Det matematiske fundamentet til den diskrete Fourier-transformen

Supplement til forelesning 8
INF2310 - Digital bildebehandling

Andreas Kleppe

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

13. mars 2014

Dagens mål

Dagens mål

Forstå 2D diskret Fourier-transform (2D DFT) som et ortogonalt basisskifte, og bevise denne sammenhengen.

Standard indreprodukt

- Standard indreprodukt i $\mathbb{R}^N$ er:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \vec{x}^T \vec{y} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i$$

  - Notasjon: Ofte én-indekseres vektorelementene i grunnleggende lineær algebra, men vi null-indekserer.
  - Notasjon: Ofte angis dimensjonene med små bokstaver, men vi vil her bruke store, f.eks. N istedetfor n.
  - Kan kalles *prikkprodukt* eller *skalarprodukt*.
  - $\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ er den euklidske normen.

- Standard indreprodukt i $\mathbb{C}^N$ er:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \vec{x}^T \vec{y}^* = \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i^*$$

  - Notasjon: * betegner kompleks-konjugering.

Ortogonalitet

- Et *indreproduktrom* er
  et vektorrom med et spesifikt indreprodukt.
  - F.eks. det euklidske rommet i $\mathbb{R}^3$, altså vektorrommet $\mathbb{R}^3$ med standard indreprodukt i $\mathbb{R}^3$ som indreprodukt.
- To vektorer $\vec{x}$ og $\vec{y}$ kalles *ortogonale* i et indreproduktrom hvis $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$. Vi skriver at $\vec{x} \perp \vec{y}$.
  - Her betegner $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indreproduktet til indreproduktrommet.

Standard indreprodukt for komplekse matriser

- Standard indreprodukt i $\mathbb{C}^{M,N}$ er:

$$\langle A, B \rangle := \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_{ij} b_{ij}^*$$

- To matriser A og B er ortogonale hvis $\langle A, B \rangle = 0$.
    - Dette er egentlig bare en spesialtilfelle av definisjonen på forrige slide fordi $\mathbb{C}^{M,N}$ er et vektorrom på lik linje med $\mathbb{C}^N$; begrepet *vektor* brukes i denne sammenhengen som en betegnelse på elementene i et vektorrom.

Basis

- En *basis* for et vektorrom V er en mengde vektorer $\{\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_{N-1}\}$ (der $\vec{v}_i \in V$ for alle i) som:
  1. Er lineært uavhengige, dvs., $\sum_{i=0}^{N-1} c_i \vec{v}_i = 0 \Rightarrow c_i = 0 \; \forall i$
  2. Utspenner V, dvs., $V = \mathrm{Span}\{v_0, \ldots, v_{N-1}\}$
- En basis (for V) kan betraktes som en minst mulig mengde som kan representere alle vektorer (i V).
- Å skifte basisen som brukes til å uttrykke en vektor kalles et *basisskifte*.
- Et basisskifte endrer hvordan vektoren er representert, men ikke hva den representerer.

Ortogonal basis I

- En mengde vektorer $\{\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{N-1}\}$ kalles en *ortogonal mengde* dersom $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0 \ \forall i \neq j$
- En *ortogonal basis* er en basis og en ortogonalt mengde.
- Et *ortogonalt basisskifte* er et basisskifte mellom ortogonale basiser.

Ortogonal basis II

Teorem: Ortogonalt basisskifte

La $S := \{\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_{N-1}\}$ være en ortogonal basis for et indreproduktrom. Enhver $\vec{y}$ i dette rommet kan da skrives som:

$$\vec{y} = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \vec{v}_i$$

der c_i for $i = 0, 1, \ldots, N-1$ er gitt ved:

$$c_i = \frac{\langle \vec{y}, \vec{v}_i \rangle}{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle}$$

der $\langle \cdot, \cdot \rangle$ betegner indreproduktet til indreproduktrommet. $c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}$ kalles koordinatene til $\vec{y}$ mhp. S.

En ortogonal basis

For $u = 0, 1, \dots, M-1$ og $v = 0, 1, \dots, N-1$, la:

$$A_{u,v} := \frac{1}{MN} \begin{bmatrix} e^{j2\pi\left(\frac{u\cdot 0}{M}+\frac{v\cdot 0}{N}\right)} & \dots & e^{j2\pi\left(\frac{u\cdot 0}{M}+\frac{v(N-1)}{N}\right)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi\left(\frac{u(M-1)}{M}+\frac{v\cdot 0}{N}\right)} & \dots & e^{j2\pi\left(\frac{u(M-1)}{M}+\frac{v(N-1)}{N}\right)} \end{bmatrix}$$

Teorem

$A = \{A_{u,v} \mid u = 0, 1, \dots, M-1 \wedge v = 0, 1, \dots, N-1\}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{C}^{M,N}$ mhp. standard indreprodukt i $\mathbb{C}^{M,N}$.

En ortogonal basis - bevis (basis)

Dersom A er en ortogonal *mengde*
må den også være en *basis* for det aktuelle rommet, $\mathbb{C}^{M,N}$:

1. Siden elementene i A, $A_{u,v}$, er ulik 0-matrisen,
   vil ortogonalitet medføre lineær uavhengighet.
2. A utspenner $\mathbb{C}^{M,N}$ hvis elementene er lineært uavhengige:
   - Det finnes MN elementer i A.
   - Hver matrise ligger i $\mathbb{C}^{M,N}$.
   - Dimensjonen av $\mathbb{C}^{M,N}$ er MN.
   - $\Rightarrow$ dersom elementene i A er lineært uavhengige
     må de utspenne $\mathbb{C}^{M,N}$.

Altså står og faller hele teoremet
på om A er en ortogonal mengde.

En ortogonal basis - bevis (ortogonalitet I)

A er en ortogonal mengde hvis og bare hvis $\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = 0$ når $u \neq u'$ og/eller $v \neq v'$. Generelt er:

$$\begin{aligned}\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle =& \frac{1}{M^2N^2} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} e^{-j2\pi\left(\frac{u'x}{M}+\frac{v'y}{N}\right)} \\ =& \frac{1}{M^2N^2} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} e^{j2\pi\left(\frac{(u-u')x}{M}+\frac{(v-v')y}{N}\right)}\end{aligned}$$

Dersom $u = u'$ og $v = v'$ (trengs ikke for å vise ortogonalitet):

$$\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = \frac{1}{M^2N^2} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} e^{0} = \frac{1}{MN}$$

En ortogonal basis - bevis (ortogonalitet II)

Dersom $v \neq v'$:

$$\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} e^{j2\pi \frac{(u-u')x}{M}} \sum_{y=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{(v-v')y}{N}}$$

Siden $v \neq v'$ vil $v - v' \in \{-(N-1), \ldots, -1, 1, \ldots, N-1\}$ og dermed $e^{j2\pi \frac{v-v'}{N}} \neq 1$. Siden $\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1-r^n}{1-r}$ når $r \neq 1$:

$$\begin{aligned}
\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle =& \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} e^{j2\pi \frac{(u-u')x}{M}} \cdot \frac{1 - e^{j2\pi(v-v')}}{1 - e^{j2\pi \frac{v-v'}{N}}} \\
=& \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} e^{j2\pi \frac{(u-u')x}{M}} \cdot \frac{1 - 1}{1 - e^{j2\pi \frac{v-v'}{N}}} = 0
\end{aligned}$$

En ortogonal basis - bevis (ortogonalitet III)

Dersom $u \neq u'$ kan vi føre et helt tilsvarende resonnement for å vise at $\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = 0$:

1. Bytt summasjonsrekkefølgen.
2. Trekk ut potensen med $v - v'$ i eksponenten fra indre sum.
3. $u - u' \in \{-(M-1), \ldots, -1, 1, \ldots, M-1\}$
   $\Rightarrow e^{j2\pi \frac{u-u'}{M}} \neq 1$
   $\Rightarrow$ kan bruke formelen for geometrisk rekke.
4. Telleren blir 0 $\Rightarrow$ hele uttrykket blir 0.

En ortogonal basis - bevis (ortogonalitet IV)

Vi har altså vist at $\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = (MN)^{-1}\delta(u-u', v-v')$, der δ er Kronecker delta, dvs. at:

- 0 når $u \neq u'$ og/eller $v \neq v'$.
  - $\Rightarrow$ A er en ortogonal mengde.
- $(MN)^{-1}$ når $u = u'$ og $v = v'$.
  - $\Rightarrow$ mengden av $\sqrt{MN}A_{u,v}$ for $u = 0, 1, \ldots, M-1$ og $v = 0, 1, \ldots, N-1$ er en *ortonormal* mengde (dvs. en ortogonal mengde der alle elementene har indreproduktnorm 1).

Sammen med basis-beviset har vi dermed bevist teoremet; $A = \{A_{u,v} \,|\, u = 0, 1, \ldots, M-1 \wedge v = 0, 1, \ldots, N-1\}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{C}^{M,N}$ mhp. standard indreprodukt i $\mathbb{C}^{M,N}$. $\square$

2D DFT - et ortogonalt basisskifte I

Siden A er en ortogonal basis for $\mathbb{C}^{M,N}$ mhp. dets standard indreprodukt, så sier teoremet om ortogonalt basisskifte at:

- Enhver $f \in \mathbb{C}^{M,N}$ oppfyller:

$$f = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} c_{u,v} A_{u,v}$$

som etter og omdøpt $c_{u,v}$ til $F(u,v)$ kan skrives på komponentform som:

$$f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

2D DFT - et ortogonalt basisskifte II

Videre sier teoremet om ortogonalt basisskifte:

- ... der $c_{u,v} = F(u,v)$ for $u = 0, 1, \ldots, M-1$ og $v = 0, 1, \ldots, N-1$ er gitt ved:

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= \frac{\langle f, A_{u,v}\rangle}{\langle A_{u,v}, A_{u,v}\rangle} \\
&= \frac{(MN)^{-1}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}}{(MN)^{-1}} \\
&= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}
\end{aligned}
$$

2D DFT - et ortogonalt basisskifte III

- Vi definerer 2D diskret Fourier-transform (2D DFT) av et bilde $f \in \mathbb{R}^{M,N}$ som koordinatene til f mhp. A.
- Altså er 2D DFT av f matrisen $F \in \mathbb{C}^{M,N}$ som er gitt ved:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

for $u = 0, 1, \ldots, M-1$ og $v = 0, 1, \ldots, N-1$.

- Vi gå tilbake til standardbasisen for matriser ved å bruke:

$$f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

for $x = 0, 1, \ldots, M-1$ og $y = 0, 1, \ldots, N-1$.
Kalles 2D invers diskret Fourier-transform (2D IDFT).

Egenskaper ved 2D DFT: Periodisk

Betegn 2D DFT-en til bildet $f \in \mathbb{R}^{M,N}$ som F.

F er periodisk

$F(u,v) = F(u+kM, v+kN)$ når $k \in \mathbb{Z}$.

Bevis:

$$
\begin{aligned}
F(u+kM, v+kN) &= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi\left(\frac{(u+kM)x}{M} + \frac{(v+kN)y}{N}\right)} \\
&= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} e^{-j2\pi k(x+y)} \\
&= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} = F(u,v)
\end{aligned}
$$

$\square$

PS: Gjelder selv om f er kompleks.

Egenskaper ved 2D DFT: f blir også periodisk

Betegn 2D DFT-en til bildet $f \in \mathbb{R}^{M,N}$ som F.

f er periodisk

$f(x,y) = f(x + kM, y + kN)$ når $k \in \mathbb{Z}$.

Bevis: Som forrige:

$$
\begin{aligned}
f(x + kM, y + kN) &= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi\left(\frac{(u+kM)x}{M} + \frac{(v+kN)y}{N}\right)} \\
&= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} e^{j2\pi k(x+y)} \\
&= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} = f(x,y)
\end{aligned}
$$

$\square$

Altså antas indirekte at f er periodisk når vi bruker 2D DFT.

Egenskaper ved 2D DFT: Konjugert symmetrisk

Betegn 2D DFT-en til bildet $f \in \mathbb{R}^{M,N}$ som F.

F er konjugert symmetrisk

$F(u,v) = F^*(-u,-v)$.

Bevis:

$$F^*(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f^*(x,y) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi\left(\frac{-ux}{M}+\frac{-vy}{N}\right)} = F(-u,-v)$$

Siden $F(-u,-v) = F^*(u,v)$, så er $F(u,v) = F^*(-u,-v)$. $\square$

Merk: f må være reell!

Egenskaper ved 2D DFT: Sinus og cosinus I

Eulers formel relaterer den komplekse eksponentialen til de trigonometriske funksjonene:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

Fra denne formelen får vi de to trigonometriske identitetene:

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\cos\theta + \cos\theta}{2} + \frac{j\sin\theta - j\sin\theta}{2} \\ &= \frac{\cos\theta + j\sin\theta + \cos(-\theta) + j\sin(-\theta)}{2} = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{j\sin\theta + j\sin\theta}{2j} + \frac{\cos\theta - \cos\theta}{2j} \\ &= \frac{j\sin\theta + \cos\theta - j\sin(-\theta) - \cos(-\theta)}{2j} = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}\end{aligned}$$

Egenskaper ved 2D DFT: Sinus og cosinus II

Korollar: 2D DFT av en samplet 2D cosinus

Den samplede cosinusen $f(x,y) = \cos\left(2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)\right)$ med $u', v' \in \mathbb{Z}$, $|u'| < M/2$ og $|v'| < N/2$ sin 2D DFT er $F(u,v) = \frac{MN}{2}\left(\delta(u-u', v-v') + \delta(u+u', v+v')\right)$.

Bevis: For $|u| < M/2$ og $|v| < N/2$ er:

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} \cos\left(2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)\right) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \\
&= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} \frac{e^{j2\pi\left(\frac{u'x}{M}+\frac{v'y}{N}\right)} + e^{-j2\pi\left(\frac{u'x}{M}+\frac{v'y}{N}\right)}}{2} e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \\
&= \frac{MN}{2}\left(\delta(u-u', v-v') + \delta(u+u', v+v')\right)
\end{aligned}
$$

$\square$

Egenskaper ved 2D DFT: Sinus og cosinus III

Korollar: 2D DFT av en samplet 2D sinus

Den samplede sinusen $f(x,y) = \sin\left(2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)\right)$, med $u', v' \in \mathbb{Z}$, $|u'| < M/2$ og $|v'| < N/2$ sin 2D DFT er $F(u,v) = \frac{MN}{2j}(\delta(u-u', v-v') - \delta(u+u', v+v'))$.

Bevis: Helt analogt: For $|u| < M/2$ og $|v| < N/2$ er:

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} \sin\left(2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)\right) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

$$= \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} \frac{e^{j2\pi\left(\frac{u'x}{M}+\frac{v'y}{N}\right)} - e^{-j2\pi\left(\frac{u'x}{M}+\frac{v'y}{N}\right)}}{2j} e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

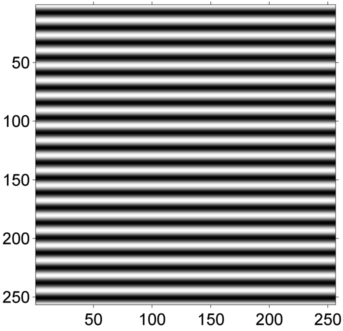
$$= \frac{MN}{2j}(\delta(u-u', v-v') - \delta(u+u', v+v')) \qquad \square$$

Egenskaper ved 2D DFT: Sinus og cosinus IV

- 2D DFT-en til en samplet 2D sinus eller cosinus med frekvens (u', v') er altså hhv.
  $\frac{MN}{2j}(\delta(u-u', v-v') - \delta(u+u', v+v'))$ og
  $\frac{MN}{2}(\delta(u-u', v-v') + \delta(u+u', v+v'))$.
  - u' og v' må være heltallige.
    - Vi antok i tillegg at de var mindre enn halvparten av sine respektive bildelenger i absoluttverdi, men tilsvarende egenskap gjelder generelt.
  - Enheten til frekvensen er per bildelengde, MxN.
- Ikke-null piksler i 2D DFT-en angir frekvensen!
  - At det er et symmetrisk par er en nødvendighet ettersom f er reell;
    vi har jo vist at 2D DFT da er konjugert symmetrisk.

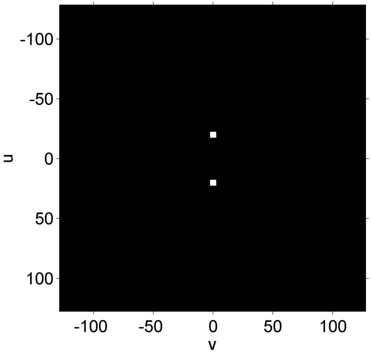
Eksempel I: 2D DFT av samplet 2D cosinus

Samplet 2D cosinus
med frekvens $(20, 0)$



Svart og hvitt indikerer hhv. -1 og 1.

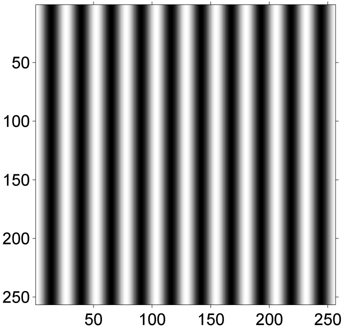
(Absoluttverdien av)
2D DFT-en



Svart og hvitt indikerer hhv. 0 og $MN/2$.
Merk at senterpikselet er (0,0)-frekvensen.
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

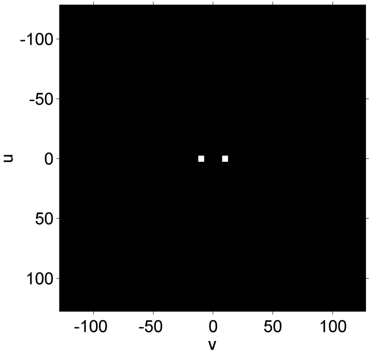
Eksempel II: 2D DFT av samplet 2D cosinus

Samplet 2D cosinus med frekvens $(0, 10)$



Svart og hvitt indikerer hhv. -1 og 1.

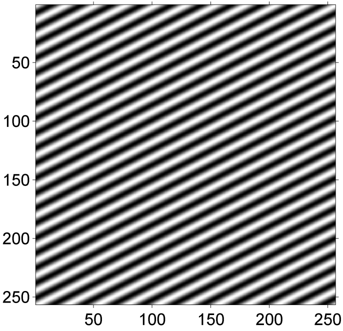
(Absoluttverdien av) 2D DFT-en



Svart og hvitt indikerer hhv. 0 og $MN/2$.
Merk at senterpikselet er (0,0)-frekvensen.
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

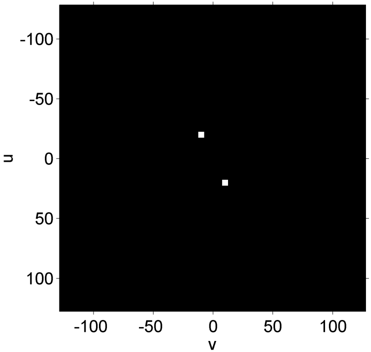
Eksempel III: 2D DFT av samplet 2D cosinus

Samplet 2D cosinus med frekvens $(20, 10)$



Svart og hvitt indikerer hhv. -1 og 1.

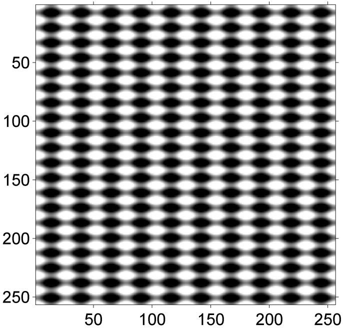
(Absoluttverdien av) 2D DFT-en



Svart og hvitt indikerer hhv. 0 og $MN/2$.
Merk at senterpikselet er (0,0)-frekvensen.
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

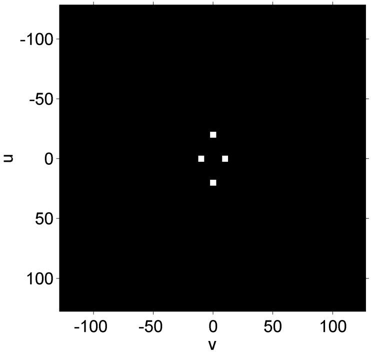
Eksempel IV: 2D DFT av summen av to cosinuser

cosinus med $(20, 0) +$
cosinus med $(0, 10)$



Svart og hvitt indikerer hhv. -2 og 2.

(Absoluttverdien av)
2D DFT-en



Svart og hvitt indikerer hhv. 0 og $MN/2$.
Merk at senterpikselet er (0,0)-frekvensen.
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

Oppsummering

- 2D DFT av bildet $f \in \mathbb{R}^{M,N}$ er koordinatene til f mhp. $A = \{A_{u,v} : u = 0, 1, \ldots, M-1 \wedge v = 0, 1, \ldots, N-1\}$, der:

$$A_{u,v} := \frac{1}{MN} \begin{bmatrix} e^{j2\pi\left(\frac{u\cdot 0}{M}+\frac{v\cdot 0}{N}\right)} & \ldots & e^{j2\pi\left(\frac{u\cdot 0}{M}+\frac{v(N-1)}{N}\right)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi\left(\frac{u(M-1)}{M}+\frac{v\cdot 0}{N}\right)} & \ldots & e^{j2\pi\left(\frac{u(M-1)}{M}+\frac{v(N-1)}{N}\right)} \end{bmatrix}$$

- A er en ortogonal basis for $\mathbb{C}^{M,N}$.
- 2D DFT av en sinus eller cosinus med frekvens (u, v) er kun ulik 0 i (u, v) og $(-u, -v)$.