

Det matematiske fundamentet til
den diskrete Fourier-transformen
Supplement til forelesningen Fourier-transform I
INF2310 - Digital bildebehandling

Kristine Baluka Hein,
etter slides av Andreas Kleppe

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

27. mars 2017

I dag

- ▶ Se på det matematiske verktøyet bak 2D diskret Fourier-transform (2D DFT)
- ▶ Egenskaper ved 2D DFT

Standard indreprodukt

- ▶ Standard indreprodukt i \mathbb{R}^N er:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \vec{x}^T \vec{y} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i$$

- ▶ $\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$ er den euklidske normen.
- ▶ Standard indreprodukt i \mathbb{C}^N er:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := \vec{x}^T \vec{y}^* = \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_i^*$$

Ortogonalitet

- ▶ Et vektorrom er en mengde bestående av vektorer der multiplikasjon og addisjon følger visse aksiomer
- ▶ Et *indreproduktrom* er et vektorrom med et spesifikt indreprodukt.
- ▶ To vektorer \vec{x} og \vec{y} kalles *ortogonale* i et indreproduktrom hvis $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$. Vi skriver at $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Standard indreprodukt for komplekse matriser

- ▶ Standard indreprodukt i $\mathbb{C}^{M,N}$ er:

$$\langle A, B \rangle := \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_{ij} b_{ij}^*$$

- ▶ To matriser A og B er ortogonale hvis $\langle A, B \rangle = 0$.

Basis

- ▶ En *basis* for et vektorrom V av dimensjon N er en mengde vektorer $\{\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{N-1}\}$, der $\vec{v}_i \in V$ for alle i , som:
 1. Er lineært uavhengige
 2. Utspenner V
- ▶ En basis for vektorrommet V kan betraktes som en minst mulig mengde som kan representere alle vektorer i V .

Ortogonal basis I

- ▶ En mengde vektorer $\{\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{N-1}\}$ kalles en *ortogonal mengde* dersom $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$ for alle $i \neq j$
- ▶ En *ortogonal basis* er en basis og en ortogonalt mengde.
- ▶ En vilkårlig vektor kan representeres med hensyn på en ortogonal basis og indreproduktet i V .

Orthogonal basis II

Teorem: Representasjon ved en orthogonal basis (projisering)

La $S := \{\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{N-1}\}$ være en orthogonal basis for et indreproduktrom V . En vilkårlig \vec{y} kan approksimeres mhp. den ortogonale basisen:

$$\vec{\hat{y}} = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \vec{v}_i$$

der c_i for $i = 0, 1, \dots, N - 1$ er gitt ved:

$$c_i = \frac{\langle \vec{y}, \vec{v}_i \rangle}{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle}$$

Dersom \vec{y} er i V , vil $\vec{y} = \vec{\hat{y}}$

Orthogonal basis i 2 dimensjoner

For $u = 0, 1, \dots, M - 1$ og $v = 0, 1, \dots, N - 1$, la:

$$A_{u,v} := \frac{1}{MN} \begin{bmatrix} e^{j2\pi\left(\frac{u \cdot 0}{M} + \frac{v \cdot 0}{N}\right)} & \dots & e^{j2\pi\left(\frac{u \cdot 0}{M} + \frac{v(N-1)}{N}\right)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi\left(\frac{u(M-1)}{M} + \frac{v \cdot 0}{N}\right)} & \dots & e^{j2\pi\left(\frac{u(M-1)}{M} + \frac{v(N-1)}{N}\right)} \end{bmatrix}$$

Teorem:

$A = \{A_{u,v} \mid u = 0, 1, \dots, M - 1 \text{ og } v = 0, 1, \dots, N - 1\}$ er en orthogonal basis for $\mathbb{C}^{M,N}$ mhp. standard indreprodukt i $\mathbb{C}^{M,N}$.

Bevis (basis)

Dersom A er en ortogonal *mengde*

må den også være en *basis* for det aktuelle rommet, $\mathbb{C}^{M,N}$:

1. Siden elementene i A , $A_{u,v}$, er ulik 0-matrisen, vil ortogonalitet medføre lineær uavhengighet.
2. For at A skal være en basis, må den også *utspenne* $\mathbb{C}^{M,N}$.

Mengden A er en basis. Det gjenstår å undersøke om A er en ortogonal mengde.

Bevis (ortogonalitet)

A er en ortogonal mengde hvis og bare hvis $\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = 0$ når $u \neq u'$ og/eller $v \neq v'$. Generelt er:

$$\begin{aligned}\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle &= \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} e^{-j2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)} \\ &= \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} e^{j2\pi\left(\frac{(u-u')x}{M} + \frac{(v-v')y}{N}\right)}\end{aligned}$$

Dersom $u = u'$ og $v = v'$:

$$\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} e^0 = \frac{1}{MN}$$

Bevis (ortogonalitet)

Dersom $v \neq v'$:

$$\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} e^{j2\pi \frac{(u-u')x}{M}} \sum_{y=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{(v-v')y}{N}}$$

$v \neq v'$ gir at $e^{j2\pi \frac{v-v'}{N}} \neq 1$.

Sum over en geometrisk rekke: $\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1-r^n}{1-r}$ når $r \neq 1$:

$$\begin{aligned} \langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle &= \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} e^{j2\pi \frac{(u-u')x}{M}} \cdot \frac{1 - e^{j2\pi(v-v')}}{1 - e^{j2\pi \frac{v-v'}{N}}} \\ &= \frac{1}{M^2 N^2} \sum_{x=0}^{M-1} e^{j2\pi \frac{(u-u')x}{M}} \cdot \frac{1 - 1}{1 - e^{j2\pi \frac{v-v'}{N}}} = 0 \end{aligned}$$

Bevis (ortogonalitet)

Dersom $u \neq u'$ kan vi føre et helt tilsvarende resonnement for å vise at $\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = 0$.

Bevis (ortogonalitet)

Vi har dermed vist at

$$\langle A_{u,v}, A_{u',v'} \rangle = \frac{1}{MN} \delta(u - u', v - v')$$

der δ er Kronecker delta;

$$\delta(u - u', v - v') = \begin{cases} 1, & u = u' \text{ og } v = v' \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Bevis - oppsummert

- ▶ A er en ortogonal mengde:
Indreproduktet er 0 når $u \neq u'$ og/eller $v \neq v'$.
- ▶ Vi beviste at elementene i A utgjør en *basis* for $\mathbb{C}^{M,N}$

Vi kan derfor konkludere med at;

$A = \{A_{u,v} \mid u = 0, 1, \dots, M-1 \text{ og } v = 0, 1, \dots, N-1\}$ er en ortogonal basis for $\mathbb{C}^{M,N}$ mhp. standard indreprodukt i $\mathbb{C}^{M,N}$.



2D Diskret Fourier-transform

- ▶ Vi definerer 2D diskret Fourier-transform (2D DFT) av et bilde f i $\mathbb{C}^{M,N}$ som koordinatene til f mhp. A . Koordinatene vil representere f i vektorrommet utspent av A .
- ▶ For å gå tilbake til den opprinnelige representasjonen, må vi utføre en *invers* diskret Fourier-transform (2D IDFT)

2D IDFT

Enhver $f \in \mathbb{C}^{M,N}$ kan representeres ved:

$$f = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) A_{u,v}$$

som mer konkret er

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

Ved å finne $f(x, y)$ gjør vi en 2D IDFT

2D DFT

Koordinatene til f mhp. A kan vi finne ved:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{\langle f, A_{u,v} \rangle}{\langle A_{u,v}, A_{u,v} \rangle} \\ &= \frac{\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}}{\frac{1}{MN}} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \end{aligned}$$

Ved å finne $F(u, v)$ gjør vi en 2D DFT

Egenskaper ved 2D DFT: Periodisk

La 2D DFT-en til billedet $f \in \mathbb{C}^{M,N}$ være F

F er periodisk

$F(u, v) = F(u + kM, v + kN)$ når k er et heltall

$$\begin{aligned} F(u + kM, v + kN) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{(u+kM)x}{M} + \frac{(v+kN)y}{N} \right)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} e^{-j2\pi k(x+y)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \cdot 1 = F(u, v) \end{aligned}$$

□

Egenskaper ved 2D DFT: f blir også periodisk

f er periodisk

$f(x, y) = f(x + kM, y + kN)$ når $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} f(x + kM, y + kN) &= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi\left(\frac{u+kM}{M}x + \frac{v+kN}{N}y\right)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} e^{j2\pi k(x+y)} \\ &= \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} = f(x, y) \end{aligned}$$

□

Det antas indirekte at f er periodisk når vi bruker 2D DFT.

Egenskaper ved 2D DFT: Konjugert symmetrisk

La nå 2D DFT-en til bildet $f \in \mathbb{R}^{M,N}$ være F

F er konjugert symmetrisk for reelle f

$$F(u, v) = F^*(-u, -v).$$

$$\begin{aligned} F^*(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f^*(x, y) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi\left(\frac{-ux}{M} + \frac{-vy}{N}\right)} = F(-u, -v) \end{aligned}$$

Siden $F(-u, -v) = F^*(u, v)$, så er $F(u, v) = F^*(-u, -v)$.



Kjekt å kunne

Eulers formel: $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$

$$\frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} = \cos \theta$$

$$\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} = \sin \theta$$

2D DFT av en samplet 2D cosinus

$$\text{Dersom } f(x, y) = \cos\left(2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)\right)$$

Der u', v' heltall, $|u'| < M/2$ og $|v'| < N/2$

2D DFT:

$$F(u, v) = \frac{MN}{2} (\delta(u - u', v - v') + \delta(u + u', v + v'))$$

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \cos\left(2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)\right) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \frac{e^{j2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)} + e^{-j2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)}}{2} e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \\ &= \frac{MN}{2} (\delta(u - u', v - v') + \delta(u + u', v + v')) \end{aligned}$$



2D DFT av en samplet 2D sinus

$$\text{Dersom } f(x, y) = \sin\left(2\pi\left(\frac{u'x}{M} + \frac{v'y}{N}\right)\right)$$

Der $u', v' \in \mathbb{Z}$, $|u'| < M/2$ og $|v'| < N/2$

2D DFT:

$$F(u, v) = \frac{MN}{2j} (\delta(u - u', v - v') - \delta(u + u', v + v'))$$

Vi kan gjøre et tilsvarende resonnement som vi gjorde for samplet cosinus

2D DFT av sinus og cosinus

2D DFT-en til cosinus:

$$\frac{MN}{2} (\delta(u - u', v - v') + \delta(u + u', v + v'))$$

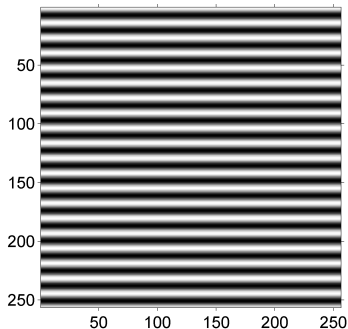
2D DFT-en til sinus:

$$\frac{MN}{2j} (\delta(u - u', v - v') - \delta(u + u', v + v'))$$

- ▶ Ikke-null piksler i 2D DFT-en angir frekvensen!
- ▶ Bildet f har reelle verdier \Rightarrow symmetriske par i 2D DFT

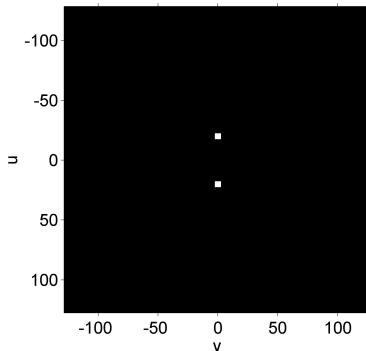
Eksempel I: 2D DFT av samplet 2D cosinus

Samplet 2D cosinus
med frekvens $(20, 0)$



Svart og hvitt indikerer hhv. -1 og 1.

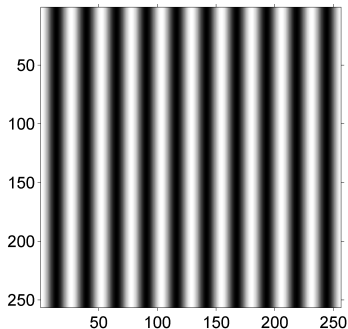
(Absoluttverdien av)
2D DFT-en



Svart og hvitt indikerer hhv. 0 og $MN/2$.
Merk at senterpikselen er $(0,0)$ -frekvensen.
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

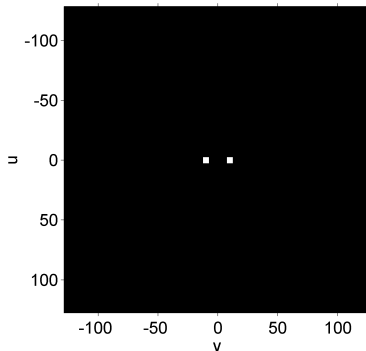
Eksempel II: 2D DFT av samplet 2D cosinus

Samplet 2D cosinus
med frekvens (0, 10)



Svart og hvitt indikerer hhv. -1 og 1.

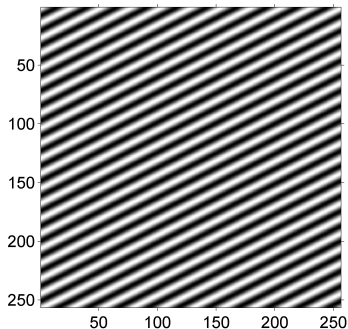
(Absoluttverdien av)
2D DFT-en



Svart og hvitt indikerer hhv. 0 og $MN/2$.
Merk at senterpikselen er (0,0)-frekvensen.
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

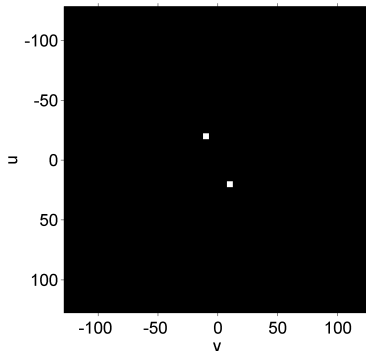
Eksempel III: 2D DFT av samplet 2D cosinus

Samplet 2D cosinus
med frekvens (20, 10)



Svart og hvitt indikerer hhv. -1 og 1.

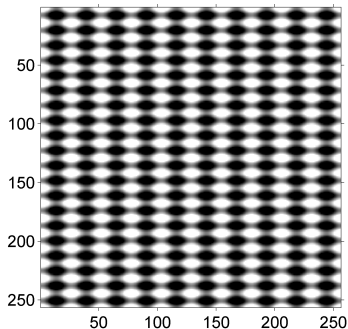
(Absoluttverdien av)
2D DFT-en



Svart og hvitt indikerer hhv. 0 og $MN/2$.
Merk at senterpikselen er (0,0)-frekvensen.
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

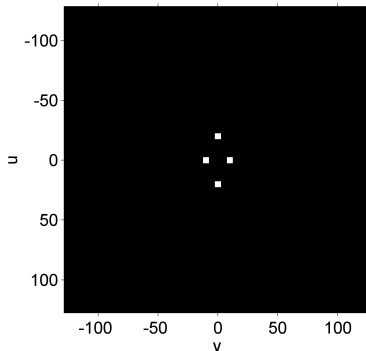
Eksempel IV: 2D DFT av summen av to cosinuser

cosinus med $(20, 0)$ +
cosinus med $(0, 10)$



Svart og hvitt indikerer hhv. -2 og 2.

(Absoluttverdien av)
2D DFT-en



Svart og hvitt indikerer hhv. 0 og $MN/2$.
Merk at senterpikselen er $(0,0)$ -frekvensen.
De hvite pikslene er forstørret for fremvisning.

Oppsummering

- ▶ 2D DFT av bildet $f \in \mathbb{R}^{M,N}$ er koordinatene til f mhp.
 $A = \{A_{u,v} : u = 0, 1, \dots, M-1 \wedge v = 0, 1, \dots, N-1\}$,
der:

$$A_{u,v} := \frac{1}{MN} \begin{bmatrix} e^{j2\pi\left(\frac{u \cdot 0}{M} + \frac{v \cdot 0}{N}\right)} & \dots & e^{j2\pi\left(\frac{u \cdot 0}{M} + \frac{v(N-1)}{N}\right)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi\left(\frac{u(M-1)}{M} + \frac{v \cdot 0}{N}\right)} & \dots & e^{j2\pi\left(\frac{u(M-1)}{M} + \frac{v(N-1)}{N}\right)} \end{bmatrix}$$

- ▶ A er en ortogonal basis for $\mathbb{C}^{M,N}$.
- ▶ 2D DFT av en sinus eller cosinus med frekvens (u, v) er kun ulik 0 i (u, v) og $(-u, -v)$.