

INF 2310 – Digital bildebehandling



Forelesning II
Sampling og kvantisering

Fritz Albrechtsen

26.01.2015

INF2310

1

Temaer i dag

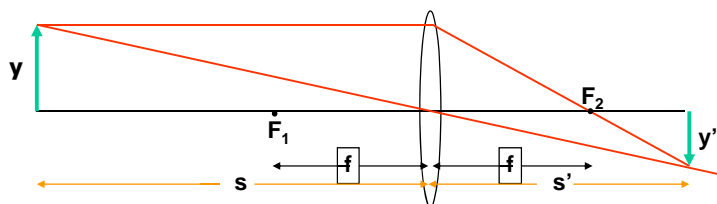
- Romlig oppløsning i bilder
 - Sampling av bilder
 - Kvantisering i bilder
 - Avstandsmål i bilder
-
- Pensum: Kap. 2.3 - 2.5 i DIP

26.01.2015

INF2310

2

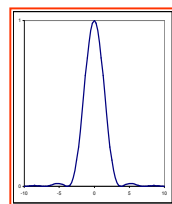
Optisk avbildning



En punktkilde
avbildes som
en skive med
mørke og lyse
ringer rundt
=>



(Punktspredningsfunksjon)
(PSF)



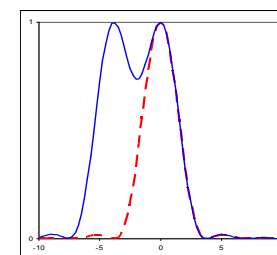
26.01.2015

INF2310

3

Mer om romlig oppløsning

- Romlig oppløsning angis ofte som hvor langt fra hverandre to punktkilder må være for at vi skal kunne skille dem.
- Romlig oppløsning angis som en vinkel, oftest gitt i radianer.



26.01.2015

INF2310

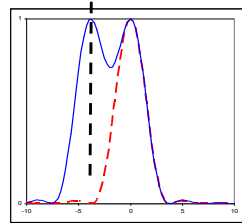
4

Rayleigh-kriteriet

- Anta at en "perfekt" linse har aperture-diameter D , og lysets bølgelengde er λ , begge gitt i samme enhet
- To punkter i et objekt kan akkurat adskilles i det kontinuerlige, analoge bildet hvis vinkelen mellom dem er gitt ved

$$\sin \theta = 1.22 \lambda / D \text{ radianer.}$$

– Dette er "Rayleigh-kriteriet".



26.01.2015

INF2310

5

Rayleigh-kriteriet, eksempel

$$y' = \frac{y f}{(s - f)}$$

$$\sin(\theta) \approx \tan(\theta) \approx \theta$$

$f=35\text{mm}$ og $D=10\text{mm}$ (Tilnærmet vanlig kamera)
 $s=5\text{m}$ (Avstanden til det som avbildes)
 $\lambda=500 \cdot 10^{-9}$ meter (Grønt lys)

$$\tan \theta \approx \sin \theta = 1.22 \lambda / D = 6.1 \cdot 10^{-5} \quad (\text{Rayleigh})$$

$$y = \tan \theta \cdot s \approx 3.05 \times 10^{-4} \text{m} \approx \mathbf{0.3\text{mm}} \quad (\text{I objektplanet})$$

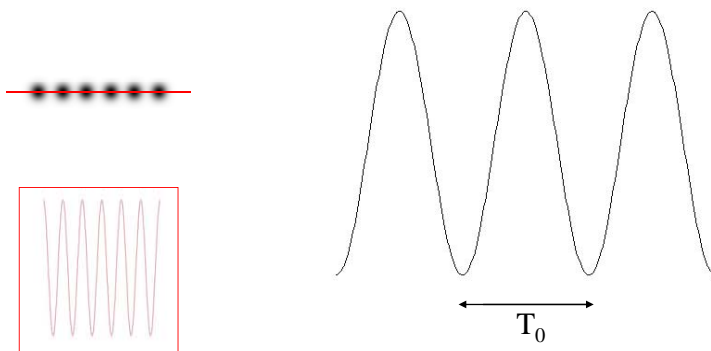
$$y' = 0.3\text{mm} \cdot 35 / (5000-35) \approx \mathbf{2.1\mu\text{m}} \quad (\text{I bildeplanet})$$

26.01.2015

INF2310

6

Romlig frekvens



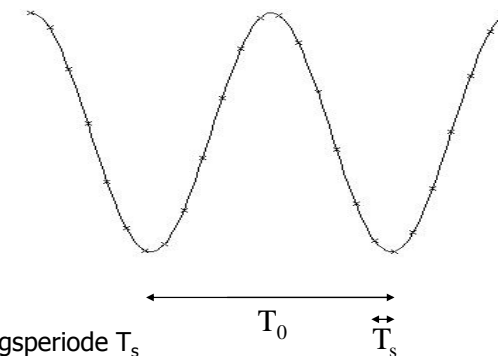
- Periode T_0 (f.eks. i mm eller μm)
- Frekvens $f_0 = 1/T_0$ (med benevning "per mm" eller "per μm ")

26.01.2015

INF2310

7

Sampling av kontinuerlige signaler



- Samplingsperiode T_s
- Signalets periode = T_0 ($\Rightarrow f_0 = 1/T_0$)
- Samplingsfrekvens $f_s = 1/T_s$ (også kalt samplingsrate)
- Hvor ofte må man sample for å kunne rekonstruere signalet?

26.01.2015

INF2310

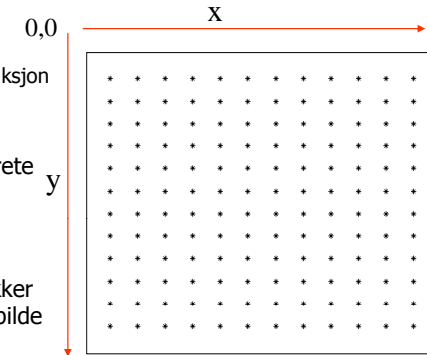
8

Samplingsteoremet (Shannon/Nyquist)

- Anta at det kontinuerlige bildet er båndbegrenset, dvs. det inneholder ikke høyere frekvenser enn f_{\max}
- Det kontinuerlige bildet kan rekonstrueres fra det digitale bildet dersom samplingsraten $f_s=1/T_s$ er større enn $2 f_{\max}$ (altså $T_s < 1/2T_0$)
- $2 f_{\max}$ kalles Nyquist-raten
- I praksis oversampler vi med en viss faktor for å kunne få god rekonstruksjon

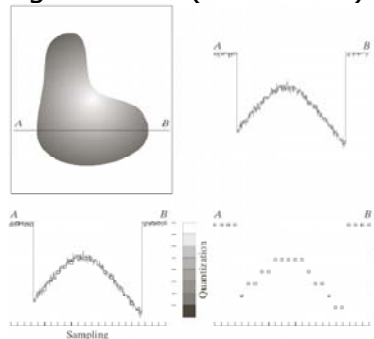
Sampling av bilder

- Naturen er kontinuerlig
 - Et bilde er en kontinuerlig funksjon av to kontinuerlige variable
- Et digitalt bilde består av diskrete bildeverdier på et endelig 2D punktnett
- Sampling: Prosessen som plukker ut punkter fra et kontinuerlig bilde til et 2D punktnett
- For en viss **romlig oppløsning**, hvor tett må punktene i rutenettet ligge? (Hvor mange piksler pr. arealenhet?)



1D-sampling og kvantisering

- Analogt: En kontinuerlig variabel – intensitet finnes for alle (kontinuerlige) posisjoner.
- Digitalt: Intensiteten samples for diskrete posisjoner, og skaleres og avrundes (kvantiseres)



2D sampling og kvantisering

- Et kontinuerlig bilde projiseres på et detektor-array.
- Detektor-tettheten bestemmes av Nyquist-kriteriet.
- Hver detektor måler intensitet som et arealgjennomsnitt.
- Antall gråtoner bestemmes av ordlengden (antall bits).

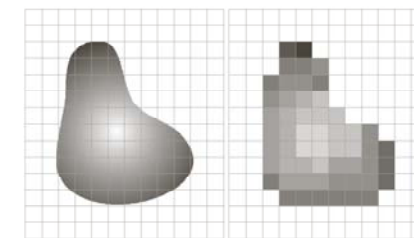
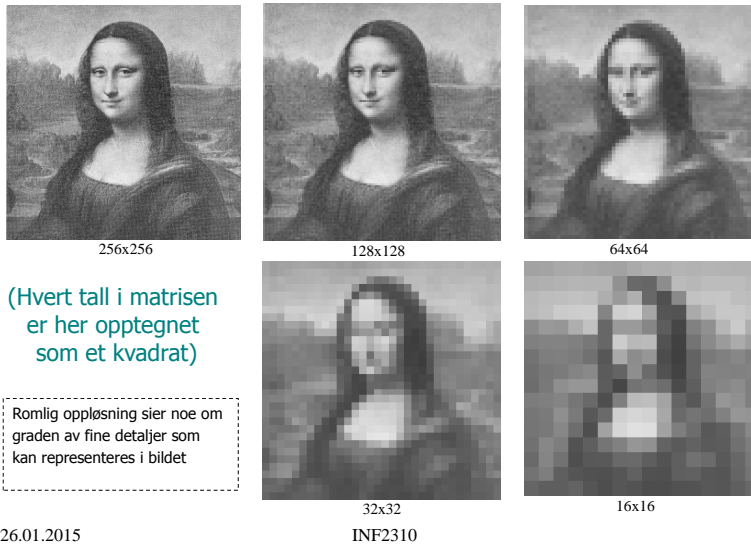
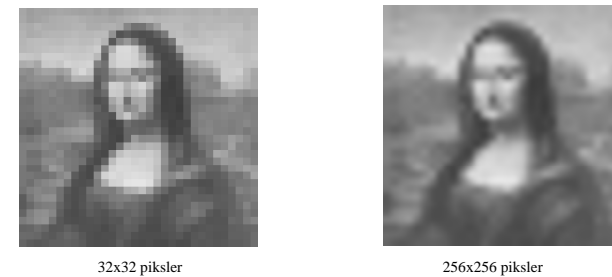


FIGURE 2.17 (a) Continuous image projected onto a sensor array. (b) Result of image sampling and quantization.

Romlig oppløsning, eksempler



Redusert romlig oppløsning



Forskjellig antall piksler, men lik romlig oppløsning.

26.01.2015

INF2310

14

Undersampling/aliasing

- Undersampling (sample med lavere samplingsrate enn Nyquist-kriteriet) medfører **aliasing**.
- Ved undersampling forvrenges frekvensinnholdet og det digitale bildet inneholder ikke de samme frekvenser som det kontinuerlige bildet.
- Sampling av en sinusoid med for lav samplingsrate gir en diskret sinusoid med lavere frekvens.
- Alias-frekvensen er altså lavere enn sann frekvens.

26.01.2015

INF2310

15

Under-sampling gir aliasing

- En sinusoid med periode $T=2s$.
- Samplet med uniform samplingsperiode $> 2s$.
- Gir en rekonstruert sinusoid med for lav frekvens.

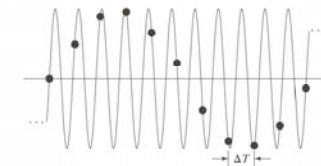


FIGURE 4.10 Illustration of aliasing. The under-sampled function (black dots) looks like a sine wave having a frequency much lower than the frequency of the continuous signal. The period of the sine wave is 2 s, so the zero crossings of the horizontal axis occur every second. ΔT is the separation between samples.

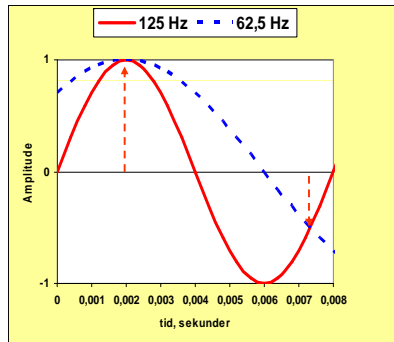
26.01.2015

INF2310

16

Undersampling og aliasing

- **Aliasing** betegner det fenomenet at en sinusoid ved for lav samplingsrate gir opphav til samme diskrete signal som en sinusoid med lavere frekvens.
- Vi sampler en $f = 125$ Hz sinus med $f_s = 1.5 f = 187.5$ Hz.
- Dette gir for eksempel sampler ved $t = 0.002$ og ved $t = 0.733$ (stiplede røde piler).
- Rekonstruksjon gir sinus med $f_a = 62.5$ Hz (stiplet kurve).
- Vi har fått en "aliasing".
- Merk at $f_a = f_s - f$ når $f < f_s < 2f$



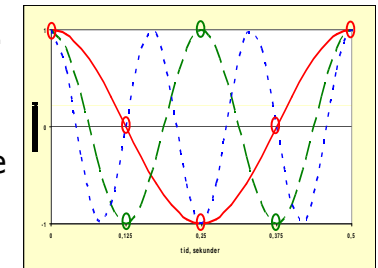
26.01.2015

INF2310

17

Frekvensfolding

- I figuren til høyre vises $\frac{1}{2}$ sek. av tre sinus-funksjoner med frekvenser 2, 4 og 6 Hz.
- Vi sampler alle tre funksjonene med en fast $f_s = 8$ Hz
- Vi får rekonstruert tre sinusoider med hhv. $f = 2, 4$ og 2 Hz.
- Frekvenser f som er under halvparten av f_s blir rekonstruert til korrekt frekvens
- f mellom $\frac{1}{2} f_s$ og f_s , blir rekonstruert til $f_a = f_s - f$



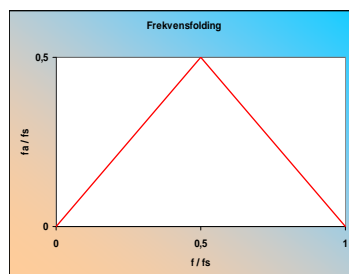
26.01.2015

INF2310

18

Frekvensfolding

- Aliasfrekvens er gitt ved $f_a = f_s - f$ når $f < f_s < 2f$
- frekvenser under halvparten av f_s blir korrekt rekonstruert.
- frekvenser mellom $\frac{1}{2} f_s$ og f_s , blir rekonstruert til $f_a = f_s - f$

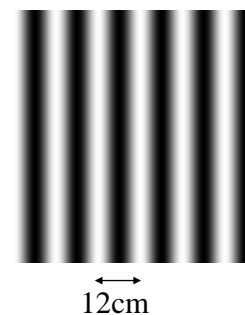


26.01.2015

INF2310

19

Oppgave



- Du tar bilde av et gjerde som består av hvite gjerdestolper som er 6 cm brede og mørke mellomrom som er 6 cm brede.
- Bildet dekker 30 m av gjerdet.
- Bildet er 256 piksler bredt.
- Hvor lang er perioden i scenen?
- Hvor mange perioder dekker bildet?
- Hva er samplingsperioden?
- Hva blir perioden i det digitale bildet?
- Hvor mange piksler burde vi hatt?

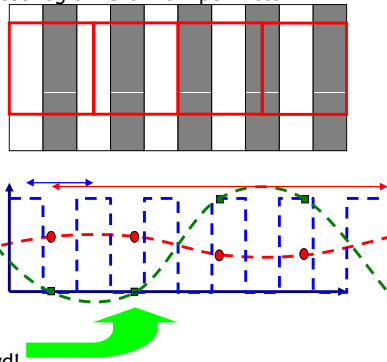
26.01.2015

INF2310

20

Et undersamplet Nyquist-stakitt ...

- Ta et analogt bilde av et stakitt med 5 sprosser og 5 mellomrom per meter.
 - Vi har en periodisk struktur
 - $f = 5$ svingninger per meter
 - Periode $T = 20$ cm
- Vi må ha **MINST** to piksler per periode!
 - Anta nå at pikslene svarer til $25 \cdot 25$ cm, dvs $f_s = 4$ sampler per meter.
 - Finner gjennomsnitt i hvert piksel ...
 - Amplituden reduseres ...
 - Vi får aliasing, $f_a = |f_s - f| = |4 - 5| = 1$
 - Perioden $T_a = 1/f_a = 1$ meter
- Dette er annerledes enn ved sampling av lyd!
 - Vi får redusert amplitude i forhold til lydsampling
 - Vi får samme aliasingfrekvens
 - Vi kan få en synlig faseforskyvning i bildet. Fase og faseforskyvning av lyden hører vi ikke!



26.01.2015

INF2310

21

Anti-aliasing

- Effekten av aliasing kan reduseres.
- Dette **MÅ** gjøres **FØR** samplingen.
- Hvis vi filtrerer bort de høyeste frekvensene først, vil det finnes færre eller ingen høye frekvenser som kan gi opphav til aliasing.
- Aliasing er en samplings-effekt.
- Aliasing kan **IKKE** fjernes *post*-sampling.
- Mange SW-pakker tilbyr "anti-aliasing" !
- Digitale kamera kan ha en "anti-alias"-funksjon.

26.01.2015

INF2310

22

Anti-aliasing

- Ved *anti-aliasing* fjerner / demper vi de høyere frekvensene **før** vi sampler bildet





(Figurer fra ImageProcessingBasics.com)

26.01.2015

INF2310

23 / 27

Mer reell sampling av bilder

- Når et kamera tar bilde av et objekt, vil hvert piksel i bildet inneholde lys målt fra hele det området som pikselen dekker
- Eksempel: La oss si at 1 piksel dekker det området som er vist til høyre, og at dette lille området inneholder noe fin-struktur:
 
- Dette representeres etter samplingen ved gjennomsnittlig lysstyrke i området:
 
- Vi har målt en **middelverdi over et areal**
 - Implisitt fjernet høyfrekvent bidrag
 - Vi har utført en "anti-aliasing" filtrering.

26.01.2015

INF2310

24

Samplingsmønster/skanningsmønster

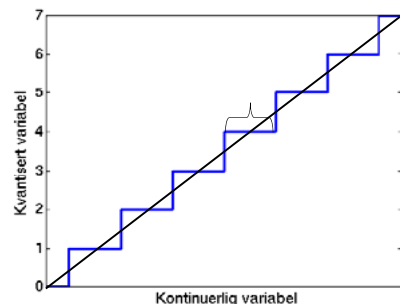
- Vanligvis rektangulært grid
 - Konnektivitets-problemer
(Merk: avstanden mellom diagonale punkter)
 - Avstandsmål
 - Mer om dette i morfologi-forelesningen
- Andre eksempler:
 - Hexagonalt grid
 - Varierende tetthet (f. eks. netthinnen)
 - Polarkoordinater (f.eks ultralyd)

Kvantisering

- $f(x,y)$ er intensitet/lysstyrke i (x,y) og i naturen *kontinuerlig* variabel
- Når skal lagres digitalt må man velge et *visst antall nivåer* (og hvor nivåene skal ligge)
- **Kvantisering:** Prosessen som transformerer en kontinuerlig sampel $f_k(x,y)$ til et diskret sampel $f(x,y)$

Kvantisering, forts.

- Hvert piksel lagres vha. n bit
- Pikelet kan da inneholde heltallsverdier fra 0 til 2^n-1
- Eks 3bit:



- 8 bit er vanlig for gråtonebilder, 3*8 bit for fargebilder.

Kvantiseringsfeil

- Kvantiseringsfeil
 - Summen av hver piksels avrundingsfeil
- Kan velge intervaller og rekonstruksjonsintensiteter som minimerer feilen for et gitt bilde
 - => Ikke-uniform fordeling av kvantiseringsnivåer
- Sentrale stikkord:
 - Lagringsplass
 - Behov for presisjon/akseptabelt informasjonstap
 - Hardware-kompleksitet, eller fysiske begrensninger
- Merk: Fremvisning og videre bildeanalyse av det kvantiserte bildet stiller ulike krav til presisjon

Eksempel: Plassbehov

- Typisk kamera (6 megapiksel)
 - $3264 \times 1832 = 5,979,648$ piksler
 - RGB $\rightarrow 3 * 5,979,648 * 8 \text{ bit} = 143 \text{ Mb} = 18 \text{ MB}$
- Radarbilde fra ERS-satellitten:
 - Overføring fra satellitt kostbart
 - Dekker $100 \times 100 \text{ km}$
 - Pikseldekning $20 \times 20 \text{ m}$
 - 5000×5000 piksler
 - 8-bit: **25 MB**
 - 16 bit: **50 MB**
 - 32 bit: **100 MB**

Prefiks for lagringsbehov

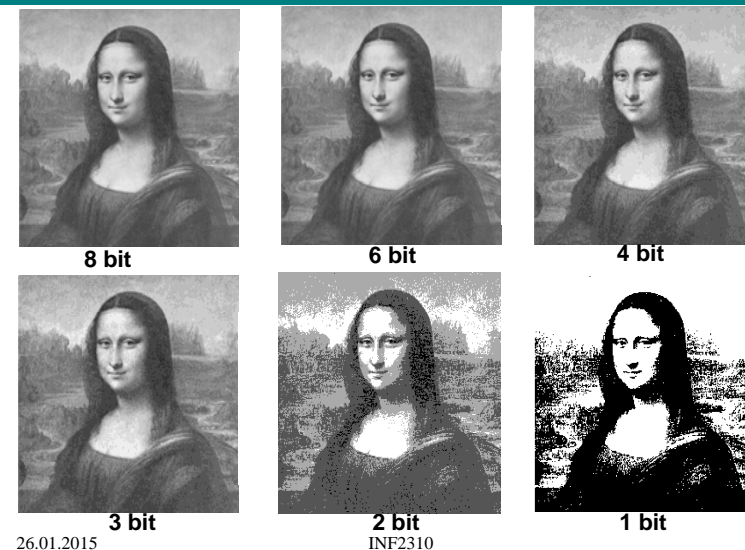
Decimal			Binary		
Kilo	k/K	10^3	Kibi	Ki	2^{10}
Mega	M	10^6	Mebi	Mi	2^{20}
Giga	G	10^9	Gibi	Gi	2^{30}
Tera	T	10^{12}	Tebi	Ti	2^{40}
Peta	P	10^{15}	Pebi	Pi	2^{50}

- Elektroniske minner (RAM, ROM) er gitt i binære enheter
- Harddisk-kapasitet er gitt i desimale enheter.
 - Sektorstørrelsen på disker gis binært (siden de mapper til RAM).
 - Forvirrende hybrider som flasminner med X GB, som ikke er $X * 10^9$ byte eller $X * 2^{30}$ byte, men $X * 10^6 * 1024$ byte
- Kapasiteten til en CD er alltid gitt binært.
- Kapasiteten til en DVD er gitt desimalt.
- Båndbredden gis desimalt, siden klokkeraten gis desimalt
 - ($1 \text{ Mbit/s} = 10^9$ biter per sekund, $1 \text{ GHz} = 10^9$ sykler per sekund).

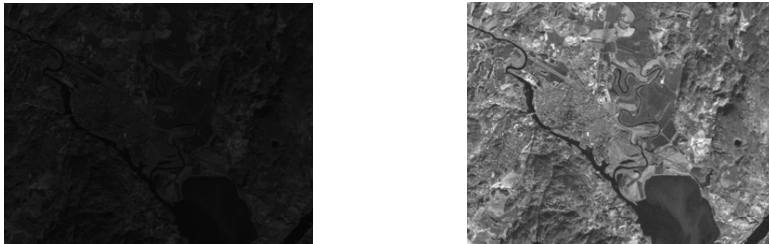
Krav til kvantiseringsnivåer

- Øyet vårt ser bare noen titalls gråtoner samtidig, - trenger vi mer enn 256 nivåer (1 byte) pr. piksel?
- Tilfeller hvor *input*-intensitetsnivå varierer (for eksempel lysnivå ute og innendørs).
- Videre bildeanalyse kan kreve flere kvantiseringsnivåer
- Eksempler på datatyper som ulike sensorer leverer:
 - Byte (0-255): Mest vanlig
 - Unsigned short(16 bit): ERS SAR radarbilder vanlig format
 - 10 – 12 bit: MR-bilder (Magnetisk Resonnans)
 - 64 bit complex: ERS single look complex radarbilder (rådata) med amplitude og faseinformasjon

Eksempler - antall bit pr. piksel

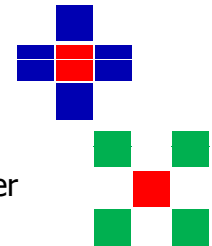


Eksempel – varierende belysning



Naboer til piksler

- Et piksel p i posisjon (x,y) har flere nabo-piksler.
- 4-naboene $N_4(p)$ med koordinater $(x+1,y), (x-1,y), (x,y+1), (x,y-1)$
- Diagonal-naboene $N_D(p)$ med koordinater $(x+1,y+1), (x+1,y-1), (x-1,y+1), (x-1,y-1)$
- Tilsammen utgjør disse 8-naboene til p , $N_8(p)$.



Euklidsk avstand mellom piksler

- Gitt to piksler p,q i planet med koordinater $(x,y), (s,t)$
- Euklidsk avstand mellom p og q

- $D_e(p,q) = [(x-s)^2 + (y-t)^2]^{1/2}$

- I n dimensjoner: $D_e(p,q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (q_i - p_i)^2}$

“City block” avstand mellom piksler

- Også kalt “Taxi-avstand”, “Manhattan-distance”, L_1
- Gitt to piksler p,q i et bilde med koordinater $(x,y), (s,t)$
- City-block avstand (D_4)
 - $D_4(p,q) = |x-s| + |y-t|$
 - Piksler med avstand 1 er 4-naboer til senterpikset
 - $D_4(p,q)$ er lengden av den korteste 4-nabo veien fra p til q , men det kan finnes mange slike veier!

4	3	2	3	4
3	2	1	2	3
2	1	0	1	2
3	2	1	2	3
4	3	2	3	4

- I n dimensjoner: $D_4(p,q) = \sum_{i=1}^n |q_i - p_i|$

Sjakk-avstand mellom piksler

- Også kalt Chebyshev-avstand, L_∞
- Gitt to piksler p, q i et bilde med koordinater $(x, y), (s, t)$
- Sjakk-avstand (D_8)
 - $D_8(p, q) = \max(|x-s|, |y-t|)$
 - Piksler med $D_8=1$ er 8-naboer til senterpikslet
 - $D_8(p, q)$ er lengden av den korteste 8-nabo veien fra p til q , men det kan finnes mange slike veier!
- I n dimensjoner: $D_8(p, q) = \max |q_i - p_i|$

2	2	2	2	2
2	1	1	1	2
2	1	0	1	2
2	1	1	1	2
2	2	2	2	2

Avstandsmetrikker

- Tre piksler p, q, z med koordinater $(x, y), (s, t)$ og (v, w)
- Avstandsfunksjonen $D(p, q)$ er en metrikk hvis
 - $D(p, q) \geq 0$ (*ikke-negativitet*)
 - $D(p, q) = 0$ hvis og bare hvis $p=q$ (*identitet*)
 - $D(p, q) = D(q, p)$ (*symmetri*)
 - $D(p, z) \leq D(p, q) + D(q, z)$ (*trekant-ulikhet*)

Avstandsmetrikker - II

- Gitt avstandsmålene D_4 og D_8 :
- Q: Tilfredsstill D_4 og D_8 alle kravene til en metrikk?
- Q: Er $\text{floor}(D_e) = (\text{største heltall} \leq D_e)$ en metrikk?

0	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

0	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	4
3	3	3	3	4
4	4	4	4	4

0	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	4
3	3	3	4	5
4	4	4	5	5

Sentrale temaer i dag

- Romlig oppløsning
 - Punktspredningsfunksjon (PSF)
 - Rayleigh-kriteriet
 - Romlig frekvens
- Sampling
 - Samplingsteoremet (Shannon/Nyquist)
 - Aliasing
 - Anti-aliasing
- Kvantisering
 - Kvantiseringsfeil
 - Ikke-uniform fordeling av nivåer
- Avstandsmål, metrikker