

Løsningsforslag nr 11 INF2310, våren 2015.

Segmentering ved terskling

Oppgave 4 - Entropi-terkling:

I denne oppgaven skal du få litt trening i å håndtere partielle summer av histogrammer.

Anta at du har gitt et bilde med G trinn i gråtoneskalaen, og med et normalisert histogram $p(i)$, $0 \leq i \leq G-1$. Bildet inneholder ikke nødvendigvis alle disse gråtonene.

Vi har sett at første ordens entropi gitt ved

$$H = -\sum_{i=0}^{G-1} p_i \log_2(p_i)$$

er et uttrykk for informasjonsinnhold i enkelt-piksler.

Anta at vi beregner entropiene $H_1(t)$ og $H_2(t)$ separat for de delene av histogrammet som er under og over en gitt terskelverdi t , dvs.:

$$H_1(t) = -\sum_{i=0}^t \left(\frac{p(i)}{P_1(t)} \right) \log_2 \left(\frac{p(i)}{P_1(t)} \right), \quad P_1(t) = \sum_{i=0}^t p(i)$$
$$H_2(t) = -\sum_{i=t+1}^{G-1} \left(\frac{p(i)}{P_2(t)} \right) \log_2 \left(\frac{p(i)}{P_2(t)} \right), \quad P_2(t) = \sum_{i=t+1}^{G-1} p(i)$$

Her er $P_1(t)$ og $P_2(t)$ *a posteriori* sannsynlighetene for de to klassene, dvs sannsynlighetene for hhv mørke og lyse piksler *etter* at tersklingen er utført med terskelverdi t .

- a. Implementer en beregning av funksjonen $A(t) = H_1(t) + H_2(t)$ for alle mulige verdier av terskelverdien t i et gitt bilde.
- Gjør rede for hvilke forbehold du må ta i koden.

Vi må ha $p(i) > 0$ i $\log p(i)$. Siden vi dividerer med $P_1(t)$ og $P_2(t)$ må vi kreve $P_1(t) > 0$ og $P_2(t) > 0$. Det samme gjelder selvsagt når vi tar logaritmen av $P_1(t)$ og $P_2(t)$. Men siden $P_2(t) = 1 - P_1(t)$ blir kravet $0 < P_1(t) < 1$. Det kumulative normaliserte histogrammet $P_1(t)$ setter altså en nedre og øvre grense for det området av t -verdier der $A(t)$ kan beregnes.

- Anvend dette på bildet mona.png, og terskle bildet med den terskelverdien T_A der $A(t)$ har sitt maksimum.
- Vil en histogramutjevning påvirke plasseringen av terskelen eller utseendet av det binære bildet?

Histogramutjevning vil flytte men ikke bytte om på innholdet i histogrammet. Plasseringen av maksimum for funksjonen $A(t)$ blir derfor påvirket, men ikke utseendet av det binære bildet.

b. Beskriv med tekst og ligninger hvordan beregningen av $H_1(t)$ og $H_2(t)$ kan effektiviseres. Siden vi skal regne ut $H_1(t)$ og $H_2(t)$ for alle mulige (og lovlige) verdier av t , kan det være lurt å effektivisere beregningene. Det er flere mulige trinn her:

- For det første kan vi la være å beregne $P_1(t)$ for hver gang vi trenger den. Vi har jo at

$$P(t) = \sum_{i=0}^t p_i(t) = p(t) + \sum_{i=0}^{t-1} p_i(t), \quad t \in [1, G-1], \quad P(0) = p(0)$$

Vi kan altså legge dette kumulative normaliserte histogrammet inn i en tabell en gang for alle.

- Vi vil nok gjerne at man skal demonstrere at man er klar over at vi ikke trenger $P_2(t)$, fordi vi i et tilfelle med to klasser alltid har $P_2(t) = 1 - P_1(t)$.
- Uttrykkene for $H_1(t)$ og $H_2(t)$ kan lett forenkles. $P_1(t)$ og $P_2(t)$ inni summetegnene kan flyttes ut, likeså $\log P_1(t)$ og $\log P_2(t)$. Vi får da for $H_1(t)$:

$$\begin{aligned} H_1(t) &= -\sum_{i=0}^t \left(\frac{p(i)}{P_1(t)} \right) \log_2 \left(\frac{p(i)}{P_1(t)} \right) \\ &= -\frac{1}{P_1(t)} \sum_{i=0}^t p(i) (\log_2 p(i) - \log_2 P_1(t)) \\ &= \frac{\log_2 P_1(t)}{P_1(t)} \sum_{i=0}^t p(i) - \frac{1}{P_1(t)} \sum_{i=0}^t p(i) \log_2 p(i) \\ &= \log_2 P_1(t) + \frac{h(t)}{P_1(t)}, \quad \text{der} \quad h(t) = -\sum_{i=0}^t p(i) \log_2 p(i) \end{aligned}$$

Tilsvarende får vi for $H_2(t)$:

$$H_2(t) = \log_2(1 - P_1(t)) + \frac{h(G-1) - h(t)}{1 - P_1(t)}, \quad \text{der} \quad h(G-1) = -\sum_{i=0}^{G-1} p(i) \log_2 p(i)$$

- Nå er det jo også slik at

$$\begin{aligned} h(t) &= -\sum_{i=0}^t p(i) \log_2 p(i) \\ &= -p(t) \log_2 p(t) - \sum_{i=0}^{t-1} p(i) \log_2 p(i) \\ &= -p(t) \log_2 p(t) + h(t-1), \quad t \in [1, G-1] \end{aligned}$$

Så vi kan altså:

- 1) Lage en tabell som inneholder det kumulative normaliserte histogrammet $P_1(t)$.
- 2) Lage den kumulative entropi-tabellen $h(t)$. Siste entry i denne er $h(G-1)$, som er bildets entropi.
- 3) Verdiene av $H_1(t)$ og $H_2(t)$ finnes nå ved enkle oppslag i de to tabellene og innsetting i de to forenklete uttrykkene for $H_1(t)$ og $H_2(t)$ ovenfor.