
INF 2310 – Digital bildebehandling

SEGMENTERING VED TERSKLING

Global histogram-basert terskling

Variabel og multivariabel terskling

Lokal (adaptiv) terskling

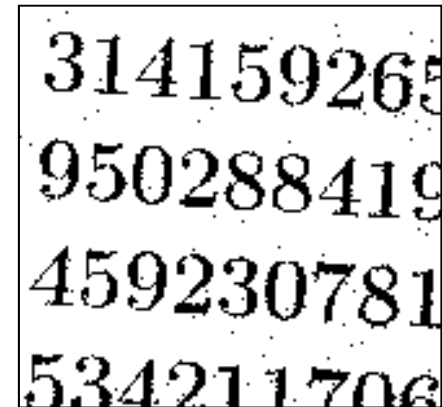
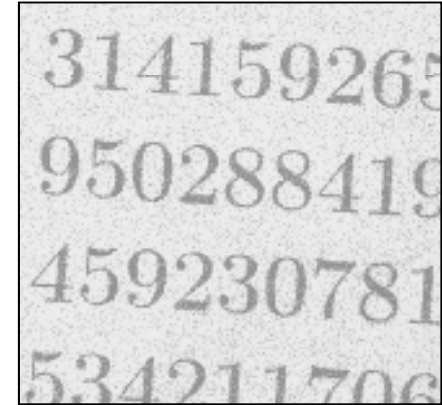
GW: 10.3 (litt grundigere enn i boka)

Om pensum fra kap. 10

- Kapittel 10 i boka introduserer et stort og viktig tema, terskling, men dekker det noe overfladisk.
- I INF2310 foreleser vi bare om segmentering ved
 - Kant-deteksjon (GW kap 10 – 10.2.7) – forelesning nr 7.
 - Terskling (GW kap 10.3) – dagens forelesning (nr 13),
men tar dette noe grundigere enn boka.
- Lenking av kanter (10.2.7), Hough-transform (10.2.7), region-basert segmentering (10.4), "watershed" (10.5) og bevegelses-segmentering (10.6) tar vi i INF4300.

Hva er segmentering?

- Segmentering er en prosess som deler opp bildet i meningsfulle regioner.
- Segmentering er ett av de viktigste elementene i et komplett bildeanalyse-system.
- I segmentering får vi fram regioner og objekter som senere skal beskrives og gjenkjennes.
- I det enkleste tilfellet har vi bare to typer regioner:
 - Forgrunn
 - Bakgrunn



Eksempel:
finne symboler for OCR

Segmenterings-problemer

- Problemet blir banalt hvis vi bare har en objekt-region, og denne er homogen.
- Men vi har som regel flere objekter i bildet.
- Objektene er sjelden helt like, selv om de er av samme type.
- Ofte har vi flere typer/klasser av objekter samtidig.
- Belysningen kan variere over bildet.
- Refleksjon, farge etc. kan variere over objekter i bildet.



Hva og hvor er objektet
i dette bildet?

To segmenterings-kategorier

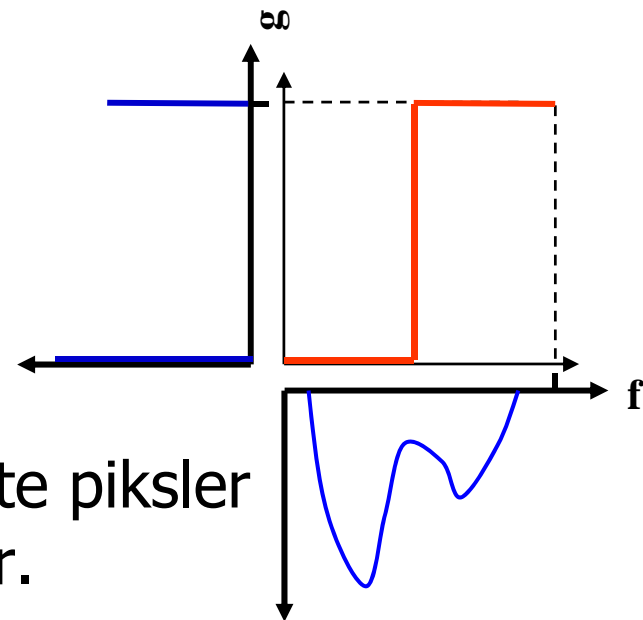
- Vi skiller mellom to kategorier av metoder, basert på hhv. likhet og diskontinuitet mellom pikslene i bildet.
- 1. Ved terskling og region-basert segmentering får vi fram de pikslene som ligner hverandre.
Dette gir alle pikslene i objektet.
- 2. Ved kant-basert segmentering finner vi basis-elementer i omrisset til objektene:
 - Kant-punkter, linje-punkter, hjørne-punkter..
 - I neste steg:
 - Tynner brede kanter
 - Lenker punktene sammen

Terskling

- Hvis vi har grunn til å anta at objektene f.eks. er lysere enn bakgrunnen, kan vi sette en terskel T og lage oss et binært ut-bilde $g(x,y)$ ved mappingen:

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } f(x, y) \leq T \\ 1 & \text{hvis } f(x, y) > T \end{cases}$$

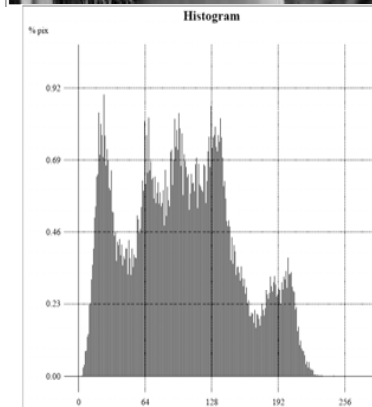
- Da har vi fått et ut-bilde $g(x,y)$ med bare to mulige verdier.
- Med riktig valg av T vil nå de fleste piksler med $g(x,y)=1$ være objekt-piksler.



Flernivå terskling

- Har vi flere klasser av objekter med forskjellig intensitet, så kan vi utvide dette til M gråtoneintervaller ved hjelp av $M-1$ terskler.

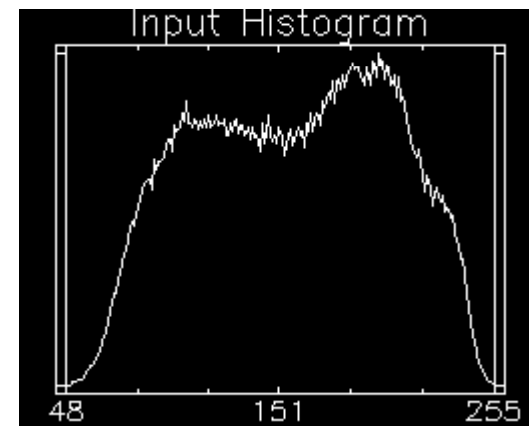
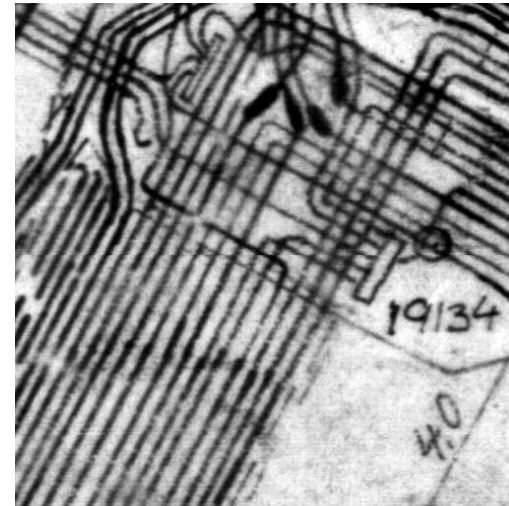
$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{hvis} & 0 \leq f(x, y) \leq t_1 \\ 1 & \text{hvis} & t_1 \leq f(x, y) \leq t_2 \\ \dots & & \\ M-1 & \text{hvis} & t_{M-1} \leq f(x, y) \leq G-1 \end{cases}$$



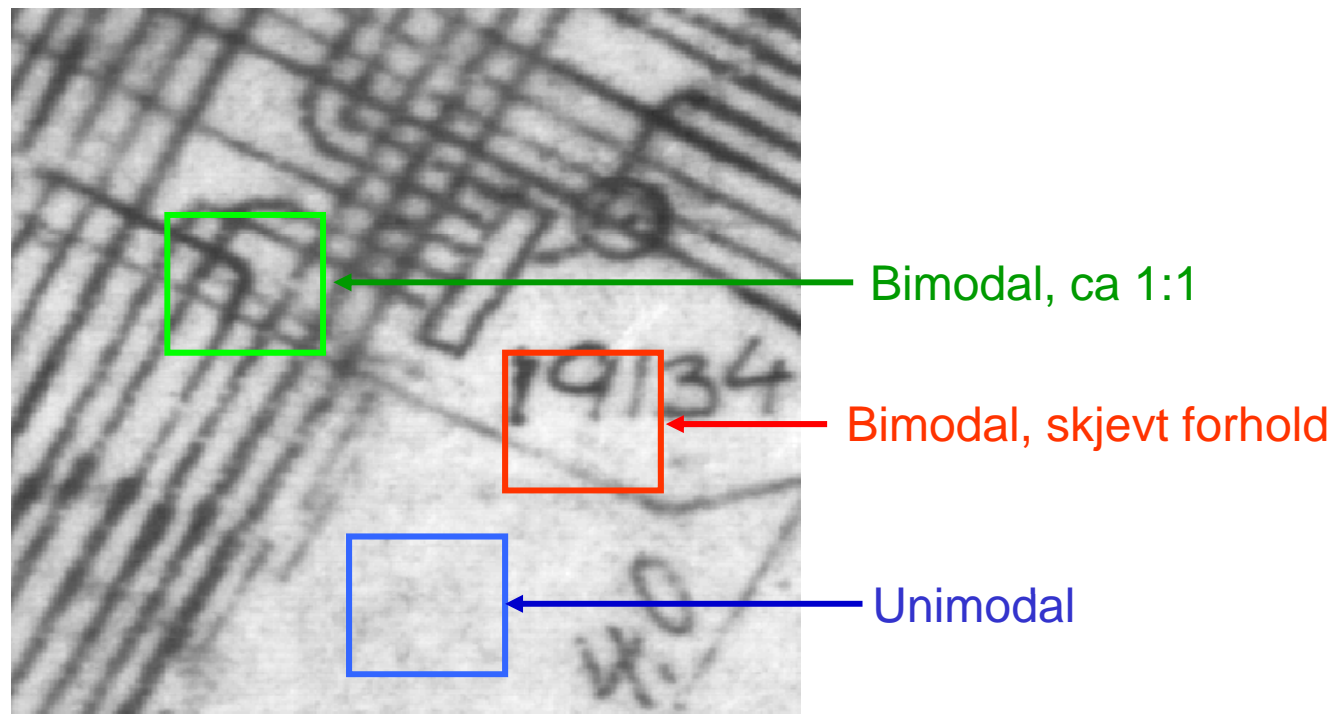
- Terskling er et spesialtilfelle av klassifikasjon.
- Jfr. histogram-utjevning med noen få gråtoner.

Basis - terskling

- Anta at et bilde har to intensitets-områder: forgrunn og bakgrunn.
- Histogrammet vil da vise to topper, gjerne med et "dalsøkk" mellom.
- Avhengig av hvor mye forgrunn vi har i forhold til bakgrunn, kan det hende vi ikke ser to topper.
- Hvor skal vi legge terskelen?



Eksempel – bimodalitet i lokale vinduer



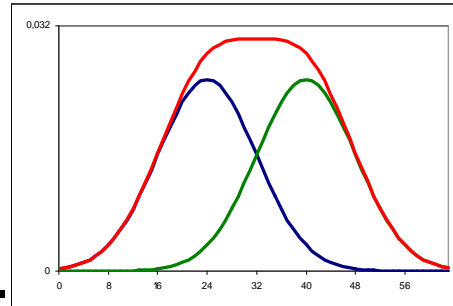
To Gauss-fordelinger

- To Gauss-fordelinger med samme standardavvik, σ .
- $D = \mu_2 - \mu_1$
- Like a priori sannsynligheter.
- D avgjør om vi ser to topper.

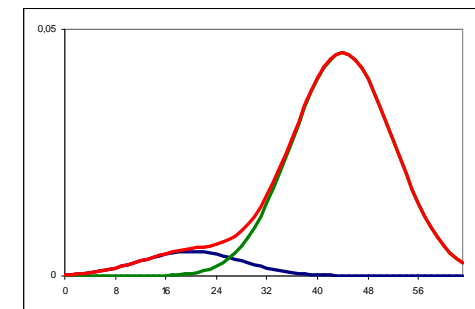
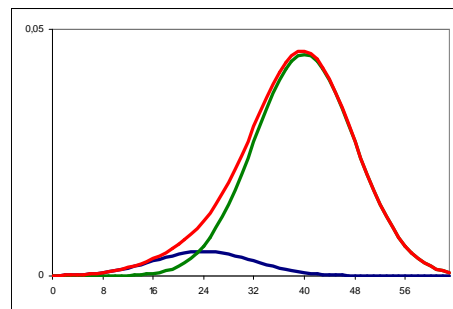
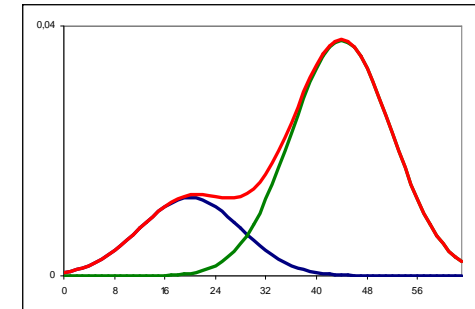
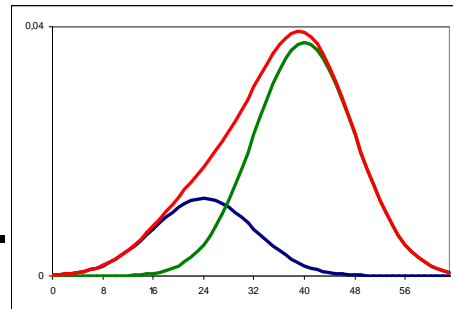
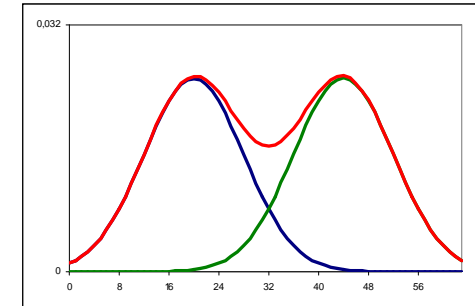
- Ulike a priori sannsynlighet.
- D avgjør om vi ser to topper.

- Veldig ulike sannsynligheter.
- Selv ved stor verdi for D ser vi ikke to topper.

$$D = \mu_2 - \mu_1 = 2\sigma$$



$$D = \mu_2 - \mu_1 = 3\sigma$$



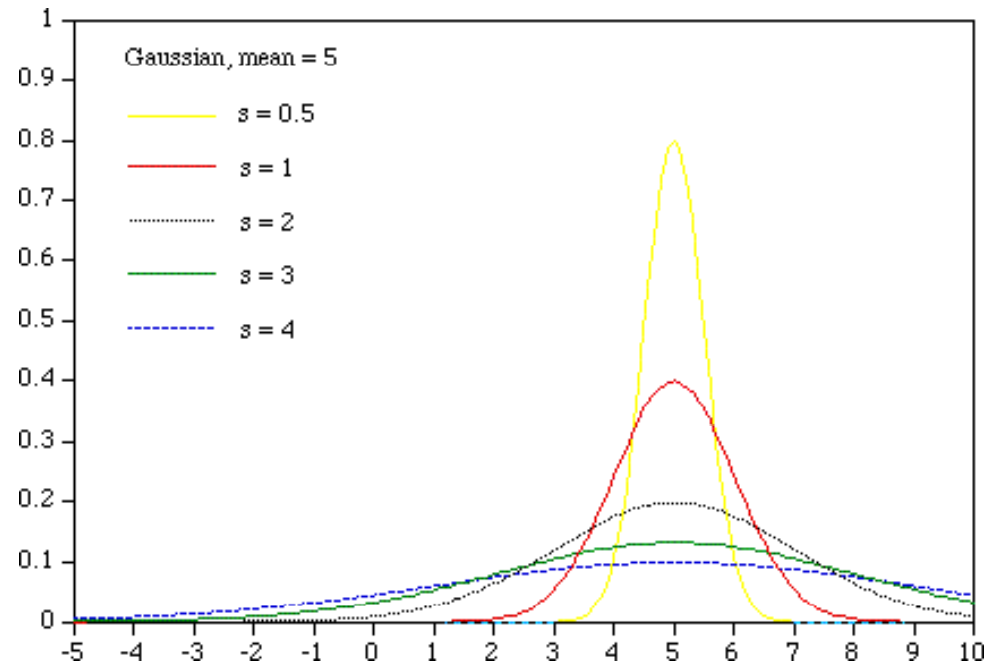
Fordelinger, standardavvik og varians

- En Gauss-fordeling (normalfordeling) er gitt ved

- middelveiden μ
- variansen σ^2 :

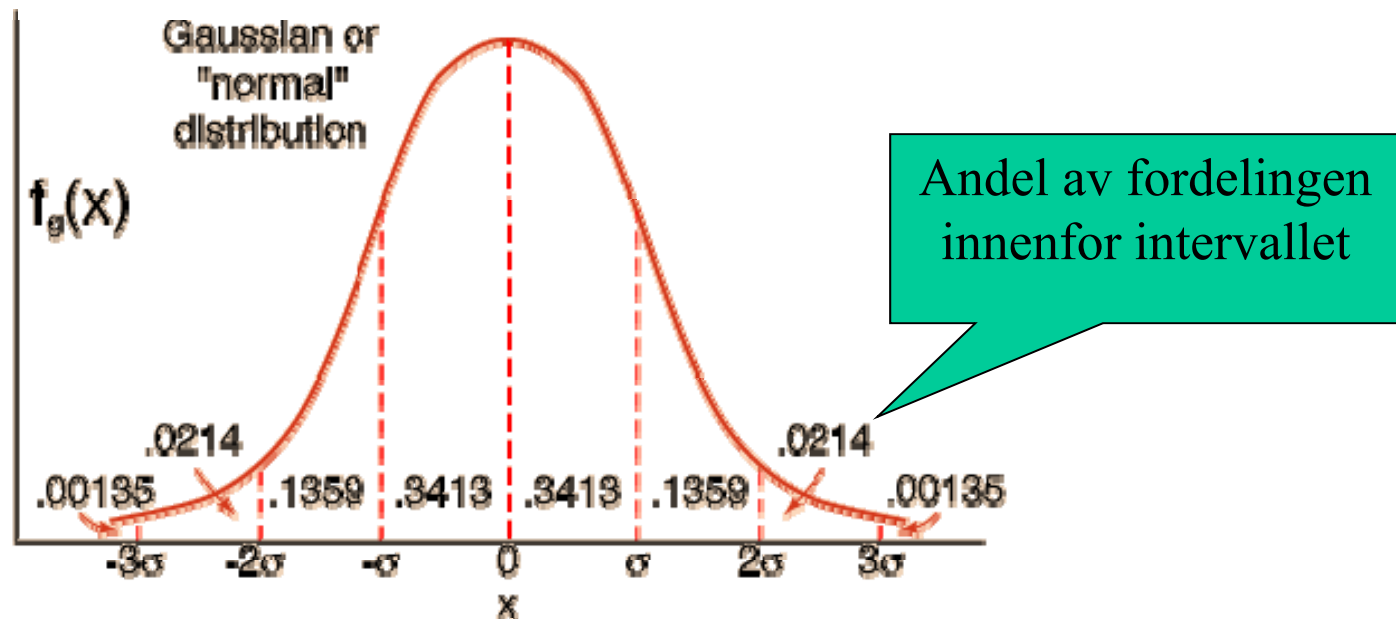
$$p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Varians: σ^2 ,
- Standardavvik: σ



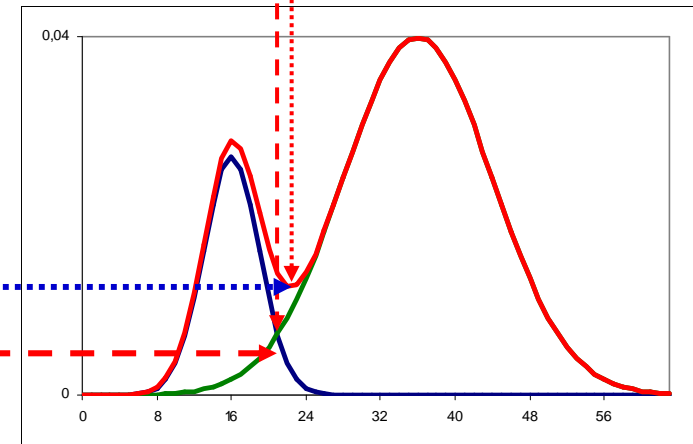
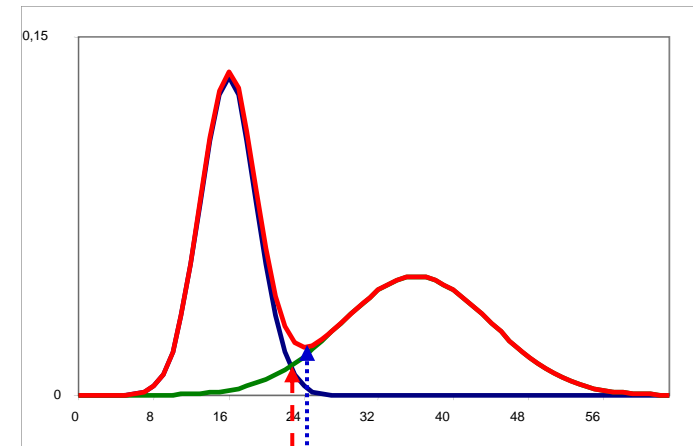
Betydningen av σ

- Hvis pikselverdiene til et objekt i et bilde er normalfordelt med middelværdi μ og standardavvik σ så vil 68% av pikselverdiene ligge i intervallet $\langle \mu - \sigma, \mu + \sigma \rangle$.
- 95% av pikselverdiene ligger i intervallet $\langle \mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma \rangle$.
- 99% av pikselverdiene ligger i intervallet $\langle \mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma \rangle$.

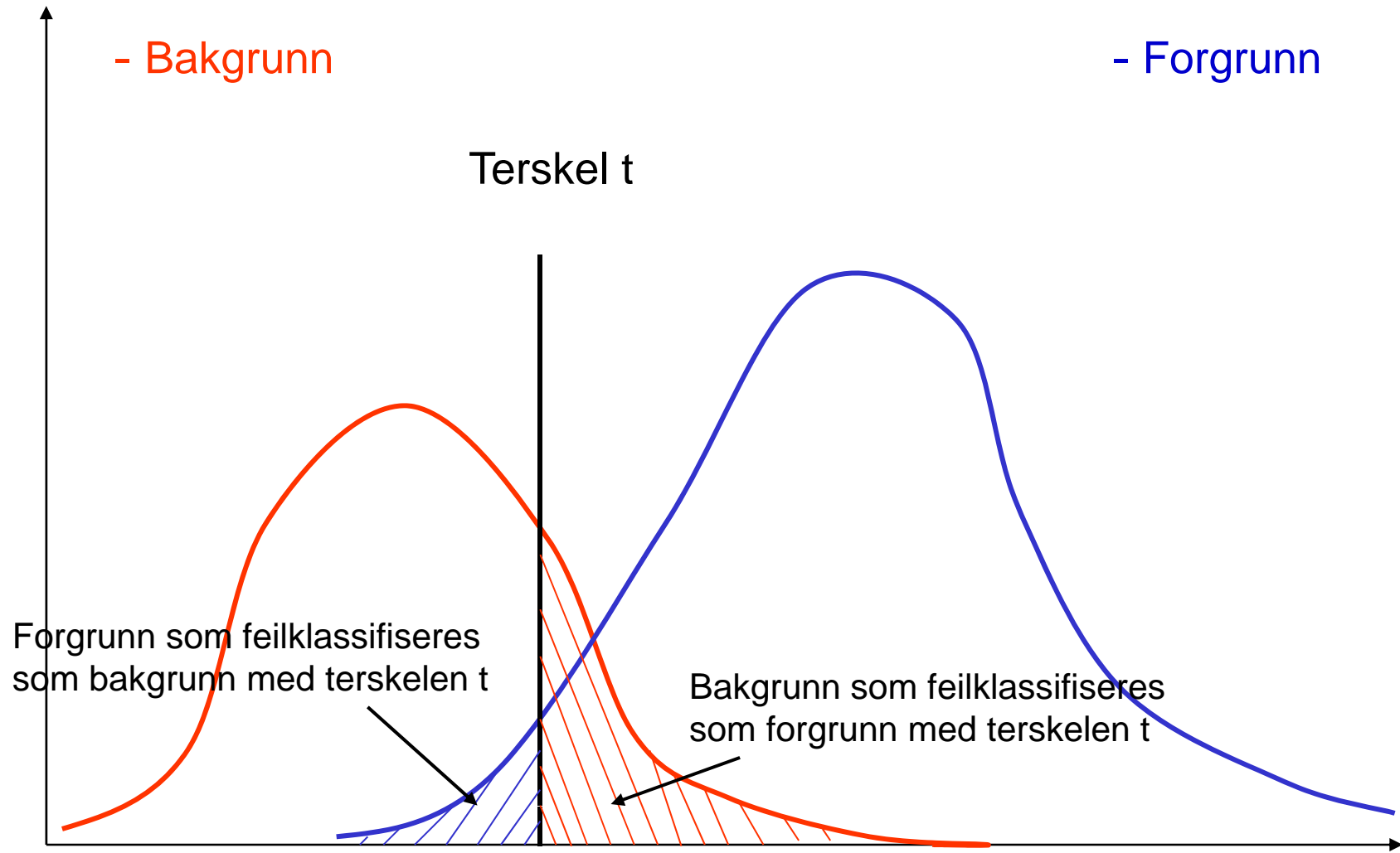


Histogram, normalisert, skalert

- Et eksempel:
- To Gauss-fordelinger
 - bakgrunn : $\mu_1 = 16$, $\sigma_1 = 3$
 - forgrunn : $\mu_2 = 36$, $\sigma_2 = 8$
- Normaliserte histogrammer:
→
- Skalerer med *a priori* sannsynligheter, f.eks. $P_1 = 0.2$, $P_2 = 1 - P_1 = 0.8$
→
- Dette kan forskyve både
 - minimum i bildets histogram
 - skjæringspunktet mellom fordelingene



Klassifikasjons-feil ved terskling



Klassifikasjonsfeil ved terskling

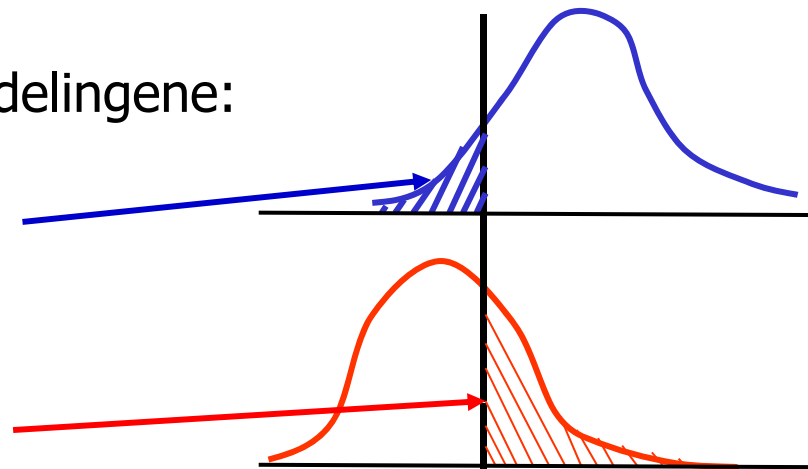
- Anta at histogrammet er en sum av to fordelinger $b(z)$ og $f(z)$, b og f er **normaliserte** bakgrunns- og forgrunns-histogrammer.
- La F og B være **a priori sannsynlighet** for bakgrunn og forgrunn ($B+F=1$)
- Det normaliserte histogrammet til bildet kan da skrives

$$p(z) = B \cdot b(z) + F \cdot f(z)$$

- Sannsynlighetene for å feilklassifisere et piksel, gitt en terskelverdi t , finner vi fra de normaliserte fordelingene:

$$E_B(t) = \int_{-\infty}^t f(z) dz$$

$$E_F(t) = \int_t^{\infty} b(z) dz$$

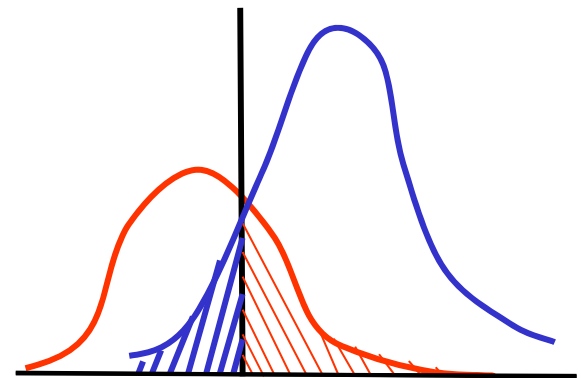
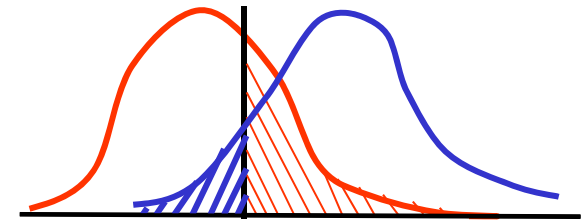


Den totale feilen

- Vi har funnet andelen feilklassifikasjon i hver fordeling.
- Den totale feilen finner vi ved å multiplisere med a priori sannsynlighetene for forgrunn og bakgrunn:

$$\begin{aligned} E(t) &= F \cdot E_B(t) + B \cdot E_F(t) \\ &= F \int_{-\infty}^t f(z) dz + B \int_t^{\infty} b(z) dz \end{aligned}$$

- Legges terskelen veldig høyt eller veldig lavt, blir feilen stor.
- Det er rimelig å anta at feilen har et minimum for en bestemt verdi $t = T$.



Finn den T som minimerer feilen

$$E(t) = F \int_{-\infty}^t f(z) dz + B \int_t^{\infty} b(z) dz$$

- Deriverer $E(t)$ mhp. t vha. Leibnitz regel for derivasjon av integraler.
- Setter den deriverte lik 0 og får:

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0 \Rightarrow F \cdot f(T) = B \cdot b(T)$$

VIKTIG !!!

- Merk at dette er en generell løsning som gir minst feil.
- Det er ingen restriksjoner mht. fordelingene b og f !!

Terskling av to Gauss-fordelinger

- Anta at bakgrunns- og forgrunns-intensitetene følger hver sin Gauss-fordeling, $b(z)$ og $f(z)$, slik at det normaliserte histogrammet kan skrives som

$$p(z) = \frac{B}{\sigma_B \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_B)^2}{2\sigma_B^2}} + \frac{F}{\sigma_F \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_F)^2}{2\sigma_F^2}}$$

- F og B er a priori sannsynligheter for for- og bakgrunn
- μ_B og μ_F er middelerdiene for bakgrunn og forgrunn.
- σ_B^2 og σ_F^2 er variansen for bakgrunn og forgrunn.

Optimal løsning – to Gauss-fordelinger

- Vi vet at optimal løsning ligger der hvor

$$F \cdot f(T) = B \cdot b(T)$$

- Vi setter inn for $b(z)$ og $f(z)$:

$$\frac{F}{\sigma_F \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(T-\mu_F)^2}{2\sigma_F^2}} = \frac{B}{\sigma_B \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(T-\mu_B)^2}{2\sigma_B^2}}$$

- Vi kan stryke $\sqrt{2\pi}$ og ta logaritmen:

$$\frac{(T - \mu_F)^2}{2\sigma_F^2} - \ln\left(\frac{F}{\sigma_F}\right) = \frac{(T - \mu_B)^2}{2\sigma_B^2} - \ln\left(\frac{B}{\sigma_B}\right)$$

- Dette gir en annengrads-ligning i T:

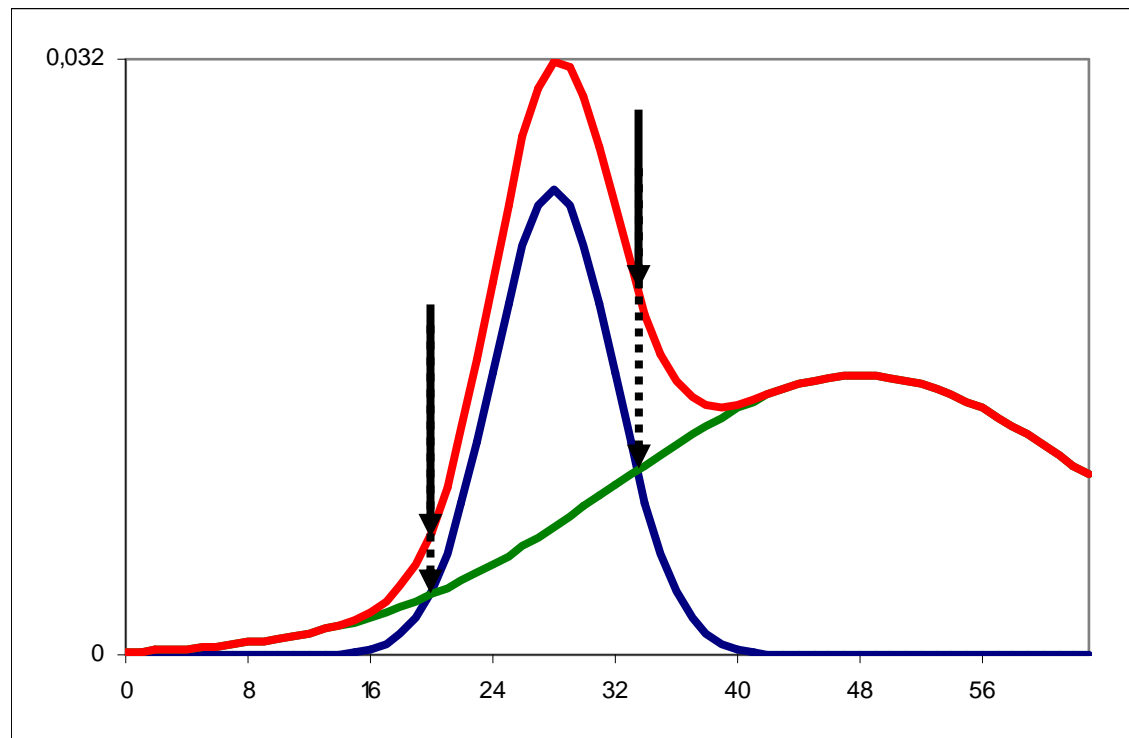
$$(\sigma_B^2 - \sigma_F^2)T^2 + 2(\mu_B\sigma_F^2 - \mu_F\sigma_B^2)T + \sigma_B^2\mu_F^2 - \sigma_F^2\mu_B^2 + 2\sigma_B^2\sigma_F^2 \ln\left(\frac{B\sigma_F}{F\sigma_B}\right) = 0$$

- **Vi kan altså få to løsninger for T.**

To terskler – når kan det skje?

- Hvis standardavvikene i de to Gauss-fordelingene er forskjellige
 - og skjæringspunktene mellom fordelingene (skalert med a priori sannsynlighet) ligger innenfor gråtoneskalaen i bildet

- En terskelverdi for hvert skjæringspunkt.
- Det er bare mellom de to tersklene at flertallet av pikslene er bakgrunns piksler!



Hvor ligger optimal terskel?

- Vi har en annengradsligning i T:

$$(\sigma_B^2 - \sigma_F^2)T^2 + 2(\mu_B\sigma_F^2 - \mu_F\sigma_B^2)T + \sigma_B^2\mu_F^2 - \sigma_F^2\mu_B^2 + 2\sigma_B^2\sigma_F^2 \ln\left(\frac{B\sigma_F}{F\sigma_B}\right) = 0$$

- Hvis standard-avvikene i de to fordelingene er like ($\sigma_B = \sigma_F = \sigma > 0$) får vi en enklere ligning:

$$2(\mu_B - \mu_F)T - (\mu_B + \mu_F)(\mu_B - \mu_F) + 2\sigma^2 \ln\left(\frac{B}{F}\right) = 0$$

⇕

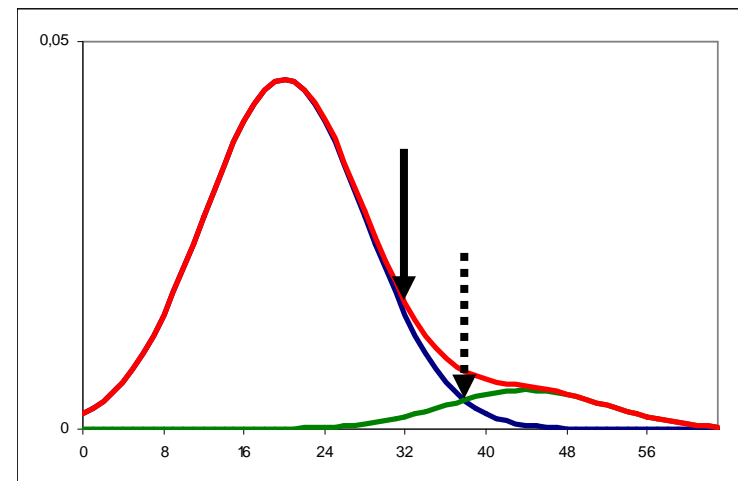
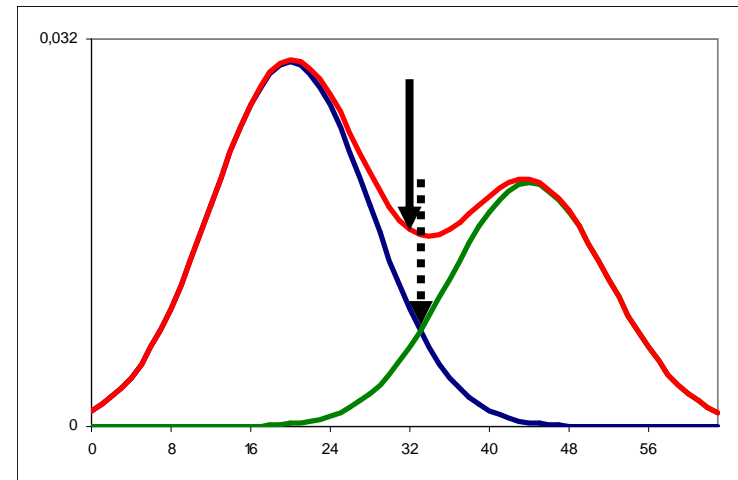
$$T = \frac{(\mu_B + \mu_F)}{2} + \frac{\sigma^2}{(\mu_B - \mu_F)} \ln\left(\frac{F}{B}\right)$$

- Hvis a priori sannsynlighetene F og B er omtrent like har vi en veldig enkel løsning:

$$T = \frac{(\mu_B + \mu_F)}{2}$$

Hvis vi nå bare antar at $P_1 = P_2$

- Et lite eksempel:
- For $\mu_1 = 20$ og $\mu_2 = 44$, med $\sigma_1 = \sigma_2 = 8$, så vil
 $T = (\mu_1 + \mu_2)/2 = 32$
være en OK terskel, selv om $P_1 = 0.6 \neq P_2$.
- For $P_1 = 0.9 \neq P_2$ vil feilen bli ganske stor.



En enkel tersklings-algoritme

- Start med terskel-verdi $t =$ middelveien til alle pikslene i bildet.
 - Finn middelveien ($\mu_1(t)$) av alle pikslar som er mørkere enn terskelen
 - Finn middelveien ($\mu_2(t)$) av alle pikslar som er lysere enn terskelen.
- La ny terskel-verdi være

$$t = \frac{1}{2} (\mu_1(t) + \mu_2(t))$$

- Gjenta de to punktene ovenfor til terskelen ikke flytter seg mer.
- Dette kalles Ridler og Calvard's metode
- Dette gjøres i algoritmen på side 742 i GW.
 - Hvilke betingelser må være oppfylt for at metoden skal virke?
 - Når vil denne metoden svikte?

Samme algoritme: bruk histogrammet!

- Når vi skal terskle et ukjent bilde, kjenner vi ikke μ_B eller μ_F (og heller ikke σ_B og σ_F)
- Vi kan iterativt estimere μ_B og μ_F fra bildets histogram gitt den terskelen t_k vi bruker:

$$t_{k+1} = \frac{1}{2} [\mu_1(t_k) + \mu_2(t_k)] = \frac{1}{2} \left[\frac{\sum_{i=0}^{t_k} ip(i)}{\sum_{i=0}^{t_k} p(i)} + \frac{\sum_{i=t_k+1}^{G-1} ip(i)}{\sum_{i=t_k+1}^{G-1} p(i)} \right]$$

- Merk at estimatene $\mu_1(t_k)$ og $\mu_2(t_k)$ finnes fra trunkerte fordelinger (trunkert ved terskelen t_k)

Otsu's metode - motivasjon

- Anta at vi har et gråtonebilde med G gråtoner, med normalisert histogram $p(i)$.
- Anta at bildet inneholder to populasjoner av piksler, slik at pikslene innenfor hver populasjon er noenlunde like, mens populasjonene er forskjellige.
- **Målsetting:**
 - Vi vil finne en terskel T slik at hver av de to klassene som oppstår ved tersklingen blir mest mulig homogen, mens de to klassene bli mest mulig forskjellige.
 - Klassene er homogene:
variansen i hver av de to klassene er minst mulig.
 - Separasjonen mellom klassene er stor:
avstanden mellom middelveiene er størst mulig.

Otsu's metode – enkle begreper

- A posteriori sannsynlighet for de to klassene er:

$$P_1(t) = \sum_{i=0}^t p(i), \quad P_2(t) = \sum_{i=t+1}^{G-1} p(i) = 1 - P_1(t)$$

- Middelerdien for gråtoner i de to klassene er:

$$\mu_1(t) = \frac{\sum_{i=0}^t ip(i)}{\sum_{i=0}^t p(i)} = \frac{\mu(t)}{P_1(t)}, \quad \mu(t) \equiv \sum_{i=0}^t ip(i)$$
$$\mu_2(t) = \frac{\sum_{i=t+1}^{G-1} ip(i)}{\sum_{i=t+1}^{G-1} p(i)} = \frac{\sum_{i=0}^{G-1} ip(i) - \sum_{i=0}^t ip(i)}{P_2(t)} = \frac{\mu - \mu(t)}{1 - P_1(t)}, \quad \mu \equiv \frac{\sum_{i=0}^{G-1} ip(i)}{\sum_{i=0}^{G-1} p(i)}$$

- Variansen innenfor de to klassene er:

$$\sigma_1^2(t) = \frac{\sum_{i=0}^t [i - \mu_1(t)]^2 p(i)}{P_1(t)}$$
$$\sigma_2^2(t) = \frac{\sum_{i=t+1}^{G-1} [i - \mu_2(t)]^2 p(i)}{P_2(t)}$$

Otsu's metode – litt grundig

Den totale variansen i intensitetsfordelingen

$$\sigma_{Tot}^2 = \sum_{i=0}^{G-1} (i - \mu)^2 p(i)$$

kan selvsagt deles i to ved

$$\sigma_{Tot}^2 = \sum_{i=0}^t (i - \mu)^2 p(i) + \sum_{i=t+1}^{G-1} (i - \mu)^2 p(i)$$

I hver summasjon kan vi addere og subtrahere klassens a posteriori middelve

$$\begin{aligned} \sigma_{Tot}^2 &= \sum_{i=0}^t [i - \mu_1(t) + \mu_1(t) - \mu]^2 p(i) + \sum_{i=t+1}^{G-1} [i - \mu_2(t) + \mu_2(t) - \mu]^2 p(i) \\ &= \sum_{i=0}^t [i - \mu_1(t)]^2 p(i) + \sum_{i=0}^t [\mu_1(t) - \mu]^2 p(i) + 2 \sum_{i=0}^t [i - \mu_1(t)][\mu_1(t) - \mu] p(i) \\ &\quad + \sum_{i=t+1}^{G-1} [i - \mu_2(t)]^2 p(i) + \sum_{i=t+1}^{G-1} [\mu_2(t) - \mu]^2 p(i) + 2 \sum_{i=t+1}^{G-1} [i - \mu_2(t)][\mu_2(t) - \mu] p(i) \end{aligned}$$

Otsu's metode – litt grundig II

Første ledd i hver av de to siste linjene på forrige foil kan uttrykkes ved definisjonene av $\sigma_1^2(t)$ og $\sigma_2^2(t)$.

Andre ledd kan uttrykkes ved $P_1(t)$ og $P_2(t)$, siden μ , $\mu_1(t)$ og $\mu_2(t)$ er uavhengige av summasjonsvariabelen i . Altså får vi

$$\begin{aligned} \sigma_{Tot}^2 = & P_1(t)\sigma_1^2(t) + (\mu_1(t) - \mu)^2 P_1(t) + 2(\mu_1(t) - \mu) \sum_{i=0}^t [i - \mu_1(t)]p(i) \\ & + P_2(t)\sigma_2^2(t) + (\mu_2(t) - \mu)^2 P_2(t) + 2(\mu_2(t) - \mu) \sum_{i=t+1}^{G-1} [i - \mu_2(t)]p(i) \end{aligned}$$

De to summene bakerst faller bort, fordi

$$\sum_{i=0}^t [i - \mu_1(t)]p(i) = \sum_{i=0}^t ip(i) - \sum_{i=0}^t \mu_1(t)p(i) = \mu_1(t)P_1(t) - \mu_1(t)P_1(t) = 0.$$

$$\sum_{i=t+1}^{G-1} [i - \mu_2(t)]p(i) = \sum_{i=t+1}^{G-1} ip(i) - \sum_{i=t+1}^{G-1} \mu_2(t)p(i) = \mu_2(t)P_2(t) - \mu_2(t)P_2(t) = 0.$$

Totalvariansen i bildet er summen av $\sigma_W(t)$ og $\sigma_B(t)$!

$$\sigma_{Tot}^2 = P_1(t)\sigma_1^2(t) + (1 - P_1(t))\sigma_2^2(t) + (\mu_1(t) - \mu)^2 P_1(t) + (\mu_2(t) - \mu)^2 (1 - P_1(t)) = \sigma_W^2(t) + \sigma_B^2(t)$$

Otsu's metode:

- Ønsker å minimere $\sigma_W^2(t)$ og samtidig maksimere $\sigma_B^2(t)$
- Siden σ_{Tot}^2 er konstant: finn t som maksimerer $\sigma_B^2(t)$.
- Uttrykket for $\sigma_B^2(t)$ kan skrives som (se nederst t.h., forrige foil):

$$\begin{aligned}\sigma_B^2(t) &= (\mu_1(t) - \mu)^2 P_1(t) + (\mu_2(t) - \mu)^2 (1 - P_1(t)) \\ &= \left[\frac{\mu(t)}{P_1(t)} - \mu \right]^2 P_1(t) + \left[\frac{\mu - \mu(t)}{1 - P_1(t)} - \mu \right]^2 (1 - P_1(t)) \\ &= \frac{[\mu(t) - \mu P_1(t)]^2}{P_1(t)} + \frac{[\mu - \mu(t) - \mu + \mu P_1(t)]^2}{1 - P_1(t)} \\ &= \frac{[\mu(t) - \mu P_1(t)]^2 (1 - P_1(t)) + P_1(t) [-\mu(t) + \mu P_1(t)]^2}{P_1(t)(1 - P_1(t))}\end{aligned}$$

$$= \frac{[\mu(t) - \mu P_1(t)]^2}{P_1(t)(1 - P_1(t))}$$

$$\eta(t) = \frac{\sigma_B^2(t)}{\sigma_{Tot}^2}, \quad 0 \leq \eta(t) \leq 1$$

- Otsu's metode: Søk etter maksimalverdien av $\sigma_B^2(t)$ for alle verdier av t der $0 < P_1(t) < 1$.

Otsu's metode; oppsummering

- Gitt et NxM pikslers bilde med G gråtoner.
- Finn bildets histogram, $h(k)$, $k=0,1,2,\dots,G-1$.
- Finn bildets normaliserte histogram:

$$p(k) = \frac{h(k)}{MN}, \quad k=0,1,2,\dots,G-1$$

- Beregn kumulativt normalisert histogram:

$$P_1(k) = \sum_{i=0}^k p(i), \quad k=0,1,2,\dots,G-1$$

- Beregn kumulativ middelvei, $\mu(k)$:

$$\mu(k) \equiv \sum_{i=0}^k ip(i), \quad k=0,1,2,\dots,G-1$$

- Beregn global middelvei, μ :

$$\mu \equiv \sum_{i=0}^{G-1} ip(i)$$

- Beregn variansen mellom klassene, $\sigma_B^2(k)$:

- Finn terskelen der $\sigma_B^2(k)$ har sitt maksimum.

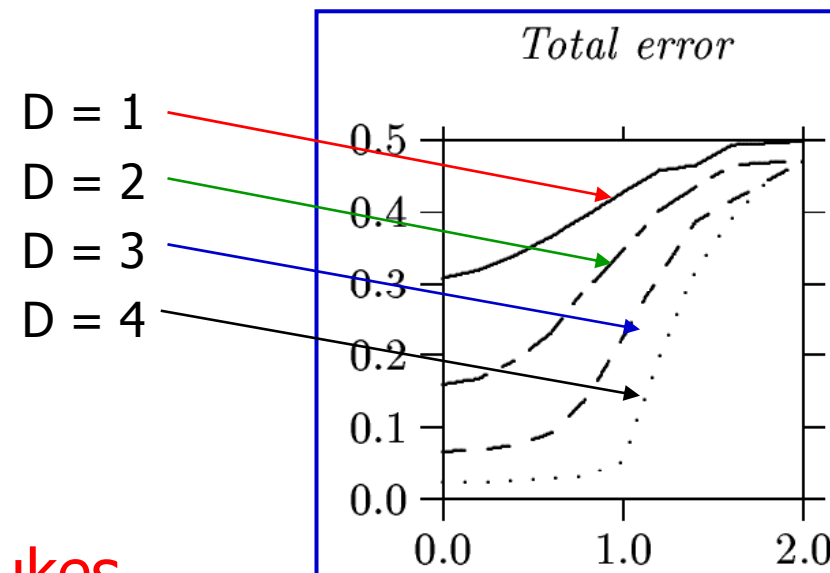
$$\sigma_B^2(t) = \frac{[\mu(t) - \mu P_1(t)]^2}{P_1(t)(1 - P_1(t))}$$

- Beregn separabilitetsmålet, $\eta(t)$:

$$\eta(t) = \frac{\sigma_B^2(t)}{\sigma_{Tot}^2}, \quad 0 \leq \eta(t) \leq 1$$

Effekten av *a priori* sannsynlighet

- Total tersklingsfeil mot $\log_{10}(P_1/P_2)$ for fire verdier av $\mu_2 - \mu_1 = D\sigma$:



- Feilen øker raskt ved $\log_{10}(P_1/P_2) \approx 1$
- => Otsu's metode bør bare brukes når $0.1 < P_1/P_2 < 10$.
- Det samme gjelder for Ridler & Calvard.
- Det finnes gode alternativer !

“Minimum feil” terskling

- Kittler og Illingworth (1985) beregner et kriterium for alle mulige terskelverdier:

$$J(t) = 1 + 2[P_1(t) \ln \sigma_1(t) + P_2(t) \ln \sigma_2(t)] \\ - 2[P_1(t) \ln P_1(t) + P_2(t) \ln P_2(t)]$$

- For hver t-verdi estimeres alle fem parametrene.
- Beregn J(t) for alle t og finn **minimum**, eller finn løsning iterativt.
- Kriterie-funksjonen har lokale minima ved endene av gråtoneskalaen.
- En uheldig start-verdi i et iterativt søk kan gi meningsløs terskelverdi.
- Bruk Otsu’s terskelverdi som start-verdi i et iterativt søk.

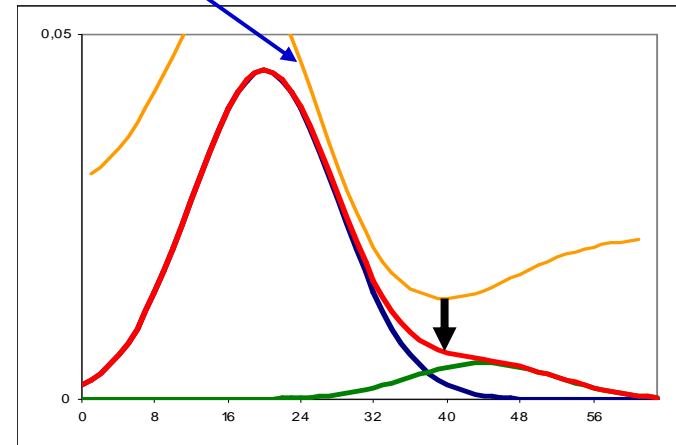
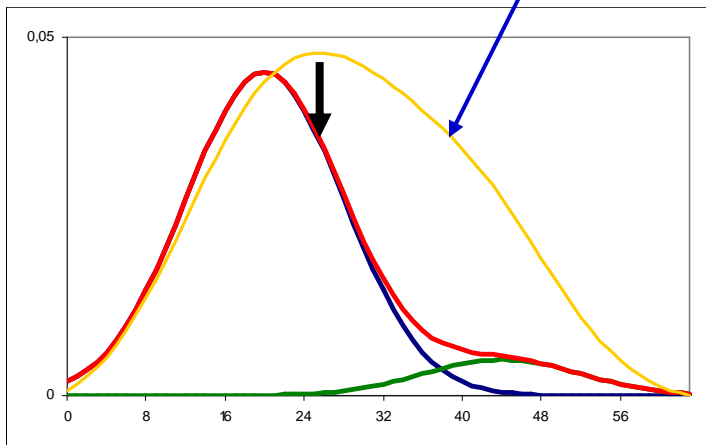
En sammenligning

- For $P_B = 0.9$, $P_F = 0.1$, $\mu_B = 20$, $\mu_F = 44$, $\sigma_F = \sigma_B = 8$:
- Otsu's terskel (venstre) gir signifikant feiltersking.
- Kittler og Illingworth's terskel (høyre) er OK.

Kriteriefunksjoner: $\sigma_B^2(t)$

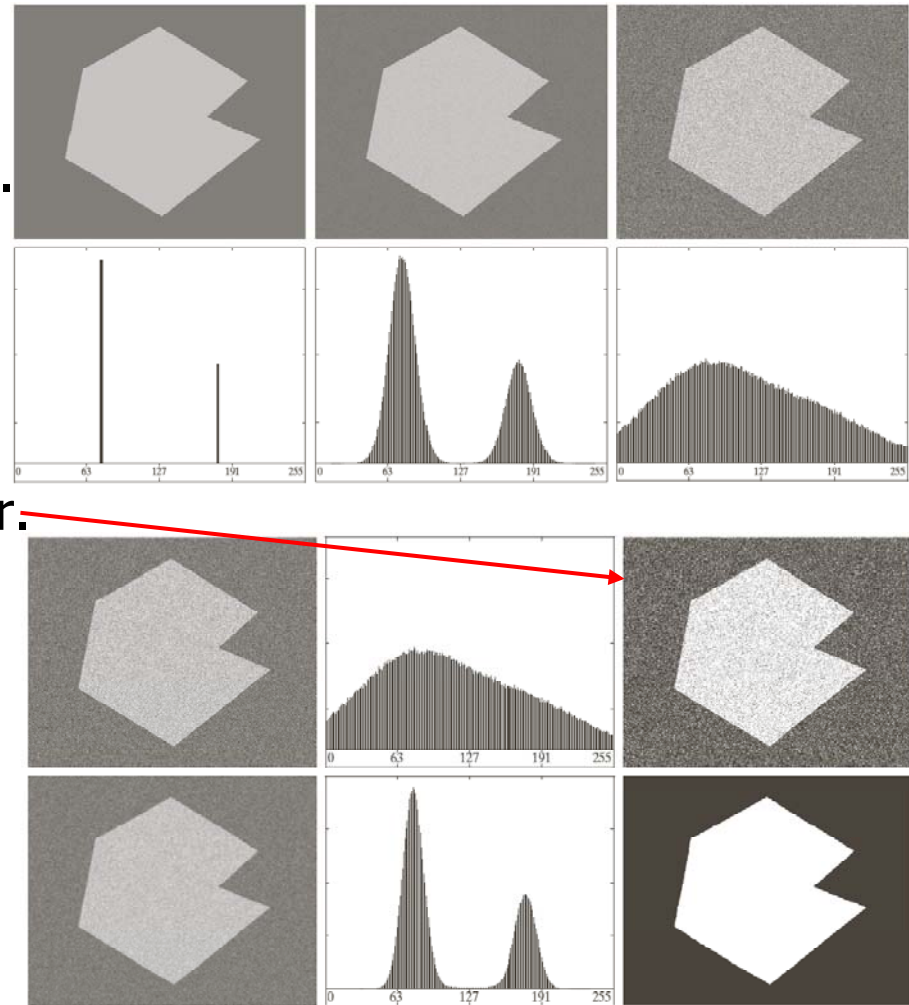
og

$J(t)$



Effekten av støy i bildet

- Gitt to-nivå gråtonebilde
 - $G=256$.
 - A priori sannsynligheter ≈ 0.5 .
- Støy
 - => Mister bimodalitet.
- Global terskling
 - => Mange feilklassifiserte piksler.
- Støyfjerning + terskling:
 - + Bimodalt histogram
 - => bedre terskling
 - Blurring av bildet
 - => feil langs objekt-kanten.

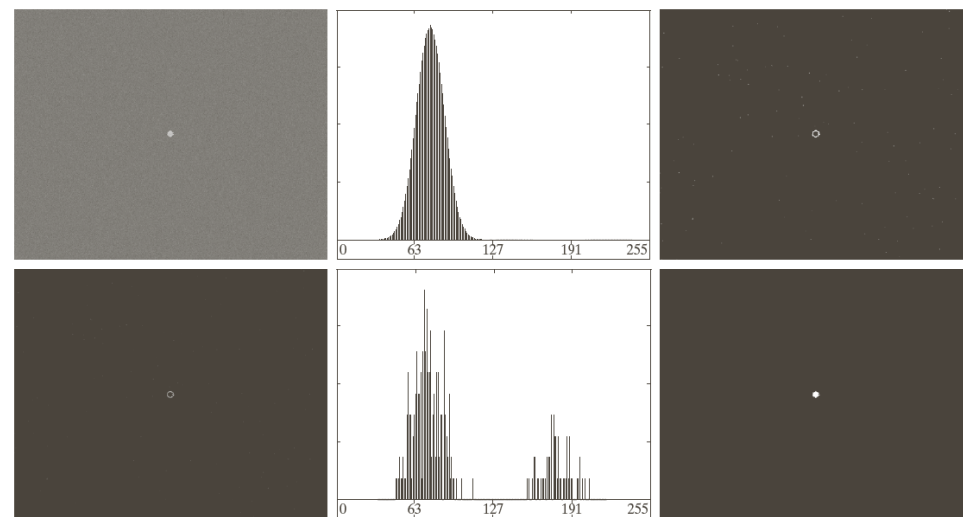


Bruk av kant-informasjon

- Hvordan kan vi unngå problemene som følger av at objekt og bakgrunn har ulik *a priori* sannsynlighet?
 - Bruk bare piksler som ligger på eller nær overgangen mellom objekt og bakgrunn.
 - Forholdet mellom *a priori* sannsynligheter blir da ≈ 1 .
- Hvordan gjør vi det?
 - Bruk en gradient-estimator, og terskle resultatet.
 - Bruk en Laplace-operator (nullgjennomgang), og utvid resultatet.
- Dette er egentlig en sirkelslutning:
 - For å forbedre tersklingen av objektet trenger vi objektets omriss.
 - For å avgrense omrisset trenger vi en terskling.

Eksempel I

- Gitt et bilde $f(x,y)$ der objekt-arealet er relativt lite.
- Beregn et kantbilde
 - Enten gradient-magnitude eller absoluttverdi av Laplace.
- Terskle kantbildet med en høy terskel.
 - > "maske-bilde" $G_T(x,y)$
- Finn histogram av $f(x,y) \cdot G_T(x,y)$
- Finn optimal terskel med f.eks. Otsu.
- Anvend på $f(x,y)$.
- Nær perfekt resultat.



a b c
d e f

FIGURE 10.42 (a) Noisy image from Fig. 10.41(a) and (b) its histogram. (c) Gradient magnitude image thresholded at the 99.7 percentile. (d) Image formed as the product of (a) and (c). (e) Histogram of the nonzero pixels in the image in (d). (f) Result of segmenting image (a) with the Otsu threshold based on the histogram in (e). The threshold was 134, which is approximately midway between the peaks in this histogram.

Eksempel II

- Vi ønsker å finne de lyse strukturene i $f(x,y)$.
- Vanskelig histogram:
 - Otsu -> "feil" terskelverdi
- Beregn $\text{abs}(\text{Laplace})$
- Terskle (høy percentil)
 - > "maske-bilde" $G_T(x,y)$
- Finn histogram av $f(x,y) \cdot G_T(x,y)$.
- Finn optimal terskel med f.eks. Otsu.
- Anvend på $f(x,y)$.

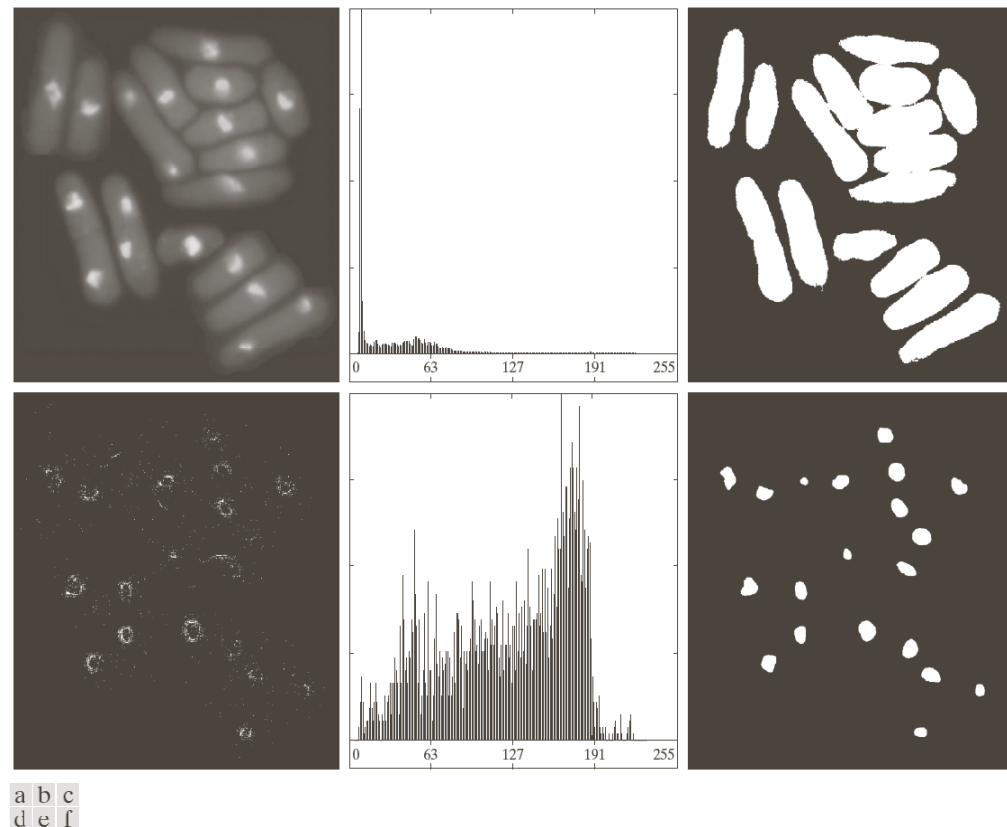
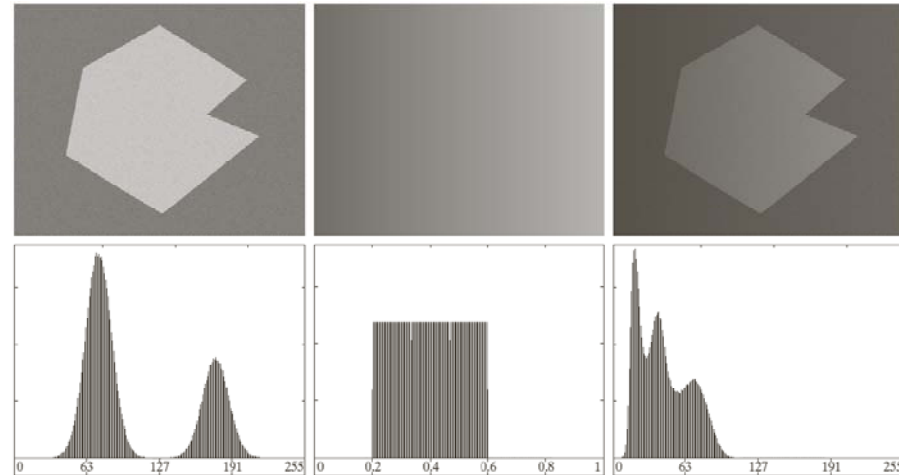


FIGURE 10.43 (a) Image of yeast cells. (b) Histogram of (a). (c) Segmentation of (a) with Otsu's method using the histogram in (b). (d) Thresholded absolute Laplacian. (e) Histogram of the nonzero pixels in the product of (a) and (d). (f) Original image thresholded using Otsu's method based on the histogram in (e). (Original image courtesy of Professor Susan L. Forsburg, University of Southern California.)

Variabel belysning

- I tillegg til støy kan vi ha ujevn belysning.
- Feilfri global terskling er da ikke mulig uten bruk av
 - Støyfjerning i bildet
 - Bruk av kant-informasjon
 - Dette virker ikke alltid.
- Fjern lave frekvenser i bildet.
- Variabel terskling.
 - Oppdeling av bildet
 - Lokalt adaptiv terskling
- Et helt annerledes alternativ:
 - Dividér bildet med bilde av homogen flate med samme belysning.



Generalisering til fler-nivå

- Ridler & Calvard's metode kan generaliseres til M terskler:

$$\begin{aligned} t_{1,k+1} &= \frac{\mu(0, t_{1,k}) + \mu(t_{1,k} + 1, t_{2,k})}{2} \\ &\vdots \\ t_{M,k+1} &= \frac{\mu(t_{M-1,k}, t_{M,k}) + \mu(t_{M,k} + 1, G - 1)}{2} \end{aligned}$$

- Nytt sett terskelverdier beregnes til alle terskler er stabile
 - dvs til alle differansene $|t_{n,k} - t_{n,k-1}|$, $1 \leq n \leq M$, er mindre enn ΔT .
- Prosedyren konvergerer vanligvis raskt.

Flernivå Otsu-terskling

- Vi kan skrive variansen mellom klassene $\sigma_B^2(t)$ som

$$\sigma_B^2 = \frac{\left[\sum_{i=0}^t ip(i)\right]^2}{\sum_{i=0}^t p(i)} + \frac{\left[\sum_{i=t+1}^{G-1} ip(i)\right]^2}{\sum_{i=t+1}^{G-1} p(i)} - \mu^2$$

- Deriverer og setter $\delta\sigma_B^2(t)/\delta t = 0$. Dette gir en løsning ved

$$\frac{\sum_{i=0}^T ip(i)}{\sum_{i=0}^T p(i)} + \frac{\sum_{i=T+1}^{G-1} ip(i)}{\sum_{i=T+1}^{G-1} p(i)} = 2T$$

- Dette kan skrives som $\mu_1(T) + \mu_2(T) = 2T$
- Vi ser altså en sammenheng mellom Ridler & Calvard og Otsu.
- Det samme gjelder for flernivå terskling (se forrige foil).

Global, variabel eller adaptiv?

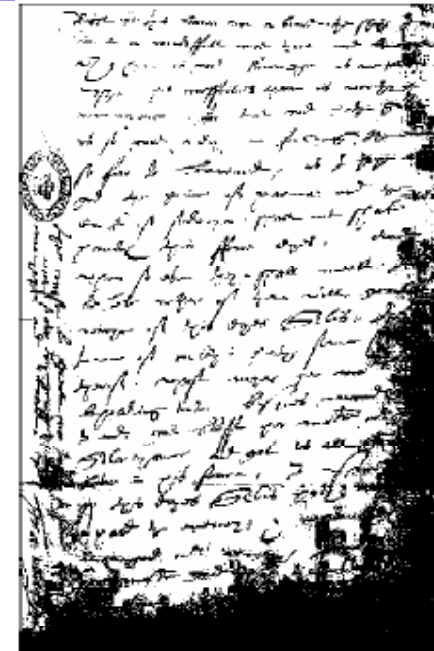
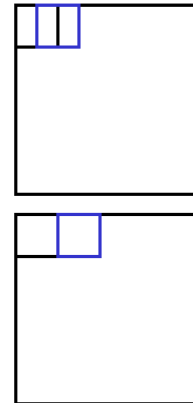
- Global terskling :
 - Samme verdi for T over hele bildet.
- Variabel terskling:
 - Verdien av T varierer over bildet.
- Lokalt adaptiv terskling:
 - T beregnes fra bildets lokale egenskaper (μ , σ , ...)

Adaptiv terskling ved interpolasjon

- Globale terskler gir ofte dårlig resultat.
- Globale metoder kan benyttes lokalt.
- Dette virker ikke der vinduet bare inneholder en klasse !
- Oppskrift:
 - **NIVÅ I:** Del opp bildet i del-bilder.
 - For del-bilder med bi-modalt histogram:
 - Finn lokal terskelverdi $T_c(i,j)$
og tilordne den til senterpikselet (i,j) i del-bildet.
 - For del-bilder med uni-modalt histogram:
 - Finn lokal terskelverdi ved interpolasjon.
 - **NIVÅ II:** Pikkse-for-pikkse interpolasjon:
 - Gå gjennom alle pikkse-posisjoner
 - bestem adaptiv terskelverdi $T(x,y)$
ved interpolasjon mellom de lokale terskelverdiene $T_c(i,j)$.
 - Terskle så hvert pikkse (x,y) i bildet i terskelverdiene $T(x,y)$.

Adaptiv terskling

- Lokale endringer i bakgrunn og kontrast kan håndteres.
 - kan skyldes ujevn belysning/bakgrunn.
- Man kan bruke
 - Overlappende vinduer
 - ikke-overlappende vinduer
- Størrelsen på vinduene kan være avgjørende ...



En enkel adaptiv metode ...

- En metode som benytter det dere lærte i forelesningen om gråtonetransformer:
- Beregn middelværdi og standardavvik innenfor et glidende ($w \times w$) vindu over hele bildet.

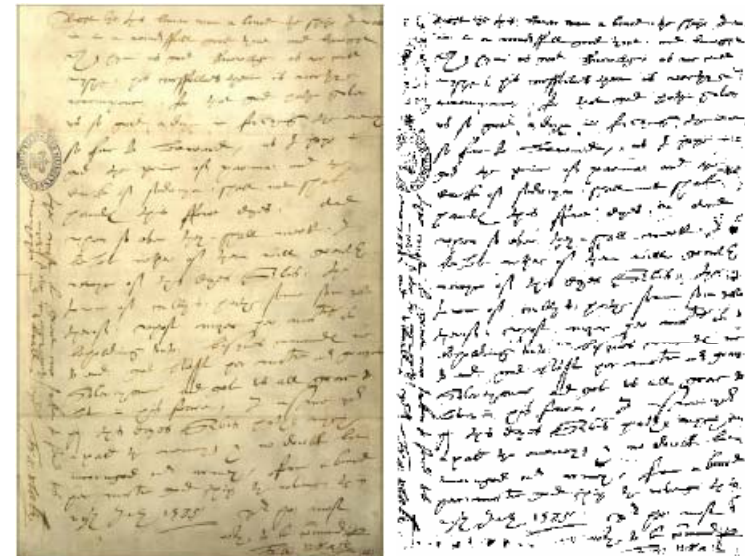
- **Niblack's metode:** Sett den lokale terskelverdien til

$$t(i, j) = \mu(i, j) + k \sigma(i, j)$$

- La ut-bildet være gitt ved

$$g(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } f(i, j) \leq t(i, j) \\ 1 & \text{hvis } f(i, j) > t(i, j) \end{cases}$$

- Ex.: for $w = 31$, $k = -0.8$:



Samforekomst-matriser

- Samforekomst-matriser er 2-D histogrammer.
 - Engelsk: "Gray Level Cooccurrence matrix" forkortet GLCM.
- De viser hvor mange forekomster vi har av at
 - et piksel har **gråtone i** samtidig som
 - en nabo i **avstand d** og **retning θ** har **gråtone j** .
- Vi kan skrive dette som **$h(i,j | d,\theta)$** .
 - For $(d,\theta) = (1,0)$ betrakter vi første nabo i horisontal retning
 - For $(d,\theta) = (1,\pi/2)$ betrakter vi første nabo i vertikal retning
- **Vi kan legge sammen slike matriser fra flere retninger:**
 $c(i,j|d) = 0.5*[h(i,j|d=1,\theta=0) + h(i,j|d=1,\theta=\pi/2)]$
gir en samforekomst-matrise i begge retninger (horisontal og vertikal).

GLCM-terskling

- Anta at vi har en samforekomst-matrise $c(i,j|d)$.
- Finn den terskelverdi i bildet som gir færrest mulig antall overganger fra 0 til 1 eller 1 til 0 horisontalt og vertikalt i resultat-bildet (etter terskling).

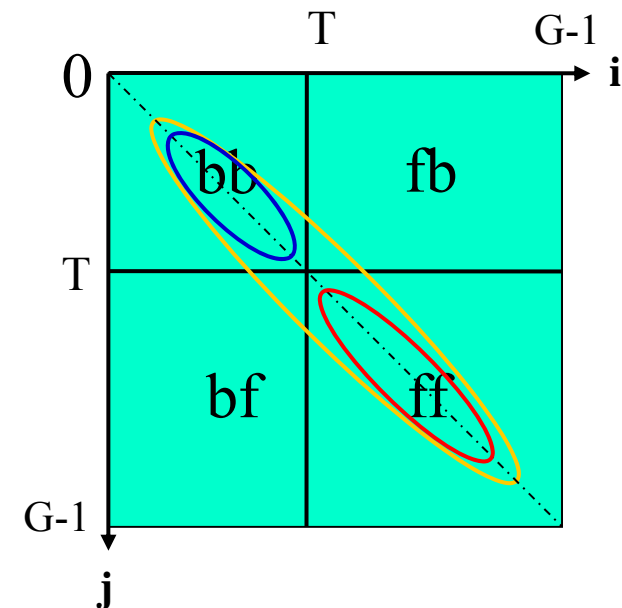
- Antall overganger fra 0 til 1

$$O_{bf}(T) = \sum_{i=T+1}^{G-1} \sum_{j=0}^T c(i, j | d)$$

- Antall overganger fra 1 til 0

$$O_{fb}(T) = \sum_{i=0}^T \sum_{j=T+1}^{G-1} c(i, j | d)$$

- **Minst kompleksitet: Finn den T som minimerer $O_{bf} + O_{fb}$**



Oppsummering terskling

- Gitt to vilkårlig fordelinger $f(z)$ og $b(z)$ vil den terskelverdien som minimerer feilen alltid ligge der

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0 \Rightarrow F \cdot f(T) = B \cdot b(T)$$

- Ridler og Calvard's metode er en enkel algoritme.
 - Hvilke betingelser må være oppfylt for at den skal virke?
- Otsu's metode maksimerer separasjon mellom to normalfordelte klasser.
- KI-metoden minimerer divergensen mellom observert histogram og en veiet blanding av to Gauss-funksjoner.
- Niblack's metode gir lokalt adaptiv terskel basert på middelveidi og standardavvik i løpende vindu.