INF2310 – Digital bildebehandling

FORELESNING 15

REPETISJON

Andreas Kleppe

Filtrering i bildedomenet
2D diskret Fourier-transform (2D DFT)
Kompresjon og koding
Morfologiske operasjoner på binære bilder

Filtrering i bildedomenet

- Anvendelsen av en **operator** som beregner ut-bildets verdi i hver piksel *(x,y)* ved bruk av inn-bildets piksler i et **naboskap** rundt *(x,y)*.

$$g(x,y) = T(f(x,y))$$

g(x,y) angir ut-bildets verdi i *(x,y)* og *f(x,y)* angir inn-bildets piksler i et naboskap rundt *(x,y)*

Ut-bilde | Operator | Inn-bilde

1	3	2	1
5	4	5	3
4	1	1	2
2	3	2	6

Et inn-bilde *f*

Filtrering

(3x3-middelverdifilteret, speilende indeksering og bevart bildestørrelse)

2,7	2,9	2,7	2,1
3,1	2,9	2,4	2,2
3,3	3,0	3,0	3,3
2,6	2,2	2,9	3,7

Ut-bildet *g*

Lavpassfiltre

- Slipper gjennom lave frekvenser og demper eller fjerner høye frekvenser.
  - Lav frekvenser = trege variasjoner, store trender.
  - Høye frekvenser = skarpe kanter, støy, detaljer.
  - … mye mer om frekvens i Fourier-forelesningene.
- Effekt: Glatting/utsmøring/«blurring» av bildet.
- Typiske mål: Fjerne støy, finne større objekter.
- Utfordring: Bevare kanter.

Middelverdifilter (lavpass)

- Beregner middelverdien i naboskapet.
  - Alle vektene er like.
  - Vektene summerer seg til 1.
    - Gjør at den lokale middelverdien bevares.
- Størrelsen på filteret avgjør graden av glatting.
  - Stort filter: mye glatting (utsmørt bilde).
  - Lite filter: lite glatting, men kanter bevares bedre.

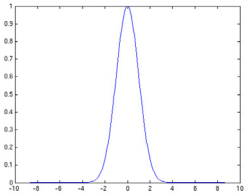
$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} \quad \frac{1}{25}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix} \quad \frac{1}{49}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

Gauss-filter (lavpass)

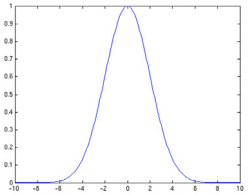
- For heltallsverdier av x og y, la:

$$h(x,y) = A\exp\left(-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}\right)$$

  - A settes slik at summen av vektene blir 1.
  - $N(0,\sigma^2 I_2)$ med alternativ skalering A.
- **Ikke-uniformt lavpassfilter**.
- Parameteren σ er standardavviket og avgjør graden av glatting.
  - Lite σ => lite glatting.
  - Stort σ => mye glatting.
- Filterstørrelsen $n \times n$ må tilpasses σ.
  - Et Gauss-filter glatter *mindre* enn et middelverdifilter av samme størrelse.



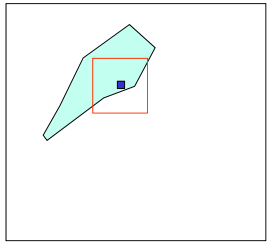
$\sigma = 1$



$\sigma = 2$

Kant-bevarende støyfiltrering

- Ofte lavpassfiltrerer vi for å **fjerne støy**, men ønsker samtidig å **bevare kanter**.
- Det finnes et utall av «kantbevarende» filtre.
- Men det er et system:
  - Tenker at vi har flere piksel-populasjoner i naboskapet rundt (x,y), f.eks. to: →
  - Sub-optimalt å bruke alle pikslene.



- Vi kan sortere pikslene:
  - Radiometrisk (etter pikselverdi)
  - Både geometrisk (etter pikselposisjon) og radiometrisk

Median-filter (lavpass)

- $g(x,y)$ = median pikselverdi i naboskapet rundt (x,y).
- Median = den midterste verdien i den sorterte listen.
  - Så et medianfilter er et rangfilter der vi velger midterste posisjon i den sorterte 1D-listen.
- Et av de mest brukte kant-bevarende støyfiltrene.
- Spesielt god mot impuls-støy («salt-og-pepper-støy»).
- Ikke uvanlig med ikke-rektangulære naboskap, f.eks. +
- Problemer:
  - Tynne linjer kan forsvinne.
  - Hjørner kan rundes av.
  - Objekter kan bli litt mindre.
- Valg av størrelse og form på naboskapet er viktig!

Middelverdi eller median?

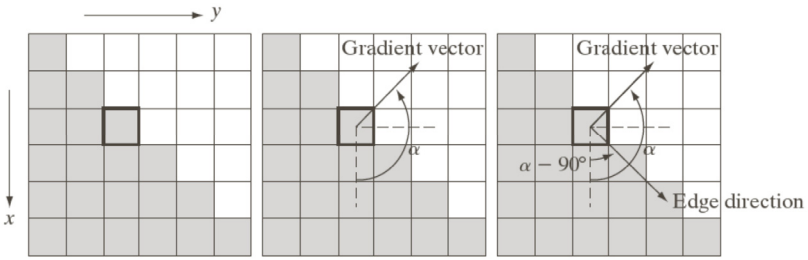
Inn-bilde med tydelig salt-og-pepper-støy | Etter middelverdifiltrering | Etter medianfiltrering

Høypassfiltre

- Slipper gjennom høye frekvenser, og demper eller fjerner lave frekvenser.
  - Typisk fjernes den aller laveste frekvensen helt, dvs. at homogene områder får ut-verdi 0.
- Effekt:
  - Demper langsomme variasjoner, f.eks. bakgrunn.
  - Fremhever skarpe kanter, linjer og detaljer.
- Typiske mål: «Forbedre» skarpheten, detektere kanter.
- **Q**: Hva skjer med støy?

Gradient ⊥ Kant

- **Gradienten** peker i retningen der funksjonen **øker mest** og **kanten** går **vinkelrett på gradienten**.



a b c

FIGURE 10.12 Using the gradient to determine edge strength and direction at a point. Note that the edge is perpendicular to the direction of the gradient vector at the point where the gradient is computed. Each square in the figure represents one pixel.

Gradient-operatorer

- Prewitt-operatoren:

$$h_x(i,j) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad h_y(i,j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Sobel-operatoren:

$$h_x(i,j) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad h_y(i,j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Frei-Chen-operatoren:

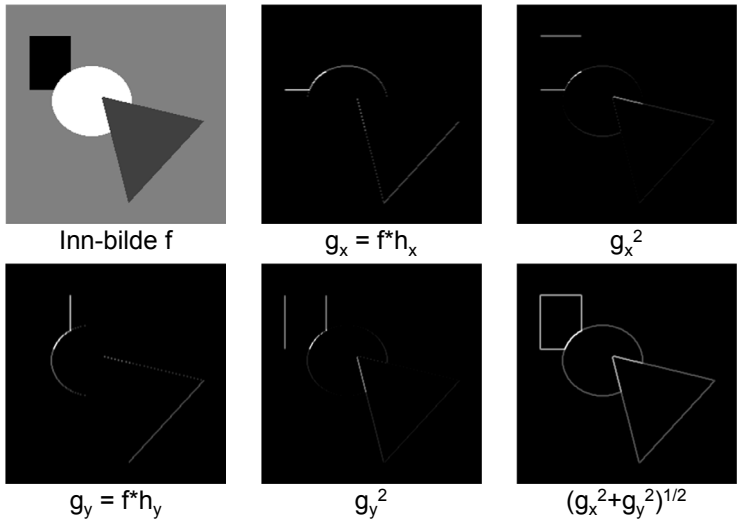
$$h_x(i,j) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \qquad h_y(i,j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

PS: Vi angir konvolusjonsfiltre i den tanke at de skal brukes til konvolusjon.

G&W angir filtermasker som skal brukes til korrelasjon.

Filtrene vil derfor avvike med en 180 graders rotasjon.

Eksempel: Gradient-beregning med Sobel-operatoren



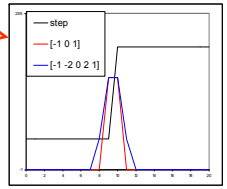
Inn-bilde f | $g_x = f*h_x$ | g_x^2

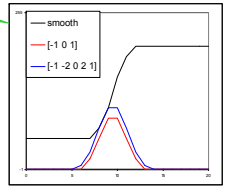
$g_y = f*h_y$ | g_y^2 | $(g_x^2+g_y^2)^{1/2}$

Merk: Hvert bilde er skalert ved å dele på sitt maksimum. De negative verdiene i g_x og g_y er satt til 0.

Gradient til kant-deteksjon

- Gradient-magnituden har «bred respons», men vi ønsker eksakt, tynn kant.
- For en steg-kant:
  - Merk: Bredden på responsen er avhengig av størrelsen på filteret.
- For en bred kant (glattet med [1 2 3 2 1]/9):
  - Merk: Bredden på responsen er avhengig av bredden på kanten.
- **Maksimumet er likt og fornuftig lokalisert!**
  - Bruke den andrederiverte til å finne maksimumene?





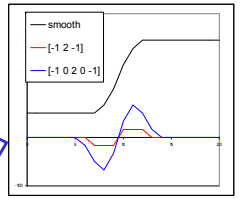
PS: Filtrene til venstre er brukt til korrelasjon.

Laplace-operatoren

- Laplace-operatoren er gitt ved:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

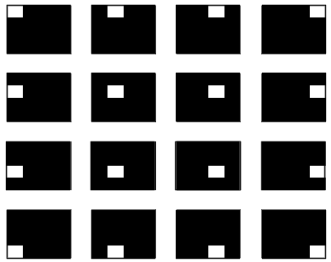
  - Den endrer fortegn der f et vendepunkt.
  - $\nabla^2 f = 0$ markerer kant-posisjon.
  - $|\nabla^2 f|$ har to ekstremverdier per kant; på starten og på slutten av kanten.
    - Derfor brukte vi den tidligere til å forbedre bildeskarpheten!



- Kantens eksakte posisjon er **nullgjennomgangen**.
- Dette gir tynne kanter.
- Vi finner bare kant-posisjoner, ikke kant-retninger.

Standardbasis for matriser

Eksempel: Standardbasis for 4x4



- Et gråtonebilde representeres vanligvis som en matrise av gråtoneintensiteter.
- Dette tilsvarer å bruke den såkalte *standardbasisen* for matriser.
- Eksempel: 4x4-gråtonebilder
  - Standardbasisen er de 16 4x4-matrisene vist til venstre.
  - En vektet sum av disse matrisene kan unikt representere enhver 4x4-matrise/gråtonebilde.

Undereksempel:

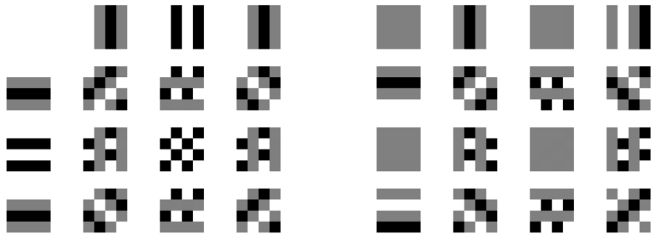
1	3	2	1
5	4	5	3
4	1	1	2
2	3	2	6

$= 1*$  $+ 3*$  $+\ldots+ 6*$ 

I bildene er sort 0 og hvitt 1.

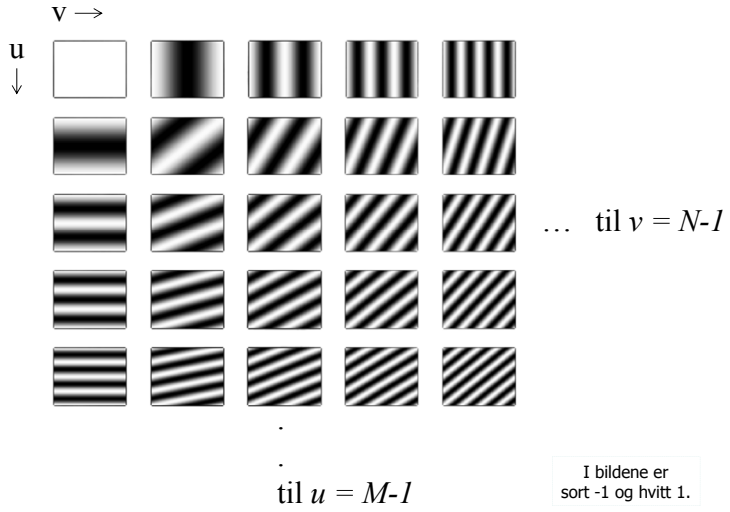
Alternativ basis

- Det finnes mange andre basiser for matriser.
  - Muligheten til å **unikt** representere **enhver** matrise ligger i *basis*.
- **2D DFT** bruker én slik basis som er basert på **sinuser og cosinuser med forskjellige frekvenser**.
  - Disse sinusene og cosinusene er faste for en gitt bildestørrelse (MxN) og kan representeres som hver sin mengde av MN MxN-bilder;



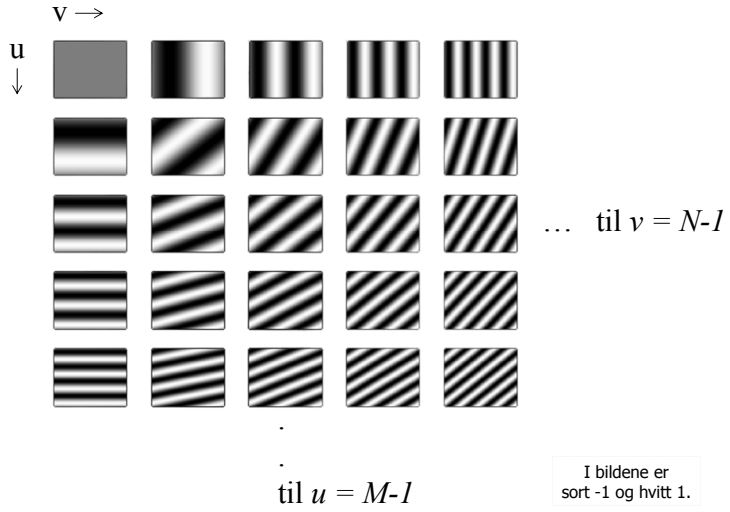
(i bildene er sort -1, grått er 0 og hvitt er 1)

Cosinus-bilder for større bilder



I bildene er sort -1 og hvitt 1.

Sinus-bilder for større bilder

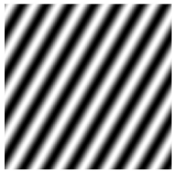


I bildene er sort -1 og hvitt 1.

Beregning av 2D DFT for en gitt frekvens

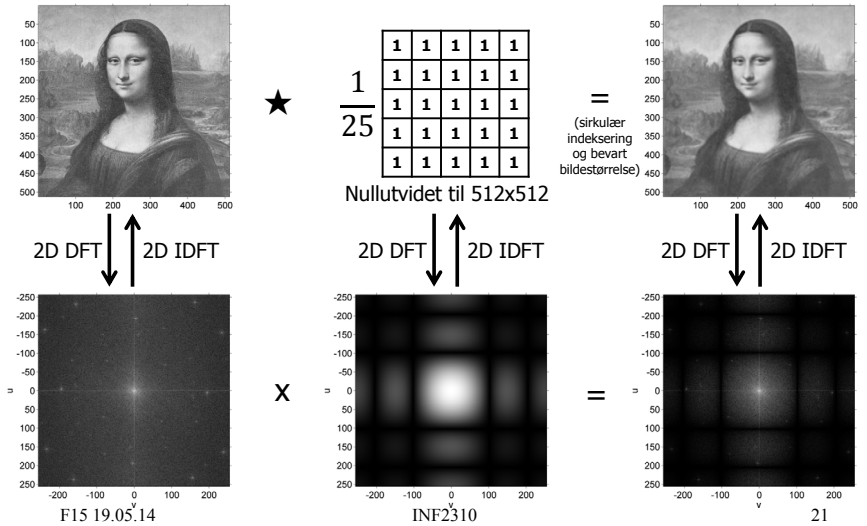
- Koeffisienten til 2D DFT av tidligere eksempelbilde for frekvens (0,1):
- real(F(0,1)) = sum(| 1 | 3 | 2 | 1 |
 | 5 | 4 | 5 | 3 |
 | 4 | 1 | 1 | 2 |
 | 2 | 3 | 2 | 6 | x | 1 | 0 | -1 | 0 |
 | 1 | 0 | -1 | 0 |
 | 1 | 0 | -1 | 0 |
 | 1 | 0 | -1 | 0 |) = 2
- imag(F(0,1)) = sum(| 1 | 3 | 2 | 1 |
 | 5 | 4 | 5 | 3 |
 | 4 | 1 | 1 | 2 |
 | 2 | 3 | 2 | 6 | x | 0 | -1 | 0 | 1 |
 | 0 | -1 | 0 | 1 |
 | 0 | -1 | 0 | 1 |
 | 0 | -1 | 0 | 1 |) = 1
- Altså er *F(0,1) = 2+j*.

Grunnleggende om 2D DFT

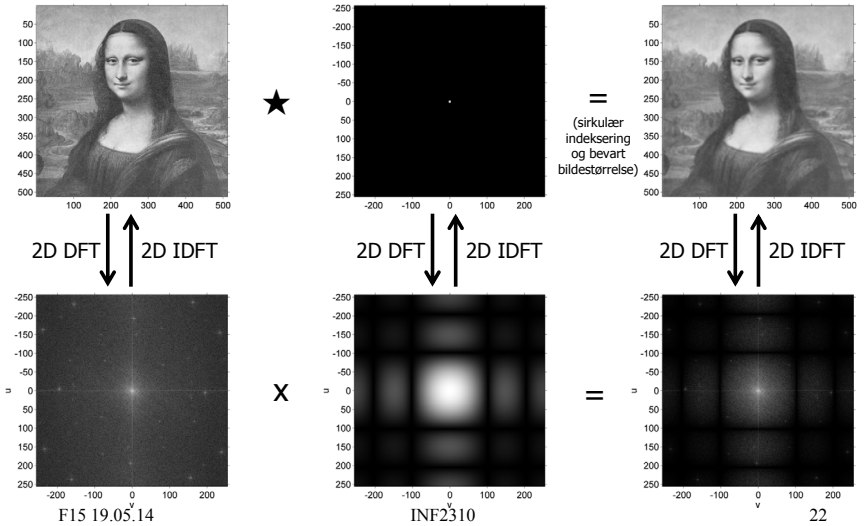
- real(F(u,v)) = sum( x )

  realdelen til 2D DFT-en i frekvens (u,v) = sum(bildet punkt-multiplisert cosinus-bildet for frekvens (u,v))
- Tilsvarende for imaginærdelen og sinus-bildet.
- **Hvert punkt** i 2D DFT-en beskriver altså noe ved **hele bildet**.

Eksempel: 5x5-middelverdifiltrering og konvolusjonsteoremet



Eksempel: 5x5-middelverdifiltrering og konvolusjonsteoremet

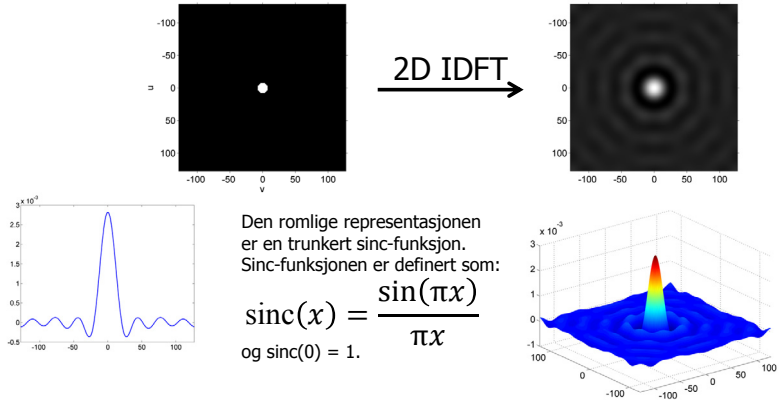


Anvendelse av konvolusjonsteoremet

- Design av konvolusjonsfiltre med bestemte frekvensegenskaper.
  - Designe konvolusjonsfilteret i Fourier-domenet slik at vi har bedre kontroll på dets frekvensegenskaper.
- Analyse av konvolusjonsfiltre.
  - 2D DFT-en til et konvolusjonsfilter gir oss innblikk i hvordan filteret vil påvirke de forskjellig frekvenskomponentene.
- Rask implementasjon av større konvolusjonsfiltre.

Filter-design i Fourier-domenet

Romlig representasjon av ideelt lavpassfilter



Den romlige representasjonen er en trunkert sinc-funksjon.
Sinc-funksjonen er definert som:

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

og sinc(0) = 1.

- Vi får *ringing* i bildet.
  - Husk også tommelfingerregel fra forrige forelesning: Smal/bred struktur i bildet ⇔ Bred/smal struktur i Fourier-spekteret

Eksempel: Ideelt lavpassfilter

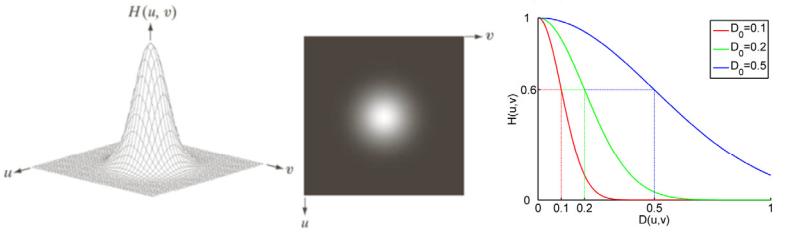
Original

Filtrert med D_0 = 0,2

Filtrert med D_0 = 0,3

I god nok oppløsning kan striper/ringinger sees ut fra markante kanter i de to filtrerte bildene. Det er dette vi kaller *ringing*.

Gaussisk lavpassfilter

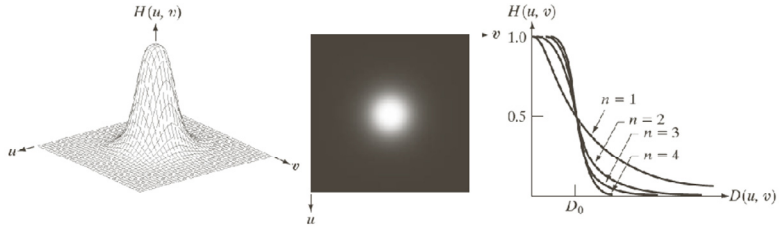


a b c

FIGURE 4.47 (a) Perspective plot of a GLPF transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections for various values of D_0.

Husk tommelfingerregelen:
Smal/bred struktur i bildet ⇔ Bred/smal struktur i Fourier-spekteret

Butterworth lavpassfilter

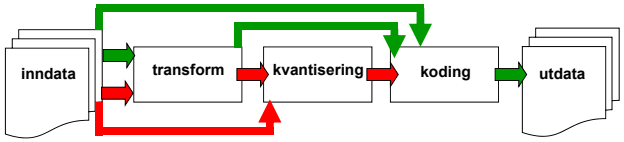


a b c

FIGURE 4.44 (a) Perspective plot of a Butterworth lowpass-filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.

Kompresjon

- Kompresjon kan deles inn i tre steg:
  - **Transform** - representer bildet mer kompakt.
  - **Kvantisering** - avrund representasjonen.
  - **Koding** - produser og bruk en kodebok.



- Kompresjon kan gjøres:
  - **Eksakt / tapsfri** (eng.: *lossless*) – følg de grønne pilene.
    - Kan da eksakt rekonstruere det originale bildet.
  - **Ikke-tapsfri** (eng.: *lossy*) – følg de røde pilene.
    - Kan da (generelt) ikke eksakt rekonstruere bildet.
    - Resultatet kan likevel være «godt nok».
  - Det finnes en mengde ulike metoder innenfor begge kategorier.

Ulike typer redundans

- Psykovisuell redundans. → Mer generelt: **Irrelevant informasjon**: Unødvendig informasjon for anvendelsen, f.eks. for visuell betraktning av hele bildet.
  - Det finnes informasjon vi ikke kan se.
    - Eksempler på enkle muligheter for å redusere redundansen: Subsample eller redusere antall biter per piksel.
- Interbilde-redundans.
  - Likhet mellom nabobilder i en tidssekvens.
    - Eks.: Lagre noen bilder i tidssekvensen og ellers bare differanser.
- Intersampel-redundans.
  - Likhet mellom nabopiksler.
    - Eks.: Hver linje i bildet kan løpelengde-transformeres.
- Kodings-redundans.
  - Enkeltsymboler (enkeltpiksler) blir ikke lagret optimalt.
  - Gitt som gjennomsnittlig kodelengde minus et teoretisk minimum.
    - Velg en metode som er «grei» å bruke og gir liten kodingsredundans.

Entropi

- Gjennomsnittlig informasjonsinnhold i sekvensen, også kalt gjennomsnittlig informasjon per symbol, er da:

$$H = \sum_{i=0}^{G-1} p_i I(s_i) = -\sum_{i=0}^{G-1} p_i \log_2 p_i$$

Hvis $p(s_i)=0$ lar vi det tilhørende entropibidraget, $0\log_2 0$, være 0.

- H er entropien til sekvensen av symbolene.
- **Entropien setter en nedre grense for hvor kompakt sekvensen kan representeres.**
  - Gjelder bare hvis vi koder hvert symbol for seg.

Eksempel: Huffman-koding

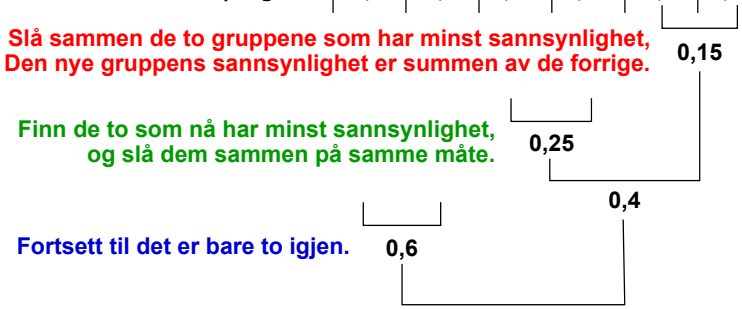
- La oss finne Huffman-koden til modellen som består av følgende seks begivenheter med sannsynligheter:

Begivenhet	A	B	C	D	E	F
Sannsynlighet	0,3	0,3	0,13	0,12	0,1	0,05

Slå sammen de to gruppene som har minst sannsynlighet, Den nye gruppens sannsynlighet er summen av de forrige.

Finn de to som nå har minst sannsynlighet, og slå dem sammen på samme måte.

Fortsett til det er bare to igjen.

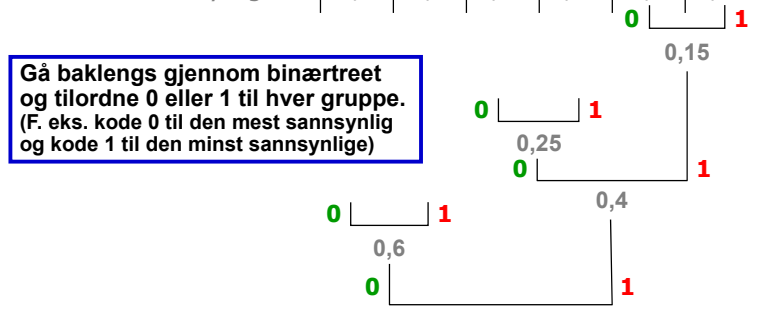


Eksempel: Huffman-koding

- La oss finne Huffman-koden til modellen som består av følgende seks begivenheter med sannsynligheter:

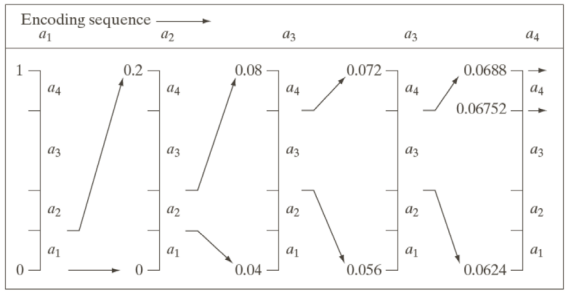
Begivenhet	A	B	C	D	E	F
Sannsynlighet	0,3	0,3	0,13	0,12	0,1	0,05

Gå baklengs gjennom binærtreet og tilordne 0 eller 1 til hver gruppe. (F. eks. kode 0 til den mest sannsynlig og kode 1 til den minst sannsynlige)



Eksempel: Aritmetisk koding

- Sannsynlighetsmodell: $P(a_1)=P(a_2)=P(a_4)=0{,}2$ og $P(a_3)=0{,}4$
- Melding/symbolsekvens: $a_1a_2a_3a_3a_4$



- a_1 ligger i intervallet [0, 0,2)
- a_1a_2 ligger i intervallet [0,04, 0,08)
- $a_1a_2a_3$ ligger i intervallet [0,056, 0,072)
- $a_1a_2a_3a_3$ ligger i intervallet [0,0624, 0,0688)
- $a_1a_2a_3a_3a_4$ ligger i intervallet [0,06752, 0,0688)

Representasjon av intervall

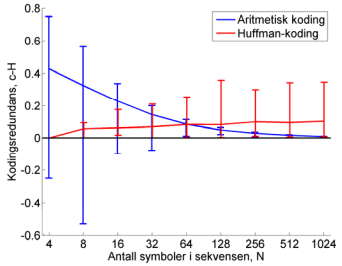
- Eksempel: Intervallet er [0,5232, 0,53184).
  - Finner første forskjellig bit i binærrepresentasjonen:
    - Skriver **$0{,}5232_{10}$** på binærform:

      $2*0{,}5232 = 1{,}0464$ => $d_1 = \mathbf{1}$, rest = 0,0464
      $2*0{,}0464 = 0{,}0928$ => $d_2 = \mathbf{0}$, rest = 0,0928
      $2*0{,}0928 = 0{,}1856$ => $d_3 = \mathbf{0}$, rest = 0,1856
      $2*0{,}1856 = 0{,}3712$ => $d_4 = \mathbf{0}$, rest = 0,3712
      $2*0{,}3712 = 0{,}7424$ => $d_5 = \mathbf{0}$, rest = 0,7424
    - Skriver **$0{,}53184_{10}$** på binærform:

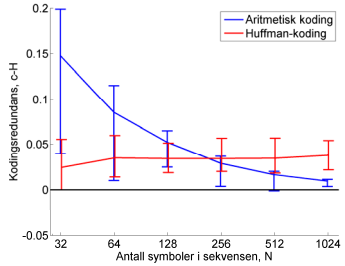
      $2*0{,}53184 = 1{,}06368$ => $d_1 = \mathbf{1}$, rest = 0,06368
      $2*0{,}06368 = 0{,}12736$ => $d_2 = \mathbf{0}$, rest = 0,12736
      $2*0{,}12736 = 0{,}25472$ => $d_3 = \mathbf{0}$, rest = 0,25472
      $2*0{,}25472 = 0{,}50944$ => $d_4 = \mathbf{0}$, rest = 0,50944
      $2*0{,}50944 = 1{,}01888$ => $d_5 = \mathbf{1}$, rest = 0,01888
  - Siden den siste resten til den øvre grensa er større enn 0 må **$0{,}10001_2 = 0{,}53125_{10}$** være et tall i intervallet.
  - $0{,}53125_{10}$ er det tallet i intervallet med kortest binær-representasjon.

Aritmetisk koding vs Huffman-koding

- Aritmetisk koding: Bedre kompresjon jo lenger symbolsekvensen er.
- Huffman-koding: Bedre kompresjon jo flere symboler i alfabetet.
- Aritmetisk koding komprimerer typisk litt bedre enn Huffman-koding, men er mer regnekrevende å utføre.
  - For vanlige bilder, dvs. med relativt få symboler i alfabetet og (potensielt sett) mange symboler i sekvensen.



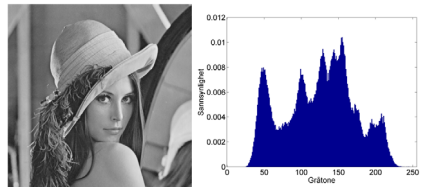
Med G=4 symboler i alfabetet.



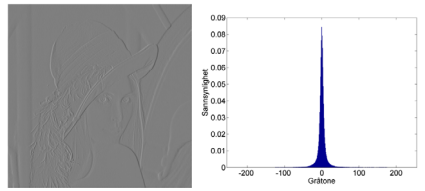
Med G=20 symboler i alfabetet.

Differansetransform

- Utnytter at horisontale nabopiksler ofte har ganske lik gråtone.
- Gitt en rad i bildet med gråtoner: $f_1, \ldots, f_N$ der $0 \le f_i \le 2^b-1$
- Transformer (reversibelt) til $g_1 = f_1,\ g_2 = f_2-f_1,\ \ldots,\ g_N = f_N-f_{N-1}$
- Merk at: $-(2^b-1) \le g_i \le 2^b-1$
  - Må bruke b+1 biter per g_i hvis vi skal tilordne like lange kodeord til alle mulig verdier.
- Ofte er de fleste differansene nær 0.
  - Naturlig binærkoding av differansene er ikke optimalt.



Entropi ≈ 7,45 => CR ≈ 1,1



Entropi ≈ 5,07 => CR ≈ 1,6

Løpelengde-transform

- Ofte inneholder bildet objekter med lignende gråtoner, f.eks. svarte bokstaver på hvit bakgrunn.
- Løpelengde-transformen (eng.: *run-length transform*) **utnytter når horisontale nabopiksler har samme gråtone**.
  - Merk: Krever ekte likhet, ikke bare omtrent like.
  - Løpelengde-transformen komprimerer bedre ettersom kompleksiteten i bildet blir mindre.
- Løpelengde-transformen er reversibel.
- Hvis pikselverdiene til en rad er:
  333333555555555544777777 (24 tall)
- Så starter løpelengde-transformen fra venstre og finner tallet 3 gjentatt 6 ganger etter hverandre, og returnerer derfor tallparet (3,6). **Formatet er: (tall, løpelengde)**
- For hele sekvensen vil løpelengdetransformen gi de 4 tallparene:
  (3,6), (5,10), (4,2), (7,6) (merk at dette bare er 8 tall)
- Kodingen avgjør hvor mange biter vi bruker for å lagre tallene.

Eksempel: LZW-transform

- Alfabetet: a, b og c med koder 0, 1 og 2, henholdsvis.
- Meldingen: ababcbababaaaaabab (18 symboler)
- LZW-sender: ny streng = sendt streng pluss neste usendte symbol
- LZW-mottaker: ny streng = nest siste streng pluss første symbol i sist tilsendte streng

Ser	Sender	Senders liste	Mottar	Tolker	Mottakers liste
		a=0, b=1, c=2			a=0, b=1, c=2
a	0	ab=3	0	a	
b	1	ba=4	1	b	ab=3
ab	3	abc=5	3	ab	ba=4
c	2	cb=6	2	c	abc=5
ba	4	bab=7	4	ba	cb=6
bab	7	baba=8	7		

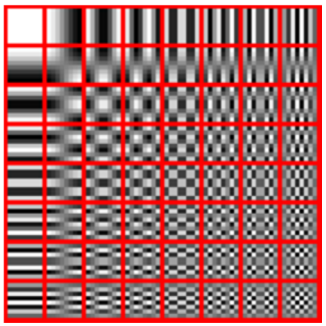
» Vi mottar kode 7, men denne koden finnes ikke i listen!
» Fra ny-streng-oppskriften vet vi at kode 7 ble laget ved: ba + ?
» Siden kode 7 nå sendes, må: ? = b => 7 = ba + b = bab

2D diskret cosinus-transform

- Grunnpilaren i ikke-tapsfri JPEG-kompresjon er 2D DCT:

$$F(u,v)=\frac{2}{\sqrt{MN}}c(u)c(v)\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\left[\frac{\pi u}{M}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]\cos\left[\frac{\pi v}{N}\left(y+\frac{1}{2}\right)\right],\qquad c(\xi)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{hvis } \xi=0\\ 1 & \text{ellers}\end{cases}$$

- Sterkt relatert til 2D DFT.
- I JPEG transformerer vi 8x8-blokker så vi bruker bare de 64 «8x8-cosinus-bildene»:
  - For hvert bilde vi går til høyre eller ned så økes den tilhørende frekvenskomponenten med 0,5.
  - Husk: I 2D DFT økte frekvenskomp. med 1, som lagde par med like cosinus-bilder.
  - Husk: I 2D DFT hadde vi også noen sinus-bilder.
  - 2D DCT-koeffisientene beregnes analogt med det vi gjorde for 2D DFT; summere punktproduktet mellom 8x8-blokken og hvert «cosinus-bilde».
  - 2D DCT beregnes hurtig ved å forhåndsberegnes de 64 «8x8-cosinus-bildene».



Rekonstruksjonsfeil i gråtonebilder

- JPEG-kompresjon kan gi **8×8-piksels blokk-artefakter**, **glatting** og **ringinger**.
- Avhengig av vektmatrisen
  - som bestemmer hvor mange koeffisienter som lagres, og hvor presist disse lagres.

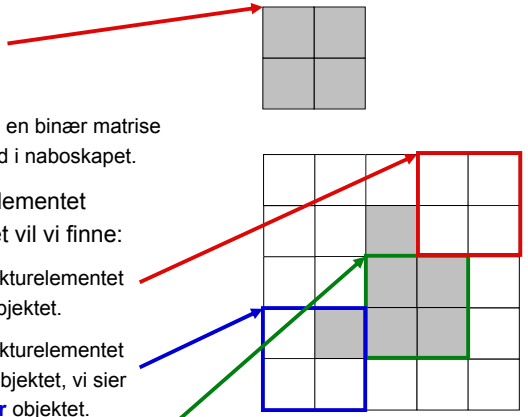
Blokk-artefakter

- Blokk-artefaktene øker med kompresjonsraten.

- Øverst: kompresjonsrate = 25
- Nederst: kompresjonsrate = 52

Morfologi: Tre sentrale begrep

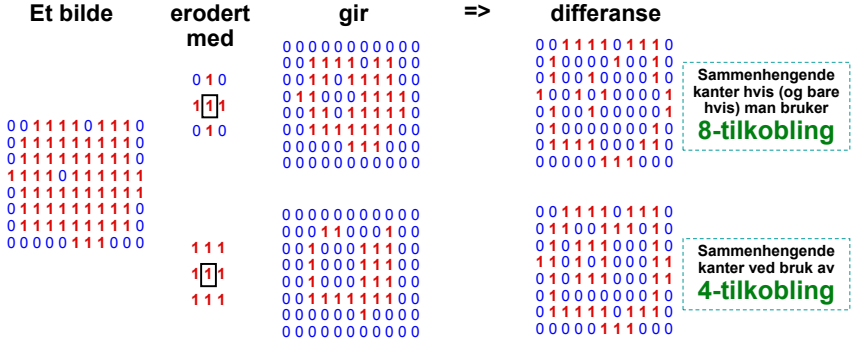
- Et **strukturelement** for et binært bilde er et **naboskap**.
  - Typisk definert ved en binær matrise der 1 markerer med i naboskapet.
- Når vi fører strukturelementet over det binære bildet vil vi finne:
  - Posisjoner der strukturelementet **ikke overlapper** objektet.
  - Posisjoner der strukturelementet delvis overlapper objektet, vi sier at elementet **treffer** objektet.
  - Posisjoner der strukturelementet ligger inni objektet, vi sier at elementet **passer** i objektet.



I figurene markerer grått med i mengden (forgrunnspiksel), og hvitt ikke med (bakgrunnspiksel).

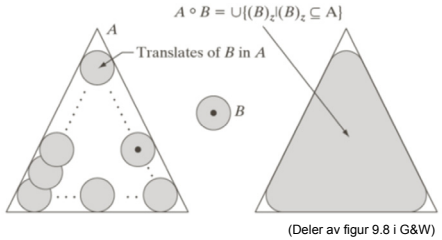
Anvendelse av erosjon: Kantdeteksjon

- Erodering fjerner piksler langs omrisset av et objekt.
- Vi kan finne kantene av objektene i bildet ved å subtrahere et erodert bilde fra originalbildet: **g = f - (f ⊖ S)**
- Det benyttede strukturelementet avgjør kantens tilkoblingstype:



Geometrisk tolkning av åpning

- Tenk at strukturelementet definerer **størrelsen og formen til spissen av en tusjpenn**.
- Det er bare tillatt å **fargelegge innenfor objekter**.
  - Et par detaljer: Man må holde tusjen vinkelrett på tegneflaten og med samme rotasjon som strukturelementet.
- **Åpningen er resultatet av å fargelegge så mye man har lov til**.
- For runde strukturelementer: Konvekse hjørner blir avrundet, konkave hjørner beholdes rette.
  - Akkurat som ved dilasjon (skyldes at enhver åpning avsluttes med en dilasjon).



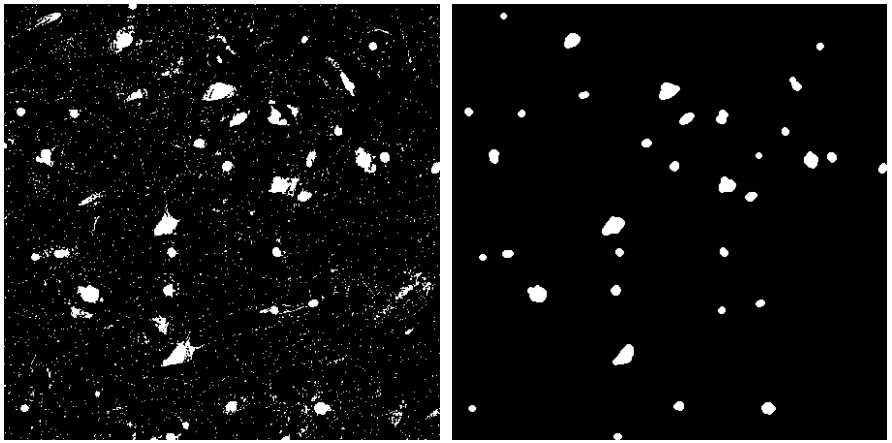
(Deler av figur 9.8 i G&W)

Åpning er **idempotent**:

$$(f \circ S) \circ S = f \circ S$$

dvs. at gjentatte anvendelser med samme strukturelement gir ingen endring.

Eksempel: Støyfjerning med åpning

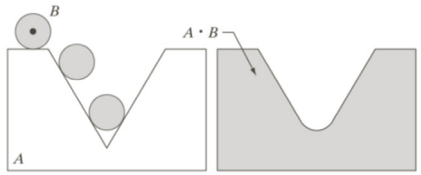


Åpning med et (7x7) sirkulært strukturelement

I bildene markerer hvit forgrunn og svart bakgrunn.
(Bildene er hentet fra
http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/)

Geometrisk tolkning av lukking

- Vi kan benytte **samme metafor** som for åpning:
  - Strukturelementet definerer størrelsen og formen til spissen av en tusjpenn.
  - Man holder tusjen vinkelrett på tegneflaten og fargelegger så mye man har lov til.
- **Denne gangen** er det bare tillatt å **fargelegge utenfor objekter**.
  - En detalj: Denne gangen skal tusjen holdes speilvendt (180° rotert) av strukturelementet.
- **Lukkingen er det som ikke fargelegges**.
  - Denne gangen fargelegger vi altså bakgrunnen, sist fargela vi forgrunnen.
- For runde strukturelementer:
  Konkave hjørner blir avrundet,
  konvekse hjørner beholdes rette.
  - Akkurat som ved erosjon (skyldes at enhver lukking avsluttes med en erosjon).

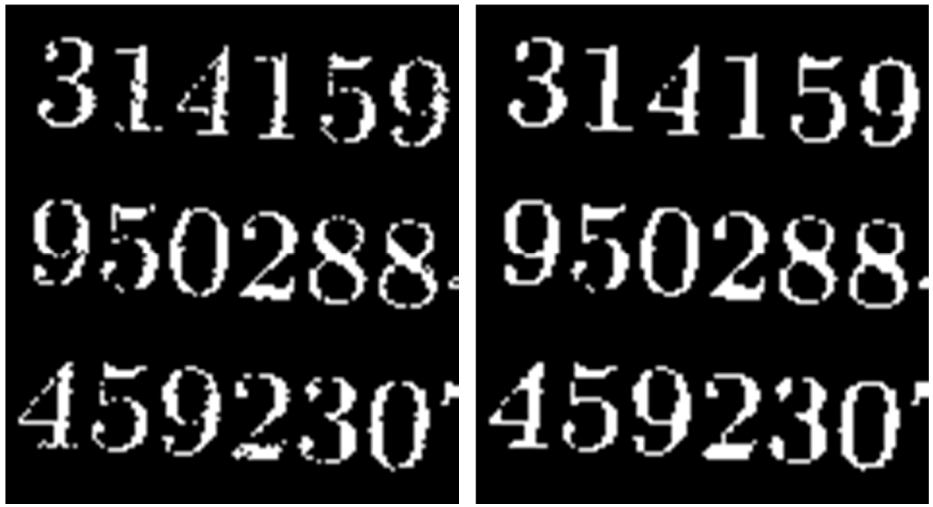


(Deler av figur 9.9 i G&W)

Også lukking er **idempotent**:

$$(f \bullet S) \bullet S = f \bullet S$$

Eksempel: Filtrering ved lukking



Lukking med et (3x3) kvadratisk strukturelement

Eksempel: «Hit-or-miss»