Løsningsforslag nr 11 INF2310, våren 2013.
Segmentering ved terskling

Oppgave 4 - Entropi-terskling:
I denne oppgaven skal du få litt trening i å håndtere partielle summer av histogrammer.

Anta at du har gitt et bilde med *G* trinn i gråtoneskalaen, og med et normalisert histogram $p(i),\ 0 \leq i \leq G\text{-}1$. Bildet inneholder ikke nødvendigvis alle disse gråtonene.
Vi har sett at første ordens entropi gitt ved

$$H = -\sum_{i=0}^{G-1} p_i \log_2(p_i)$$

er et uttrykk for informasjonsinnhold i enkelt-piksler.
Anta at vi beregner entropiene $H_1(t)$ og $H_2(t)$ separat for de delene av histogrammet som er under og over en gitt terskelverdi t, dvs.:

$$H_1(t) = -\sum_{i=0}^{t} \left(\frac{p(i)}{P_1(t)}\right) \log_2 \left(\frac{p(i)}{P_1(t)}\right), \quad P_1(t) = \sum_{i=0}^{t} p(i)$$

$$H_2(t) = -\sum_{i=t+1}^{G-1} \left(\frac{p(i)}{P_2(t)}\right) \log_2 \left(\frac{p(i)}{P_2(t)}\right), \quad P_2(t) = \sum_{i=t+1}^{G-1} p(i)$$

Her er $P_1(t)$ og $P_2(t)$ *a posteriori* sannsynlighetene for de to klassene, dvs sannsynlighetene for hhv mørke og lyse piksler *etter* at tersklingen er utført med terskelverdi *t*.

a. Implementer en beregning av funksjonen $A(t) = H_1(t) + H_2(t)$ for alle mulige verdier av terskelverdien *t* i et gitt bilde.
   - Gjør rede for hvilke forbehold du må ta i koden.

Vi må ha $p(i) > 0$ i $\log p(i)$. Siden vi dividerer med $P_1(t)$ og $P_2(t)$ må vi kreve $P_1(t) > 0$ og $P_2(t) > 0$. Det samme gjelder selvsagt når vi tar logaritmen av $P_1(t)$ og $P_2(t)$. Men siden $P_2(t) = 1 - P_1(t)$ blir kravet $0 < P_1(t) < 1$. Det kumulative normaliserte histogrammet $P_1(t)$ setter altså en nedre og øvre grense for det området av *t*-verdier der $A(t)$ kan beregnes.

   - Anvend dette på bildet mona.png, og terskle bildet med den terskelverdien T_A der $A(t)$ har sitt maksimum.
   - Vil en histogramutjevning påvirke plasseringen av terskelen eller utseendet av det binære bildet?

Histogramutjevning vil flytte men ikke bytte om på innholdet i histogrammet. Plasseringen av maksimum for funksjonen $A(t)$ blir derfor påvirket, men ikke utseendet av det binære bildet.

b. Beskriv med tekst og ligninger hvordan beregningen av $H_1(t)$ og $H_2(t)$ kan effektiviseres

Siden vi skal regne ut *$H_1(t)$* og *$H_2(t)$* for alle mulige (og lovlige) verdier av t, kan det være lurt å effektivisere beregningene. Det er flere mulige trinn her:

- For det første kan vi la være å beregne *$P_1(t)$* for hver gang vi trenger den. Vi har jo at

$$P(t) = \sum_{i=0}^{t} p_i(t) = p(t) + \sum_{i=0}^{t-1} p_i(t) \,,\, t \in [1, G-1] \,, P(0) = p(0)$$

  Vi kan altså legge dette kumulative normaliserte histogrammet inn i en tabell en gang for alle.

- Vi vil nok gjerne at man skal demonstrere at man er klar over at vi ikke trenger *$P_2(t)$*, fordi vi i et tilfelle med to klasser alltid har *$P_2(t) = 1 - P_1(t)$*.

- Uttrykkene for *$H_1(t)$* og *$H_2(t)$* kan lett forenkles. *$P_1(t)$* og *$P_2(t)$* inni summetegnene kan flyttes ut, likeså *$\log P_1(t)$* og *$\log P_2(t)$*. Vi får da for *$H_1(t)$*:

$$\begin{aligned}
H_1(t) &= -\sum_{i=0}^{t} \left(\frac{p(i)}{P_1(t)} \right) \log_2 \left(\frac{p(i)}{P_1(t)} \right) \\
&= -\frac{1}{P_1(t)} \sum_{i=0}^{t} p(i) \left(\log_2 p(i) - \log_2 P_1(t) \right) \\
&= \frac{\log_2 P_1(t)}{P_1(t)} \sum_{i=0}^{t} p(i) \; - \; \frac{1}{P_1(t)} \sum_{i=0}^{t} p(i) \log_2 p(i) \\
&= \log_2 P_1(t) + \frac{h(t)}{P_1(t)} \,, \quad der \quad h(t) = -\sum_{i=0}^{t} p(i) \log_2 p(i)
\end{aligned}$$

  Tilsvarende får vi for *$H_2(t)$*:

$$H_2(t) = \log_2 (1 - P_1(t)) + \frac{h(G-1) - h(t)}{1 - P_1(t)} \,, \quad der \quad h(G-1) = -\sum_{i=0}^{G-1} p(i) \log_2 p(i)$$

- Nå er det jo også slik at

$$\begin{aligned}
h(t) &= -\sum_{i=0}^{t} p(i) \log_2 p(i) \\
&= - p(t) \log_2 p(t) - \sum_{i=0}^{t-1} p(i) \log_2 p(i) \\
&= -p(t) \log_2 p(t) + h(t-1), t \in [1, G-1]
\end{aligned}$$

  Så vi kan altså:

  1) Lage en tabell som inneholder det kumulative normaliserte histogrammet *$P_1(t)$*.
  2) Lage den kumulative entropi-tabellen *$h(t)$*. Siste entry i denne er *$h(G-1)$*, som er bildets entropi.
  3) Verdiene av *$H_1(t)$* og *$H_2(t)$* finnes nå ved enkle oppslag i de to tabellene og innsetting i de to forenklede uttrykkene for *$H_1(t)$* og *$H_2(t)$* ovenfor.