

## INF 2310 – Digital bildebehandling



Forelesning II  
Sampling og kvantisering

Fritz Albrechtsen

27.01.2014

INF2310

1

## Temaer i dag

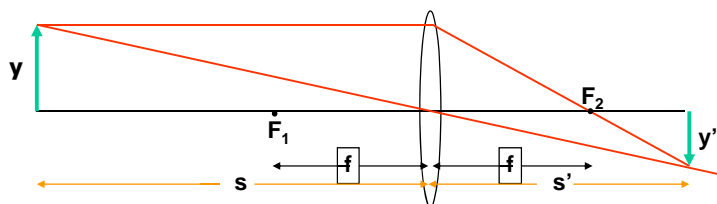
- Romlig oppløsning i bilder
  - Sampling av bilder
  - Kvantisering i bilder
  - Avstandsmål i bilder
- 
- Pensum: Kap. 2.3 - 2.5 i DIP

27.01.2014

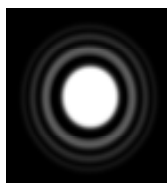
INF2310

2

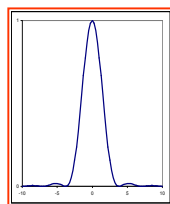
## Optisk avbildning



En punktkilde  
avbildes som  
en skive med  
mørke og lyse  
ringer rundt  
=>



(Punktspredningsfunksjon)  
(PSF)



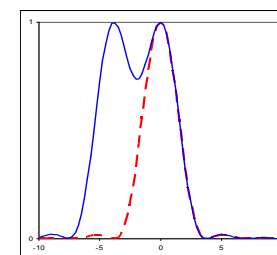
27.01.2014

INF2310

3

## Mer om romlig oppløsning

- Romlig oppløsning angis ofte som hvor langt fra hverandre to punktkilder må være for at vi skal kunne skille dem.
- Romlig oppløsning angis som en vinkel, oftest gitt i radianer.



27.01.2014

INF2310

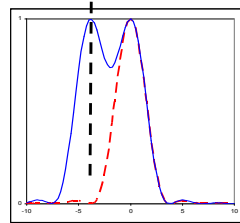
4

## Rayleigh-kriteriet

- Anta at en "perfekt" linse har aperture-diameter  $D$ , og lysets bølgelengde er  $\lambda$ , begge gitt i samme enhet
- To punkter i et objekt kan akkurat adskilles i det kontinuerlige, analoge bildet hvis vinkelen mellom dem er gitt ved

$$\sin \theta = 1.22 \lambda / D \text{ radianer.}$$

– Dette er "Rayleigh-kriteriet".



27.01.2014

INF2310

5

## Rayleigh-kriteriet, eksempel

$$y' = \frac{y f}{(s - f)}$$

$$\sin(\theta) \approx \tan(\theta) \approx \theta$$

$f=35\text{mm}$  og  $D=10\text{mm}$  (Tilnærmet vanlig kamera)  
 $s=5\text{m}$  (Avstanden til det som avbildes)  
 $\lambda=500 \cdot 10^{-9}$  meter (Grønt lys)

$$\tan \theta \approx \sin \theta = 1.22 \lambda / D = 6.1 \cdot 10^{-5} \quad (\text{Rayleigh})$$

$$y = \tan \theta \cdot s \approx 3.05 \times 10^{-4} \text{m} \approx \mathbf{0.3\text{mm}} \quad (\text{I objektplanet})$$

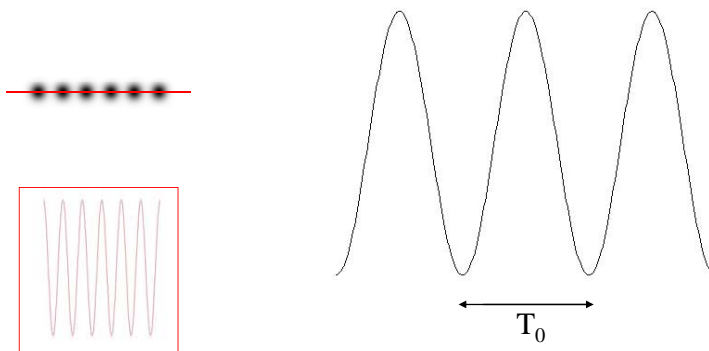
$$y' = 0.3\text{mm} \cdot 35 / (5000-35) \approx \mathbf{2.1\mu\text{m}} \quad (\text{I bildeplanet})$$

27.01.2014

INF2310

6

## Romlig frekvens



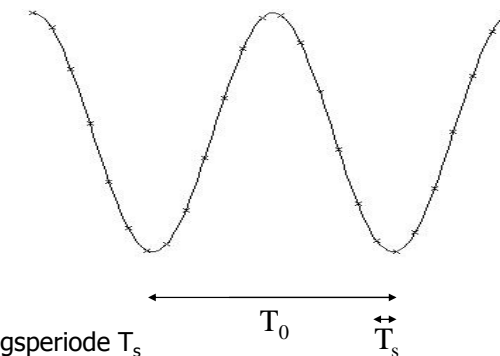
- Periode  $T_0$  (f.eks. i mm eller  $\mu\text{m}$ )
- Frekvens  $f_0 = 1/T_0$  (med benevnning "per mm" eller "per  $\mu\text{m}$ ")

27.01.2014

INF2310

7

## Sampling av kontinuerlige signaler



- Samplingsperiode  $T_s$
- Signalets periode =  $T_0$  ( $\Rightarrow f_0 = 1/T_0$ )
- Samplingsfrekvens  $f_s = 1/T_s$  (også kalt samplingsrate)
- Hvor ofte må man sample for å kunne rekonstruere signalet?

27.01.2014

INF2310

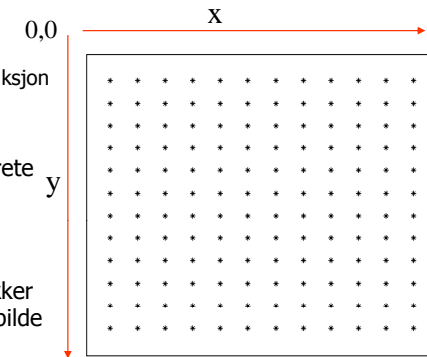
8

## Samplingsteoremet (Shannon/Nyquist)

- Anta at det kontinuerlige bildet er båndbegrenset, dvs. det inneholder ikke høyere frekvenser enn  $f_{\max}$
- Det kontinuerlige bildet kan rekonstrueres fra det digitale bildet dersom samplingsraten  $f_s=1/T_s$  er større enn  $2 f_{\max}$  (altså  $T_s < 1/2T_0$ )
- $2 f_{\max}$  kalles Nyquist-raten
- I praksis oversampler vi med en viss faktor for å kunne få god rekonstruksjon

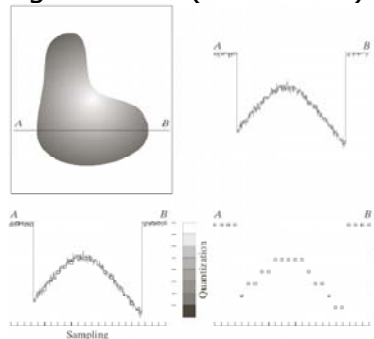
## Sampling av bilder

- Naturen er kontinuerlig
  - Et bilde er en kontinuerlig funksjon av to kontinuerlige variable
- Et digitalt bilde består av diskrete bildeverdier på et endelig 2D punktnett
- Sampling: Prosessen som plukker ut punkter fra et kontinuerlig bilde til et 2D punktnett
- For en viss **romlig oppløsning**, hvor tett må punktene i rutenettet ligge? (Hvor mange piksler pr. arealenhet?)



## 1D-sampling og kvantisering

- Analogt: En kontinuerlig variabel – intensitet finnes for alle (kontinuerlige) posisjoner.
- Digitalt: Intensiteten samples for diskrete posisjoner, og skaleres og avrundes (kvantiseres)



## 2D sampling og kvantisering

- Et kontinuerlig bilde projiseres på et detektor-array.
- Detektor-tettheten bestemmes av Nyquist-kriteriet.
- Hver detektor måler intensitet som et arealgjennomsnitt.
- Antall gråtoner bestemmes av ordlengden (antall bits).

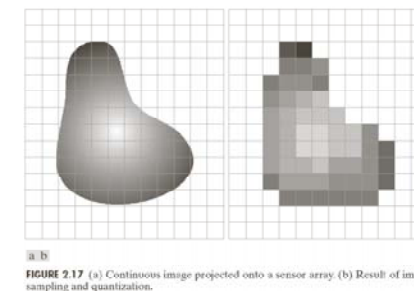
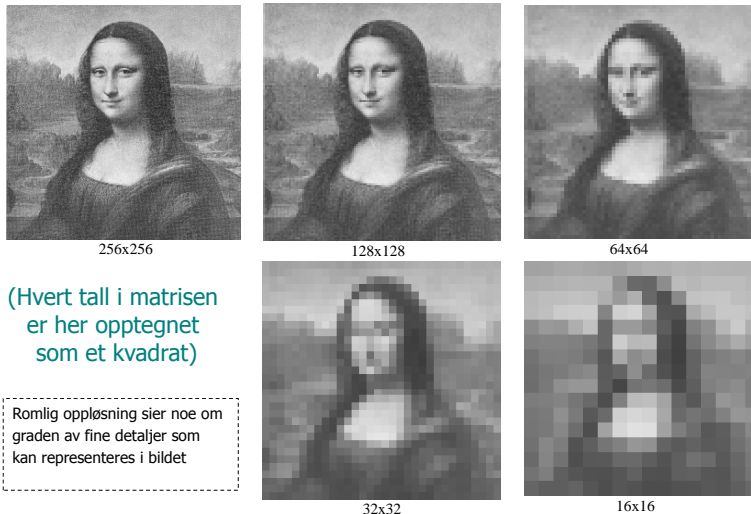


FIGURE 2.17 (a) Continuous image projected onto a sensor array. (b) Result of image sampling and quantization.

## Romlig oppløsning, eksempler

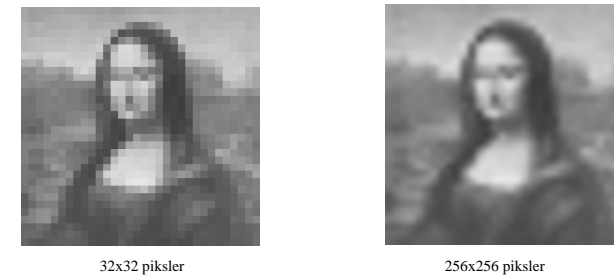


27.01.2014

INF2310

13

## Redusert romlig oppløsning



Forskjellig antall piksler, men lik romlig oppløsning.

27.01.2014

INF2310

14

## Undersampling/aliasing

- Undersampling (sample med lavere samplingsrate enn Nyquist-kriteriet) medfører **aliasing**.
- Ved undersampling forvrenges frekvensinnholdet og det digitale bildet inneholder ikke de samme frekvenser som det kontinuerlige bildet.
- Sampling av en sinusoid med for lav samplingsrate gir en diskret sinusoid med lavere frekvens.
- Alias-frekvensen er altså lavere enn sann frekvens.

27.01.2014

INF2310

15

## Under-sampling gir aliasing

- En sinusoid med periode  $T=2s$ .
- Samplet med uniform samplingsperiode  $> 2s$ .
- Gir en rekonstruert sinusoid med for lav frekvens.

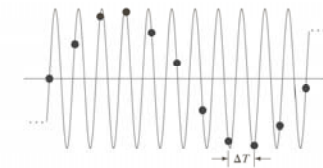


FIGURE 4.10 Illustration of aliasing. The under-sampled function (black dots) looks like a sine wave having a frequency much lower than the frequency of the continuous signal. The period of the sine wave is 2 s, so the zero crossings of the horizontal axis occur every second.  $\Delta T$  is the separation between samples.

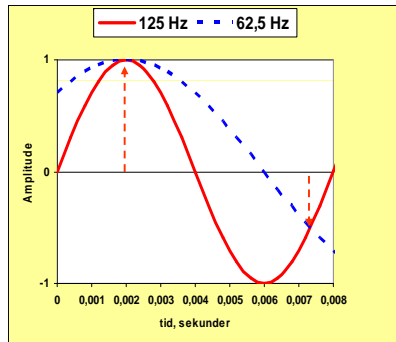
27.01.2014

INF2310

16

## Undersampling og aliasing

- **Aliasing** betegner det fenomenet at en sinusoid ved for lav samplingsrate gir opphav til samme diskrete signal som en sinusoid med lavere frekvens.
- Vi sampler en  $f = 125$  Hz sinus med  $f_s = 1.5 f = 187.5$  Hz.
- Dette gir for eksempel sampler ved  $t = 0.002$  og ved  $t = 0.733$  (stiplede røde piler).
- Rekonstruksjon gir sinus med  $f_a = 62.5$  Hz (stiplet kurve).
- Vi har fått en "aliasing".
- Merk at  $f_a = f_s - f$  når  $f < f_s < 2f$



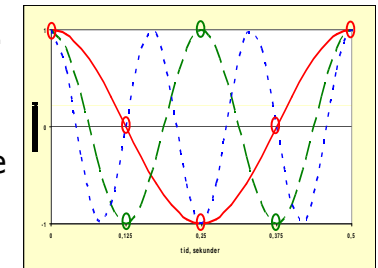
27.01.2014

INF2310

17

## Frekvensfolding

- I figuren til høyre vises  $\frac{1}{2}$  sek. av tre sinus-funksjoner med frekvenser 2, 4 og 6 Hz.
- Vi sampler alle tre funksjonene med en fast  $f_s = 8$  Hz
- Vi får rekonstruert tre sinusoider med hhv.  $f = 2, 4$  og  $2$  Hz.
- Frekvenser  $f$  som er under halvparten av  $f_s$  blir rekonstruert til korrekt frekvens
- $f$  mellom  $\frac{1}{2} f_s$  og  $f_s$ , blir rekonstruert til  $f_a = f_s - f$



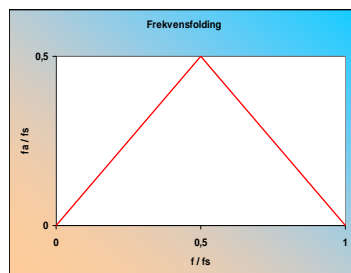
27.01.2014

INF2310

18

## Frekvensfolding

- Aliasfrekvens er gitt ved  $f_a = f_s - f$  når  $f < f_s < 2f$
- frekvenser under halvparten av  $f_s$  blir korrekt rekonstruert.
- frekvenser mellom  $\frac{1}{2} f_s$  og  $f_s$ , blir rekonstruert til  $f_a = f_s - f$

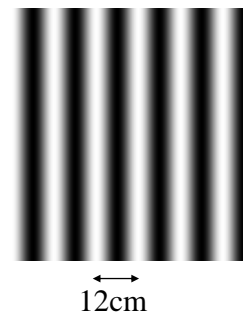


27.01.2014

INF2310

19

## Oppgave



- Du tar bilde av et gjerde som består av hvite gjerdestolper som er 6 cm brede og mørke mellomrom som er 6 cm brede.
- Bildet dekker 30 m av gjerdet.
- Bildet er 256 piksler bredt.
- Hvor lang er perioden i scenen?
- Hvor mange perioder dekker bildet?
- Hva er samplingsperioden?
- Hva blir perioden i det digitale bildet?
- Hvor mange piksler burde vi hatt?

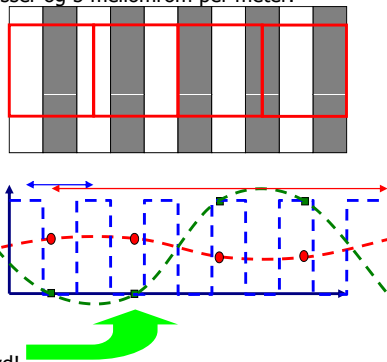
27.01.2014

INF2310

20

## Et undersamplet Nyquist-stakitt ...

- Ta et analogt bilde av et stakitt med 5 sprosser og 5 mellomrom per meter.
  - Vi har en periodisk struktur
    - $f = 5$  svingninger per meter
    - Periode  $T = 20$  cm
- Vi må ha MINST to piksler per periode!
  - Anta nå at pikslene svarer til  $25 \cdot 25$  cm, dvs  $f_s = 4$  sampler per meter.
  - Finner gjennomsnitt i hvert piksel ...
    - Amplituden reduseres ...
    - Vi får aliasing,  $f_a = |f_s - f| = |4 - 5| = 1$
    - Perioden  $T_a = 1/f_a = 1$  meter
- Dette er annerledes enn ved sampling av lyd!
  - Vi får redusert amplitude i forhold til lydsampling
  - Vi får samme aliasingfrekvens
  - Vi kan få en synlig faseforskyvning i bildet. Fase og faseforskyvning av lyden hører vi ikke!



27.01.2014

INF2310

21

## Anti-aliasing

- Effekten av aliasing kan reduseres.
- Dette **MÅ** gjøres **FØR** samplingen.
- Hvis vi filtrerer bort de høyeste frekvensene først, vil det finnes færre eller ingen høye frekvenser som kan gi opphav til aliasing.
- Aliasing er en samplings-effekt.
- Aliasing kan **IKKE** fjernes *post*-sampling.
- Mange SW-pakker tilbyr "anti-aliasing" !
- Digitale kamera kan ha en "anti-alias"-funksjon.

27.01.2014

INF2310

22

## Anti-aliasing

- Ved *anti-aliasing* fjerner / demper vi de høyere frekvensene **før** vi sampler bildet





(Figurer fra ImageProcessingBasics.com)

27.01.2014

INF2310

23 / 27

## Mer reell sampling av bilder

- Når et kamera tar bilde av et objekt, vil hvert piksel i bildet inneholde lys målt fra hele det området som pikselen dekker
- Eksempel: La oss si at 1 piksel dekker det området som er vist til høyre, og at dette lille området inneholder noe fin-struktur:
 
- Dette representeres etter samplingen ved gjennomsnittlig lysstyrke i området:
 
- Vi har målt en **middelverdi over et areal**
  - Implisitt fjernet høyfrekvent bidrag
  - Vi har utført en "anti-aliasing" filtrering.

27.01.2014

INF2310

24

## Samplingsmønster/skanningsmønster

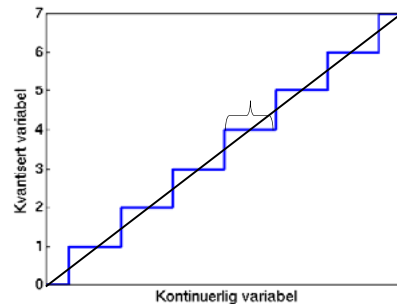
- Vanligvis rektangulært grid
  - Konnektivitets-problemer  
(Merk: avstanden mellom diagonale punkter)
  - Avstandsmål
  - Mer om dette i morfologi-forelesningen
- Andre eksempler:
  - Hexagonalt grid
  - Varierende tetthet (f. eks. netthinnen)
  - Polarkoordinater (f.eks ultralyd)

## Kvantisering

- $f(x,y)$  er intensitet/lysstyrke i  $(x,y)$  og i naturen *kontinuerlig* variabel
- Når skal lagres digitalt må man velge et *visst antall nivåer* (og hvor nivåene skal ligge)
- **Kvantisering:** Prosessen som transformerer en kontinuerlig sampel  $f_k(x,y)$  til et diskret sampel  $f(x,y)$

## Kvantisering, forts.

- Hvert piksel lagres vha.  $n$  bit
- Pikelet kan da inneholde heltallsverdier fra 0 til  $2^n-1$
- Eks 3bit:



- 8 bit er vanlig for gråtonebilder, 3\*8 bit for fargebilder.

## Kvantiseringsfeil

- Kvantiseringsfeil
  - Summen av hver piksels avrundingsfeil
- Kan velge intervaller og rekonstruksjonsintensiteter som minimerer feilen for et gitt bilde
  - => Ikke-uniform fordeling av kvantiseringsnivåer
- Sentrale stikkord:
  - Lagringsplass
  - Behov for presisjon/akseptabelt informasjonstap
  - Hardware-kompleksitet, eller fysiske begrensninger
- Merk: Fremvisning og videre bildeanalyse av det kvantiserte bildet stiller ulike krav til presisjon

## Eksempel: Plassbehov

- Typisk kamera (6 megapiksel)
  - $3264 \times 1832 = 5,979,648$  piksler
  - RGB  $\rightarrow 3 * 5,979,648 * 8 \text{ bit} = 143 \text{ Mb} = 18 \text{ MB}$
- Radarbilde fra ERS-satellitten:
  - Overføring fra satellitt kostbart
  - Dekker  $100 \times 100 \text{ km}$
  - Pikseldekning  $20 \times 20 \text{ m}$
  - $5000 \times 5000$  piksler
  - 8-bit: **25 MB**
  - 16 bit: **50 MB**
  - 32 bit: **100 MB**

27.01.2014

INF2310

29

## Prefiks for lagringsbehov

Decimal			Binary		
Kilo	k/K	$10^3$	Kibi	Ki	$2^{10}$
Mega	M	$10^6$	Mebi	Mi	$2^{20}$
Giga	G	$10^9$	Gibi	Gi	$2^{30}$
Tera	T	$10^{12}$	Tebi	Ti	$2^{40}$
Peta	P	$10^{15}$	Pebi	Pi	$2^{50}$

- Elektroniske minner (RAM, ROM) er gitt i binære enheter
- Harddisk-kapasitet er gitt i desimale enheter.
  - Sektorstørrelsen på disker gis binært (siden de mapper til RAM).
  - Forvirrende hybrider som flasminner med X GB, som ikke er  $X * 10^9$  byte eller  $X * 2^{30}$  byte, men  $X * 10^6 * 1024$  byte
- Kapasiteten til en CD er alltid gitt binært.
- Kapasiteten til en DVD er gitt desimalt.
- Båndbredden gis desimalt, siden klokkeraten gis desimalt
  - ( $1 \text{ Mbit/s} = 10^9$  biter per sekund,  $1 \text{ GHz} = 10^9$  sykler per sekund).

27.01.2014

INF2310

30

## Krav til kvantiseringsnivåer

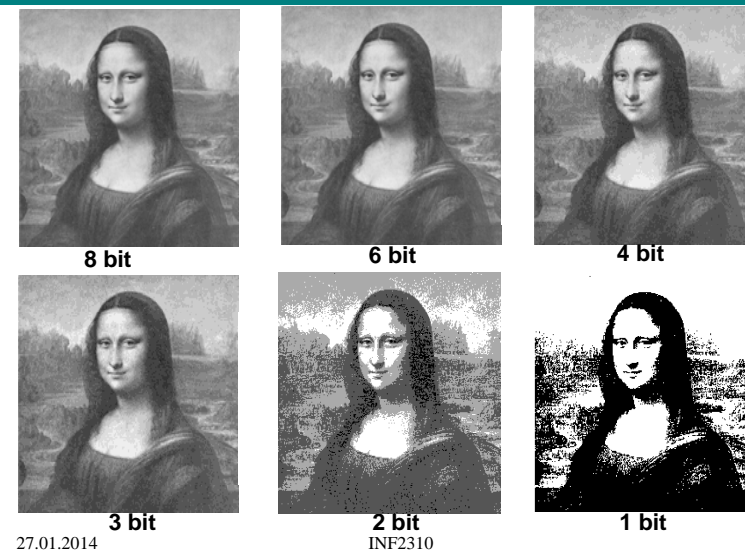
- Øyet vårt ser bare noen titalls gråtoner samtidig,
  - trenger vi mer enn 256 nivåer (1 byte) pr. piksel?
- Tilfeller hvor *input*-intensitetsnivå varierer (for eksempel lysnivå ute og innendørs).
- Videre bildeanalyse kan kreve flere kvantiseringsnivåer
- Eksempler på datatyper som ulike sensorer leverer:
  - Byte (0-255): Mest vanlig
  - Unsigned short(16 bit): ERS SAR radarbilder vanlig format
  - 10 – 12 bit: MR-bilder (Magnetisk Resonnans)
  - 64 bit complex: ERS single look complex radarbilder (rådata) med amplitude og faseinformasjon

27.01.2014

INF2310

31

## Eksempler - antall bit pr. piksel



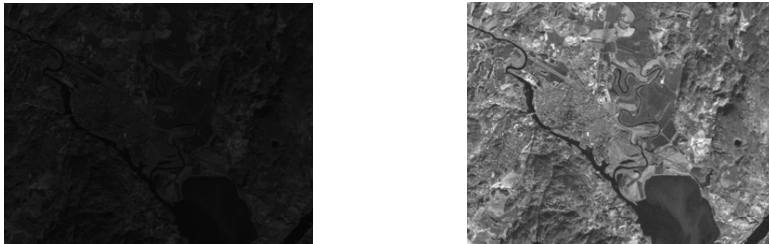
27.01.2014

INF2310

32

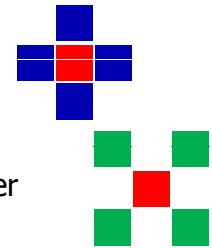


## Eksempel – varierende belysning



## Naboer til piksler

- Et piksel  $p$  i posisjon  $(x,y)$  har flere nabo-piksler.
- 4-naboene  $N_4(p)$  med koordinater  $(x+1,y), (x-1,y), (x,y+1), (x,y-1)$
- Diagonal-naboene  $N_D(p)$  med koordinater  $(x+1,y+1), (x+1,y-1), (x-1,y+1), (x-1,y-1)$
- Tilsammen utgjør disse 8-naboene til  $p$ ,  $N_8(p)$ .



## Euklidsk avstand mellom piksler

- Gitt to piksler  $p,q$  i planet med koordinater  $(x,y), (s,t)$
- Euklidsk avstand mellom  $p$  og  $q$

- $D_e(p,q) = [(x-s)^2 + (y-t)^2]^{1/2}$

- I  $n$  dimensjoner:  $D_e(p,q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (q_i - p_i)^2}$

## “City block” avstand mellom piksler

- Også kalt “Taxi-avstand”, “Manhattan-distance”,  $L_1$
- Gitt to piksler  $p,q$  i et bilde med koordinater  $(x,y), (s,t)$
- City-block avstand ( $D_4$ )
  - $D_4(p,q) = |x-s| + |y-t|$
  - Piksler med avstand 1 er 4-naboer til senterpikset
  - $D_4(p,q)$  er lengden av den korteste 4-nabo veien fra  $p$  til  $q$ , men det kan finnes mange slike veier!

4	3	2	3	4
3	2	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	2	3
4	3	2	3	4

- I  $n$  dimensjoner:  $D_4(p,q) = \sum_{i=1}^n |q_i - p_i|$

## Sjakk-avstand mellom piksler

- Også kalt Chebyshev-avstand,  $L_\infty$

- Gitt to piksler  $p, q$  i et bilde med koordinater  $(x, y), (s, t)$

2	2	2	2	2
2	1	1	1	2
2	1	0	1	2
2	1	1	1	2
2	2	2	2	2

- Sjakk-avstand ( $D_8$ )

- $D_8(p, q) = \max(|x-s|, |y-t|)$
- Piksler med  $D_8=1$  er 8-naboer til senterpikslet
- $D_8(p, q)$  er lengden av den korteste 8-nabo veien fra  $p$  til  $q$ , men det kan finnes mange slike veier!

- I  $n$  dimensjoner:  $D_8(p, q) = \max |q_i - p_i|$

## Avstandsmetrikker

- Tre piksler  $p, q, z$  med koordinater  $(x, y), (s, t)$  og  $(v, w)$

- Avstandsfunksjonen  $D(p, q)$  er en metrikk hvis

- $D(p, q) \geq 0$  (*ikke-negativitet*)
- $D(p, q) = 0$  hvis og bare hvis  $p=q$  (*identitet*)
- $D(p, q) = D(q, p)$  (*symmetri*)
- $D(p, z) \leq D(p, q) + D(q, z)$  (*trekant-ulikhet*)

## Avstandsmetrikker - II

- Gitt avstandsmålene  $D_4$  og  $D_8$  :

- Q: Tilfredsstill  $D_4$  og  $D_8$  alle kravene til en metrikk?

0	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

0	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	4
3	3	3	3	4
4	4	4	4	4

- Q: Er  $\text{floor}(D_e) = (\text{største heltall} \leq D_e)$  en metrikk?

0	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	4
3	3	3	4	5
4	4	4	5	5

## Sentrale temaer i dag

- Romlig oppløsning
  - Punktspredningsfunksjon (PSF)
  - Rayleigh-kriteriet
  - Romlig frekvens
- Sampling
  - Samplingsteoremet (Shannon/Nyquist)
  - Aliasing
  - Anti-aliasing
- Kvantisering
  - Kvantiseringsfeil
  - Ikke-uniform fordeling av nivåer
- Avstandsmål, metrikker