterer** resultatet av en erosjon med samme strukturelement, vil de strukturene som «**overlevde**» erosjonen bli omtrentlig **gjenskapt**.
- Dette er en **morfologisk åpning**;

$$f \circ S = (f \ \theta \ \mathrm{S}) \oplus S$$

- Navnet kommer av at operasjonen kan skape en åpning (et mellomrom) mellom to strukturer som bare henger sammen ved en tynn «bro», uten å krympe disse to strukturene i noen betydelig grad.
  - Bare erosjon kan også skape en slik åpning/mellomrom, men vil også krympe begge strukturene.

Geometrisk tolkning av åpning

- Tenk at strukturelementet definerer **størrelsen og formen til spisser av en tusjpenn**.
- Det er bare tillatt å **fargelegge innenfor objekter**.
  - Et par detaljer: Man må holde tusjen vinkelrett på tegneflaten og med samme rotasjon som strukturelementet.
- **Åpningen er resultatet av å fargelegge så mye man har lov til.**
- For runde strukturelementer: Konvekse hjørner blir avrundet, konkave hjørner beholdes rette.
  - Akkurat som ved dilasjon (skyldes at enhver åpning avsluttes med en dilasjon).



(Deler av figur 9.8 i G&W)

Åpning er **idempotent**:

$$(f \circ S) \circ S = f \circ S$$

d.v.s. at gjentatte anvendelser med samme strukturelement gir ingen endring.

Lukking

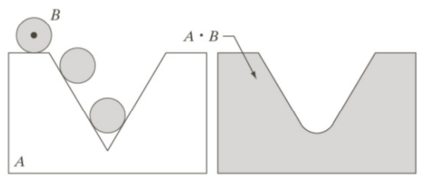
- **Dilasjon** av et bilde **utvider** strukturer, **fyller** i **hull og innbuktninger** i omrisset.
- Hvis vi **eroderer** resultatet av en dilasjon med samme strukturelement, vil strukturene **stort sett** få **gjenskapt** sin opprinnelige størrelse og form, men **hull og innbuktninger** som ble fylt igjen ved dilasjonen vil **ikke gjenoppstå**.
- Dette er en **morfologisk lukking**;

$$f \bullet S = \left(f \oplus S\right) \theta \; S$$

- Navnet kommer av at operasjonen kan lukke en åpning mellom to strukturer som bare er adskilt med et lite gap, uten at de to strukturene vokser i noen betydelig grad.
  - Bare dilasjon kan også lukke en slik åpning, men vil også forstørre begge strukturene.

Geometrisk tolkning av lukking

- Vi kan benytte **samme metafor** som for åpning:
  - Strukturelementet definerer størrelsen og formen til spissen av en tusjpenn.
  - Man holder tusjen vinkelrett tegneflaten og fargelegger så mye man har lov til.
- **Denne gangen** er det bare tillatt å **fargelegge utenfor objekter**.
  - En detalj: Denne gangen skal tusjen holdes speilvendt (180° rotert) av strukturelementet.
- **Lukkingen er det som ikke fargelegges**.
  - Denne gangen fargelegger vi altså bakgrunnen, sist fargela vi forgrunnen.
- For runde strukturelementer: Konkave hjørner blir avrundet, konvekse hjørner beholdes rette.
  - Akkurat som ved erosjon (skyldes at enhver lukking avsluttes med en erosjon).

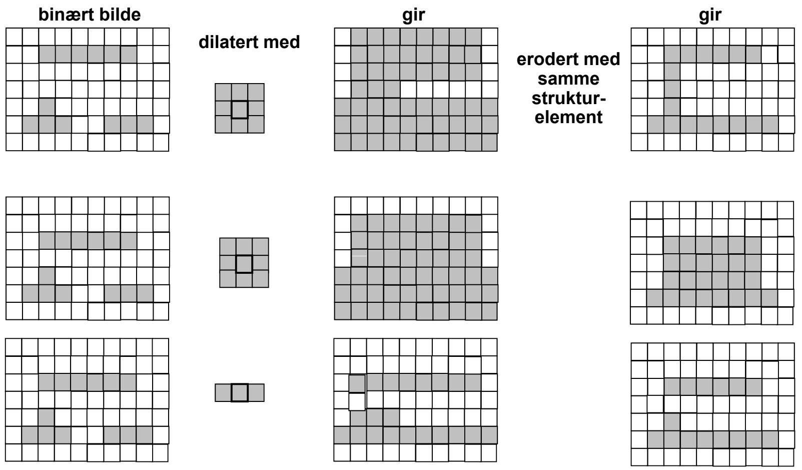


(Deler av figur 9.9 i G&W)

Også lukking er **idempotent**:

$$(f \bullet S) \bullet S = f \bullet S$$

Lukking lukker små åpninger



- Strukturelementets størrelse og form, og strukturenes mellomrommer er avgjørende for resultatet.

Dualitet mellom åpning og lukking

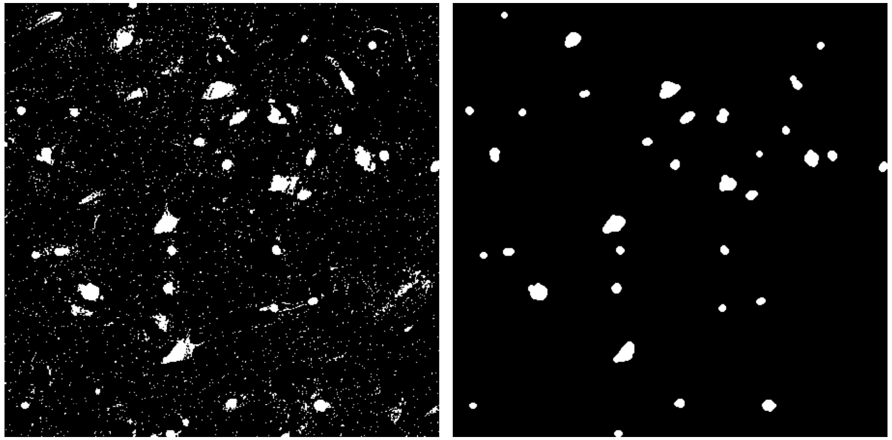
- **Lukking** er en **dual** operasjon til **åpning** med hensyn til komplementering og reflektering (180° rotering), og omvendt:

$$f \bullet S = (f^c \circ \hat{S})^c \qquad f \circ S = (f^c \bullet \hat{S})^c$$

- Lukking kan utføres ved å komplementere bildet, åpne det med det speilvendte (180° rotere) strukturelementet, og ta komplementet av resultatet.
  - Tilsvarende for åpning.
- Vi kan altså utføre begge operasjonene med kode bare for den ene, hvis vi har kode å speilvende og komplementere et binært bilde.
- **Lukking** er en **ekstensiv** transformasjon (piksler legges til).
- **Åpning** er en **antiekstensiv** transformasjon (piksler fjernes).

$$f \circ S \subseteq f \subseteq f \bullet S$$

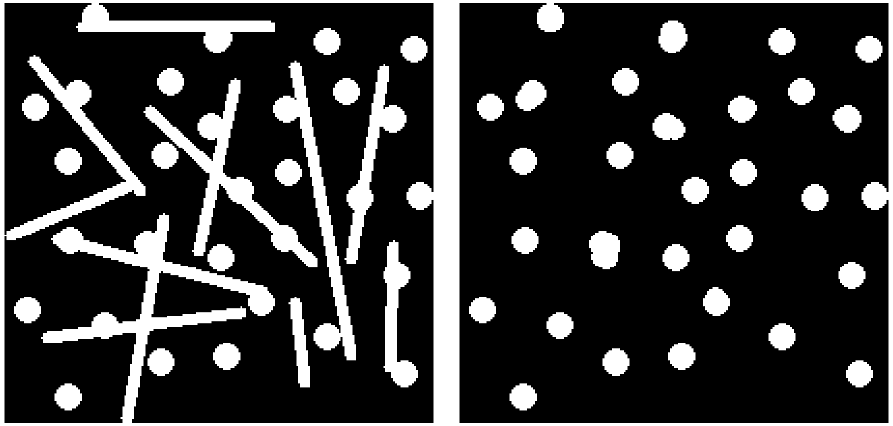
Eksempel: Støyfjerning med åpning



Åpning med et (7x7) sirkulært strukturelement

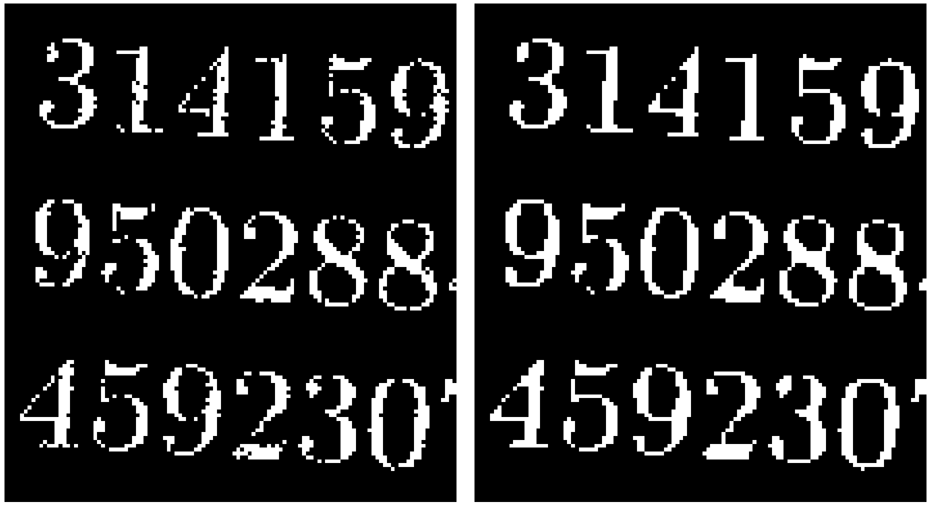
(Bildene er hentet fra http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/)

Eksempel: Formseparering ved åpning



Åpning med et sirkulært strukturelement

Eksempel: Filtrering ved lukking



Lukking med et (3x3) kvadratisk strukturelement

Eksempel: Filtrering ved åpning og lukking

a b
d c
e f

FIGURE 9.11
(a) Noisy image.
(b) Structuring element.
(c) Eroded image.
(d) Opening of A.
(e) Dilation of the opening.
(f) Closing of the opening.
(Original image courtesy of the National Institute of Standards and Technology.)

9.5.9 Morfologisk rekonstruksjon

- Tidligere: Bilde f og strukturelement S
- Nå: Markørbilde F (startpunktene), maskebilde G og et strukturelement B som definerer tilkoblingstypen
- **Morfologisk rekonstruksjon ved dilasjon**:

$$F^k = (F^{k-1} \oplus B) \cap G$$

der $F^0 = F$.

- Med ord: Iterativt dilater F med B, og begrens resultatet med G, inntil ingen endring.

- B = $\begin{matrix}0&1&0\\1&\boxed{1}&1\\0&1&0\end{matrix}$ $\begin{matrix}1&1&1\\1&\boxed{1}&1\\1&1&1\end{matrix}$

definerer 4-tilkobling 8-tilkobling i markørbildet

  - Merk: Omvendt som for kantdeteksjonen!
    … fordi ut-bildet da var det som ble erodert v.b.a. strukturelementet.

Åpning ved rekonstruksjon

- Tidligere: Bilde f og strukturelement S
- Nå: Markørbilde F (startpunktene), maskebilde G og et strukturelement B som definerer tilkoblingstypen
- **Morfologisk rekonstruksjon ved dilasjon**:

$$F^k = (F^{k-1} \oplus B) \cap G$$

der $F^0 = F$.

- Med ord: Iterativt dilater F med B, og begrens resultatet med G, inntil ingen endring.

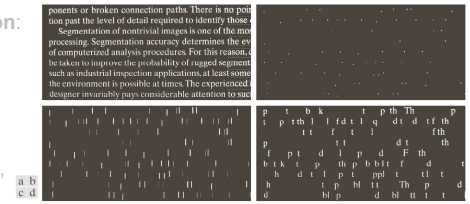


FIGURE 9.29 (a) Text image of size 918 × 2018 pixels. The approximate average height of the tall characters is 50 pixels. (b) Erosion of (a) with a structuring element of size 51 × 1 pixels. (c) Opening of (a) with the same structuring element, shown for reference. (d) Result of opening by reconstruction.

- Åpning ved rekonstruksjon (f med S):
  - Lag markørbildet F ved å n ganger erodere f med S (n er en tilleggsparameter).
    - Kunne vært definert uten parameteren n. Da må S definerer hele eroderingen.
  - Utfør morfologisk rekonstruksjon ved dilasjon der G = f.
- Tilsvarer vanlig åpning, bare at de gjenværende objektene blir *nøyaktig bevart*.

Helautomatisk hullfylling

- Tidligere: Bilde f og strukturelement S
- Nå: Markørbilde F (startpunktene), maskebilde G og et strukturelement B som definerer tilkoblingstypen
- **Morfologisk rekonstruksjon ved dilasjon**:

$$F^k = (F^{k-1} \oplus B) \cap G$$

der $F^0 = F$.

- Med ord: Iterativt dilater F med B, og begrens resultatet med G, inntil ingen endring.

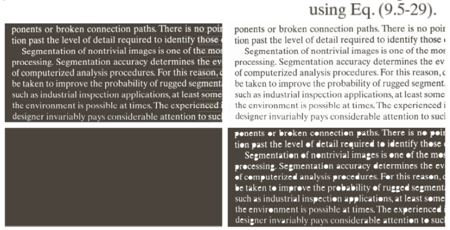


FIGURE 9.31 (a) Text image of size 918 × 2018 pixels. (b) Complement of (a) for use as a mask image. (c) Marker image. (d) Result of hole-filling using Eq. (9.5-29).

- Helautomatisk hullfylling (av bildet f):
  - La markørbildet F(x,y) være 1-f(x,y) når (x,y) er på bildekanten, og ellers 0;

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - f(x,y) & \text{hvis } (x,y) \text{ er på bildekanten} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

  - Utfør morfologisk rekonstruksjon ved dilasjon der G = f^c og komplementer resultatet.

Kantrydding

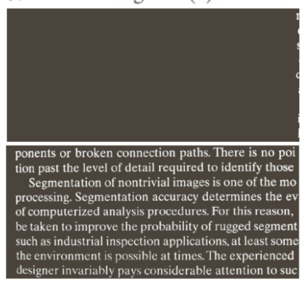
- Tidligere: Bilde f og strukturelement S
- Nå: Markørbilde F (startpunktene), maskebilde G og et strukturelement B som definerer tilkoblingstypen
- **Morfologisk rekonstruksjon ved dilasjon**:

$$F^k = (F^{k-1} \oplus B) \cap G$$

der $F^0 = F$.

- Med ord: Iterativt dilater F med B, og begrens resultatet med G, inntil ingen endring.

FIGURE 9.32 Border clearing. (a) Reconstruction-by-dilation of marker image. (b) Image with no objects touching the border. The original image is Fig. 9.29(a).



- Kantrydding (av bildet f) (er også helautomatisk):
  - La markørbildet F være lik f på bildekanten, og ellers 0;

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{hvis } (x,y) \text{ er på bildekanten} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

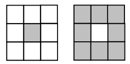
  - Utfør morfologisk rekonstruksjon ved dilasjon der G = f og subtraher resultatet fra f.

«Hit-or-miss»-transformasjonen

- Tilbake til den opprinnelige situasjonen: Bilde f og strukturelement S
- Men strukturelementet S er nå definert ved et par $[S_1, S_2]$ binære strukturelementer som har ingen felles elementer.
- «Hit-or-miss»-transformasjonen av f med S = $[S_1, S_2]$ er definert som:

$$f(*)S = f(*)\left[S_1, S_2\right] = (f\,\theta\,S_1) \cap (f^C\,\theta\,S_2)$$

- Et **forgrunnspiksel** i ut-bildet **oppnås** kun hvis:
  - **S_1 passer forgrunnen** rundt pikselet og
  - **S_2 passer bakgrunnen** rundt pikselet.
- Kan brukes til å finne/behandle bestemte mønstre i et bilde, f.eks. til å:
  - Finne bestemte strukturer.
  - Fjerne enkeltpiksler.
  - Benyttet i "tynning" (om to slides).



Eksempel: «Hit-or-miss»

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0
0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0
0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

Et bilde A

```
0 1 0
1 1 1
0 1 0
```

Strukturelement S_1

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

Resultat etter erosjon med S_1

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1
1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1
1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1
1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1
1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

A^c - komplementet til bildet

```
1 0 1
0 0 0
1 0 1
```

Strukturelement S_2

```
1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1
1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1
1 0 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0
1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1
1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

A^c erodert med S_2

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

«Hit-or-miss»-resultatet

Logisk AND av de to delresultatene

Morfologisk tynning

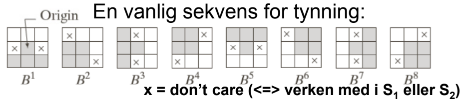
- Morfologisk tynning:

$$f \otimes S = f - (f(*)S)$$

gjentatt med en sekvens av strukturelementer, S^k for k=1,..,n, inntil **ingen** av strukturelementene **skaper noen endring**.

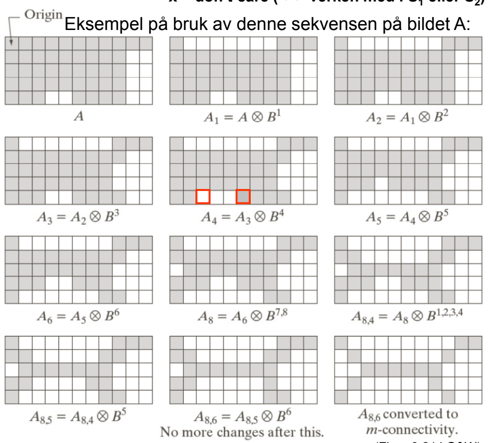
- **Fjerner** grovt sett **alle piksler utenom** de som:
  - er isolerte,
  - definerer utstrekningen av et objekt, **eller**
  - trengs for å ikke dele et objekt.

En vanlig sekvens for tynning:



x = don't care (<=> verken med i S_1 eller S_2)

Eksempel på bruk av denne sekvensen på bildet A:



(Figur 9.21 i G&W)

□ og □ markerer to korreksjoner.

Oppsummering

- Grunnleggende begreper:
  - Strukturelement (med origo)
  - **Erosjon**
  - **Dilasjon**
  - Dualitet
  - Åpning (erosjon etterfulgt av dilasjon)
  - Lukking (dilasjon etterfulgt av erosjon)
  - Morfologisk rekonstruksjon
  - Hit-or-miss
- Eksempler på anvendelser.