

Det matematiske fundamentet til den diskrete Fourier-transformen

Supplement til forelesning 8
INF2310 - Digital bildebehandling

Ole Marius Hoel Rindal,
slides av Andreas Kleppe

11. mars 2015

Standard indreprodukt

- Standard indreprodukt i \mathbb{R}^N er:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \vec{x}^T \vec{y} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i$$

- ▶ Notasjon: Ofte én-indekseres vektorelementene i grunnleggende lineær algebra, men vi null-indeksere.
- ▶ Notasjon: Ofte angis dimensjonene med små bokstaver, men vi vil her bruke store, f.eks. N istedetfor n .
- ▶ Kan kalles *prikkprodukt* eller *skalarprodukt*.
- ▶ $\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ er den euklidske normen.

- Standard indreprodukt i \mathbb{C}^N er:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \vec{x}^T \vec{y}^* = \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i^*$$

- ▶ Notasjon: * betegner kompleks-konjugering.

Dagens mål

Dagens mål

Forstå 2D diskret Fourier-transform (2D DFT) som et ortogonalt basisskifte, og bevise denne sammenhengen.

Denne forelesningen forutsetter at du har god kjennskap til lineær algebra, og mye av det vi går gjennom her er ikke pensum. Forelesningen er allikevel nyttig for å forstå Fourier transformasjonen.

Ortogonalitet

- Et *indreproduktrom* er et vektorrom med et spesifikt indreprodukt.
 - ▶ F.eks. det euklidske rommet i \mathbb{R}^3 , altså vektorrommet \mathbb{R}^3 med standard indreprodukt i \mathbb{R}^3 som indreprodukt.
- To vektorer \vec{x} og \vec{y} kalles *ortogonale* i et indreproduktrom hvis $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$. Vi skriver at $\vec{x} \perp \vec{y}$.
 - ▶ Her betegner $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indreproduktet til indreproduktrommet.

Standard indreprodukt for komplekse matriser

- Standard indreprodukt i $\mathbb{C}^{M,N}$ er:

$$\langle A, B \rangle := \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_{ij} b_{ij}^*$$

- To matriser A og B er ortogonale hvis $\langle A, B \rangle = 0$.
 - ▶ Dette er egentlig bare en spesialtilfelle av definisjonen på forrige slide fordi $\mathbb{C}^{M,N}$ er et vektorrom på lik linje med \mathbb{C}^N ; begrepet *vektor* brukes i denne sammenhengen som en betegnelse på elementene i et vektorrom.

Ortogonal basis I

- En mengde vektorer $\{\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{N-1}\}$ kalles en *ortogonal mengde* dersom $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0 \forall i \neq j$
- En *ortogonal basis* er en basis og en ortogonalt mengde.
- Et *ortogonalt basisskifte* er et basisskifte mellom ortogonale basiser.

Basis

- En *basis* for et vektorrom V er en mengde vektorer $\{\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{N-1}\}$ (der $\vec{v}_i \in V$ for alle i) som:
 - 1 Er lineært uavhengige, dvs., $\sum_{i=0}^{N-1} c_i \vec{v}_i = 0 \Rightarrow c_i = 0 \forall i$
 - 2 Utspenner V , dvs., $V = \text{Span}\{\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{N-1}\}$
- En basis (for V) kan betraktes som en minst mulig mengde som kan representere alle vektorer (i V).
- Å skifte basisen som brukes til å uttrykke en vektor kalles et *basisskifte*.
- Et basisskifte endrer hvordan vektoren er representert, men ikke hva den representerer.

Ortogonal basis II

Teorem: Ortogonalt basisskifte

La $S := \{\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{N-1}\}$ være en ortogonal basis for et indreproduktrom. Enhver \vec{y} i dette rommet kan da skrives som:

$$\vec{y} = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \vec{v}_i$$

der c_i for $i = 0, 1, \dots, N-1$ er gitt ved:

$$c_i = \frac{\langle \vec{y}, \vec{v}_i \rangle}{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle}$$

der $\langle \cdot, \cdot \rangle$ betegner indreproduktet til indreproduktrommet.

c_0, c_1, \dots, c_{N-1} kalles koordinatene til \vec{y} mhp. S .

En ortogonal basis

For $u = 0, 1, \dots, M - 1$ og $v = 0, 1, \dots, N - 1$, la:

$$A_{u,v} := \frac{1}{MN} \begin{bmatrix} e^{j2\pi\left(\frac{u \cdot 0}{M} + \frac{v \cdot 0}{N}\right)} & \dots & e^{j2\pi\left(\frac{u \cdot 0}{M} + \frac{v \cdot (N-1)}{N}\right)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi\left(\frac{u \cdot (M-1)}{M} + \frac{v \cdot 0}{N}\right)} & \dots & e^{j2\pi\left(\frac{u \cdot (M-1)}{M} + \frac{v \cdot (N-1)}{N}\right)} \end{bmatrix}$$

Teorem

$A = \{A_{u,v} \mid u = 0, 1, \dots, M - 1 \wedge v = 0, 1, \dots, N - 1\}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{C}^{M,N}$ mhp. standard indreprodukt i $\mathbb{C}^{M,N}$.

En ortogonal basis - bevis (ortogonalitet I)

A er en ortogonal mengde hvis og bare hvis $\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = 0$ når $u \neq u'$ og/eller $v \neq v'$. Generelt er:

$$\begin{aligned} \langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle &= \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} e^{-j2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} e^{j2\pi\left(\frac{(u-u')x}{M} + \frac{(v-v')y}{N}\right)} \end{aligned}$$

Dersom $u = u'$ og $v = v'$ (trengs ikke for å vise ortogonalitet):

$$\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} e^0 = \frac{1}{MN}$$

En ortogonal basis - bevis (basis)

Dersom A er en ortogonal mengde

må den også være en *basis* for det aktuelle rommet, $\mathbb{C}^{M,N}$:

- 1 Siden elementene i A , $A_{u,v}$, er ulik 0-matrisen, vil ortogonalitet medføre lineær uavhengighet.
- 2 A utspenner $\mathbb{C}^{M,N}$ hvis elementene er lineært uavhengige:
 - ▶ Det finnes MN elementer i A .
 - ▶ Hver matrise ligger i $\mathbb{C}^{M,N}$.
 - ▶ Dimensjonen av $\mathbb{C}^{M,N}$ er MN .
 - ▶ \Rightarrow dersom elementene i A er lineært uavhengige må de utspenne $\mathbb{C}^{M,N}$.

Altså står og faller hele teoremet på om A er en ortogonal mengde.

En ortogonal basis - bevis (ortogonalitet II)

Dersom $v \neq v'$:

$$\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} e^{j2\pi\frac{(u-u')x}{M}} \sum_{y=0}^{N-1} e^{j2\pi\frac{(v-v')y}{N}}$$

Siden $v \neq v'$ vil $v - v' \in \{-(N-1), \dots, -1, 1, \dots, N-1\}$ og dermed $e^{j2\pi\frac{v-v'}{N}} \neq 1$. Siden $\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1-r^n}{1-r}$ når $r \neq 1$:

$$\begin{aligned} \langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle &= \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} e^{j2\pi\frac{(u-u')x}{M}} \cdot \frac{1 - e^{j2\pi(v-v')}}{1 - e^{j2\pi\frac{v-v'}{N}}} \\ &= \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} e^{j2\pi\frac{(u-u')x}{M}} \cdot \frac{1 - 1}{1 - e^{j2\pi\frac{v-v'}{N}}} = 0 \end{aligned}$$

En ortogonal basis - bevis (ortogonalitet III)

Dersom $u \neq u'$ kan vi føre et helt tilsvarende resonnement for å vise at $\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = 0$:

- 1 Bytt summasjonsrekkefølgen.
- 2 Trekk ut potensen med $v - v'$ i eksponenten fra indre sum.
- 3 $u - u' \in \{-(M-1), \dots, -1, 1, \dots, M-1\}$
 $\Rightarrow e^{j2\pi \frac{u-u'}{M}} \neq 1$
 \Rightarrow kan bruke formelen for geometrisk rekke.
- 4 Telleren blir 0 \Rightarrow hele uttrykket blir 0.

2D DFT - et ortogonalt basisskifte I

Siden A er en ortogonal basis for $\mathbb{C}^{M,N}$ mhp. dets standard indreprodukt, så sier teoremet om ortogonalt basisskifte at:

- Enhver $f \in \mathbb{C}^{M,N}$ oppfyller:

$$f = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} c_{u,v} A_{u,v}$$

som etter og omdøpt $c_{u,v}$ til $F(u, v)$ kan skrives på komponentform som:

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

En ortogonal basis - bevis (ortogonalitet IV)

Vi har altså vist at $\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = (MN)^{-1} \delta(u - u', v - v')$, der δ er Kronecker delta, dvs. at:

- 0 når $u \neq u'$ og/eller $v \neq v'$.
 $\Rightarrow A$ er en ortogonal mengde.
- $(MN)^{-1}$ når $u = u'$ og $v = v'$.
 \Rightarrow mengden av $\sqrt{MN} A_{u,v}$ for $u = 0, 1, \dots, M-1$ og $v = 0, 1, \dots, N-1$ er en *ortonormal* mengde (dvs. en ortogonal mengde der alle elementene har indreproduktnorm 1).

Sammen med basis-beviset har vi dermed bevist teoremet; $A = \{A_{u,v} \mid u = 0, 1, \dots, M-1 \wedge v = 0, 1, \dots, N-1\}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{C}^{M,N}$ mhp. standard indreprodukt i $\mathbb{C}^{M,N}$.

□

2D DFT - et ortogonalt basisskifte II

Videre sier teoremet om ortogonalt basisskifte:

- ... der $c_{u,v} = F(u, v)$ for $u = 0, 1, \dots, M-1$ og $v = 0, 1, \dots, N-1$ er gitt ved:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{\langle f, A_{u,v} \rangle}{\langle A_{u,v}, A_{u,v} \rangle} \\ &= \frac{(MN)^{-1} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}}{(MN)^{-1}} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \end{aligned}$$

2D DFT - et ortogonalt basisskifte III

- Vi definerer 2D diskret Fourier-transform (2D DFT) av et bilde $f \in \mathbb{R}^{M,N}$ som koordinatene til f mhp. A .
- Altså er 2D DFT av f matrisen $F \in \mathbb{C}^{M,N}$ som er gitt ved:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

for $u = 0, 1, \dots, M-1$ og $v = 0, 1, \dots, N-1$.

- Vi går tilbake til standardbasen for matriser ved å bruke:

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

for $x = 0, 1, \dots, M-1$ og $y = 0, 1, \dots, N-1$.

Kalles 2D invers diskret Fourier-transform (2D IDFT).

Egenskaper ved 2D DFT: f blir også periodisk

Betegn 2D DFT-en til bildet $f \in \mathbb{R}^{M,N}$ som F .

f er periodisk

$$f(x, y) = f(x + kM, y + kN) \text{ når } k \in \mathbb{Z}.$$

Bevis: Som forrige:

$$\begin{aligned} f(x + kM, y + kN) &= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi\left(\frac{(u+kM)x}{M} + \frac{(v+kN)y}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} e^{j2\pi k(x+y)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} = f(x, y) \end{aligned}$$

□

Altså antas indirekte at f er periodisk når vi bruker 2D DFT.

Egenskaper ved 2D DFT: Periodisk

Betegn 2D DFT-en til bildet $f \in \mathbb{R}^{M,N}$ som F .

F er periodisk

$$F(u, v) = F(u + kM, v + kN) \text{ når } k \in \mathbb{Z}.$$

Bevis:

$$\begin{aligned} F(u + kM, v + kN) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi\left(\frac{(u+kM)x}{M} + \frac{(v+kN)y}{N}\right)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} e^{-j2\pi k(x+y)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} = F(u, v) \end{aligned}$$

□

PS: Gjelder selv om f er kompleks.

Egenskaper ved 2D DFT: Konjugert symmetrisk

Betegn 2D DFT-en til bildet $f \in \mathbb{R}^{M,N}$ som F .

F er konjugert symmetrisk

$$F(u, v) = F^*(-u, -v).$$

Bevis:

$$\begin{aligned} F^*(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f^*(x, y) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi\left(\frac{-ux}{M} + \frac{-vy}{N}\right)} = F(-u, -v) \end{aligned}$$

Siden $F(-u, -v) = F^*(u, v)$, så er $F(u, v) = F^*(-u, -v)$.

□

Merk: f må være reell!

Egenskaper ved 2D DFT: Sinus og cosinus I

Eulers formel relaterer den komplekse eksponentialen til de trigonometriske funksjonene:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

Fra denne formelen får vi de to trigonometriske identitetene:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\cos \theta + \cos \theta}{2} + \frac{j \sin \theta - j \sin \theta}{2} \\ &= \frac{\cos \theta + j \sin \theta + \cos(-\theta) + j \sin(-\theta)}{2} = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{j \sin \theta + j \sin \theta}{2j} + \frac{\cos \theta - \cos \theta}{2j} \\ &= \frac{j \sin \theta + \cos \theta - j \sin(-\theta) - \cos(-\theta)}{2j} = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \end{aligned}$$

Egenskaper ved 2D DFT: Sinus og cosinus II

Korollar: 2D DFT av en samplet 2D cosinus

Den samlede cosinusen $f(x, y) = \cos\left(2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)\right)$ med $u', v' \in \mathbb{Z}$, $|u'| < M/2$ og $|v'| < N/2$ sin 2D DFT er $F(u, v) = \frac{MN}{2} (\delta(u - u', v - v') + \delta(u + u', v + v'))$.

Bervis: For $|u| < M/2$ og $|v| < N/2$ er:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \cos\left(2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)\right) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \frac{e^{j2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)} + e^{-j2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)}}{2} e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \frac{MN}{2} (\delta(u - u', v - v') + \delta(u + u', v + v')) \end{aligned}$$

□

Egenskaper ved 2D DFT: Sinus og cosinus III

Korollar: 2D DFT av en samplet 2D sinus

Den samlede sinusen $f(x, y) = \sin\left(2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)\right)$, med $u', v' \in \mathbb{Z}$, $|u'| < M/2$ og $|v'| < N/2$ sin 2D DFT er $F(u, v) = \frac{MN}{2j} (\delta(u - u', v - v') - \delta(u + u', v + v'))$.

Bervis: Helt analogt: For $|u| < M/2$ og $|v| < N/2$ er:

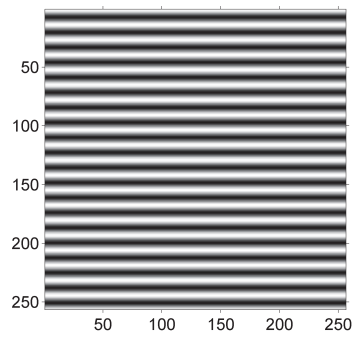
$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \sin\left(2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)\right) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \frac{e^{j2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)} - e^{-j2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)}}{2j} e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \frac{MN}{2j} (\delta(u - u', v - v') - \delta(u + u', v + v')) \end{aligned}$$

□

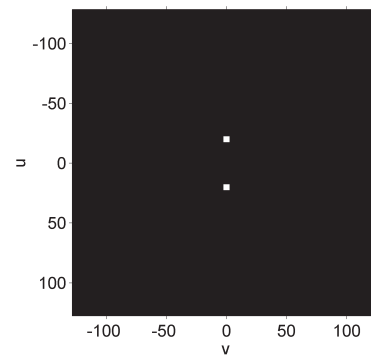
Egenskaper ved 2D DFT: Sinus og cosinus IV

- 2D DFT-en til en samplet 2D sinus eller cosinus med frekvens (u', v') er altså hhv. $\frac{MN}{2j} (\delta(u - u', v - v') - \delta(u + u', v + v'))$ og $\frac{MN}{2} (\delta(u - u', v - v') + \delta(u + u', v + v'))$.
 - ▶ u' og v' må være heltallige.
 - ★ Vi antok i tillegg at de var mindre enn halvparten av sine respektive bildelenger i absoluttverdi, men tilsvarende egenskap gjelder generelt.
 - ▶ Enheten til frekvensen er per bildelengde, $M \times N$.
- Ikke-null piksler i 2D DFT-en angir frekvensen!
 - ▶ At det er et symmetrisk par er en nødvendighet ettersom f er reell; vi har jo vist at 2D DFT da er konjugert symmetrisk.

Eksempel I: 2D DFT av samplet 2D cosinus

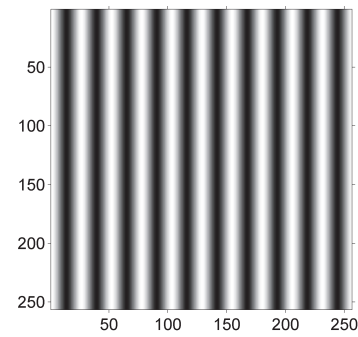


Samplet 2D cosinus med frekvens $(20, 0)$

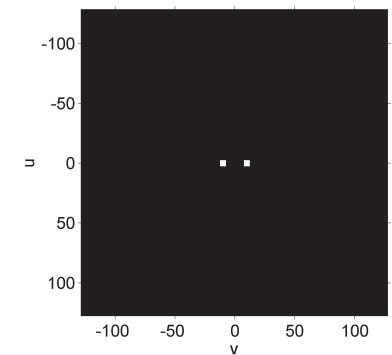


Absoluttverdien av 2D DFT-en
Svart og hvitt indikerer hhv. 0 og $MN/2$.
Merk at senterpikselen er $(0,0)$ -frekvensen.
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

Eksempel I: 2D DFT av samplet 2D cosinus

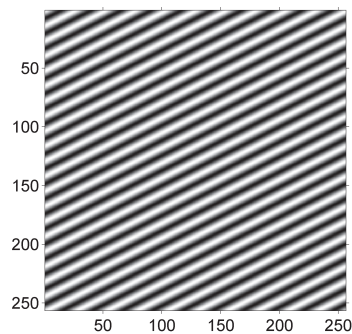


Samplet 2D cosinus med frekvens $(0, 10)$

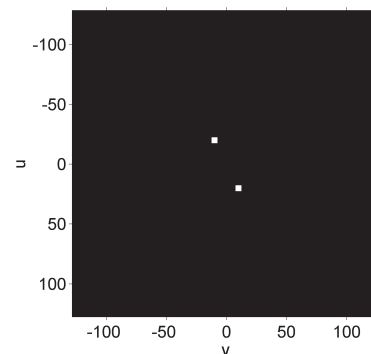


Absoluttverdien av 2D DFT-en
Svart og hvitt indikerer hhv. 0 og $MN/2$.
Merk at senterpikselen er $(0,0)$ -frekvensen.
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

Eksempel I: 2D DFT av samplet 2D cosinus

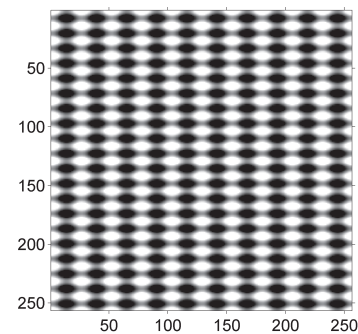


Samplet 2D cosinus med frekvens $(20, 10)$

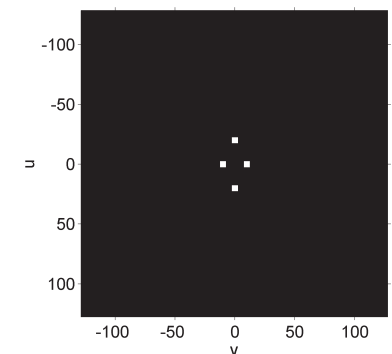


Absoluttverdien av 2D DFT-en
Svart og hvitt indikerer hhv. 0 og $MN/2$.
Merk at senterpikselen er $(0,0)$ -frekvensen.
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

Eksempel IV: 2D DFT av summen av to cosinuser



Samplet 2D cosinus med $(20, 0)$ +
cosinus med $(0, 10)$



Absoluttverdien av 2D DFT-en
Svart og hvitt indikerer hhv. 0 og $MN/2$.
Merk at senterpikselen er $(0,0)$ -frekvensen.
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

Oppsummering

- 2D DFT av bildet $f \in \mathbb{R}^{M,N}$ er koordinatene til f mhp.
 $A = \{A_{u,v} : u = 0, 1, \dots, M-1 \wedge v = 0, 1, \dots, N-1\}$, der:

$$A_{u,v} := \frac{1}{MN} \begin{bmatrix} e^{j2\pi\left(\frac{u \cdot 0}{M} + \frac{v \cdot 0}{N}\right)} & \dots & e^{j2\pi\left(\frac{u \cdot 0}{M} + \frac{v(N-1)}{N}\right)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi\left(\frac{u(M-1)}{M} + \frac{v \cdot 0}{N}\right)} & \dots & e^{j2\pi\left(\frac{u(M-1)}{M} + \frac{v(N-1)}{N}\right)} \end{bmatrix}$$

- A er en ortogonal basis for $\mathbb{C}^{M,N}$.
- 2D DFT av en sinus eller cosinus med frekvens (u, v) er kun ulik 0 i (u, v) og $(-u, -v)$.