INF2310 – Digital bildebehandling

FORELESNING 6

FILTRERING I BILDEDOMENET – I

Fritz Albregtsen

Naboskaps-operasjoner
Konvolusjon og korrelasjon
Lavpassfiltrering og kant-bevaring

G&W: 2.6.2 «Linear versus Nonlinear Operations»
3.1 «Background», 3.4 «Fundamentals of Spatial Filtering»,
3.5 «Smoothing (Lowpass) Spatial Filters»,
deler av 5.3 «Restoration in the Presence of Noise Only – Spatial Filtering» og «Matching by correlation» i 12.2

Filtrering

- Et generelt verktøy for behandling av digitale bilder.
- Av de mest brukte operasjonene i bildebehandling.
- Brukes ofte som et ledd i bl.a.:
  - Bildeforbedring
  - Bildeanalyse (spesielt i pre-prosesseringen)
- … til bl.a. å:
  - Fjerne/redusere støy
  - «Forbedre» skarpheten
  - Detektere kanter

Romlig filtrering

Filteret er definert av en matrise, f.eks.:

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

3x3-middelverdifilter

Matrisens størrelse og filterkoeffisientene bestemmer resultatet av filtreringen.

Generell romlig filtrering

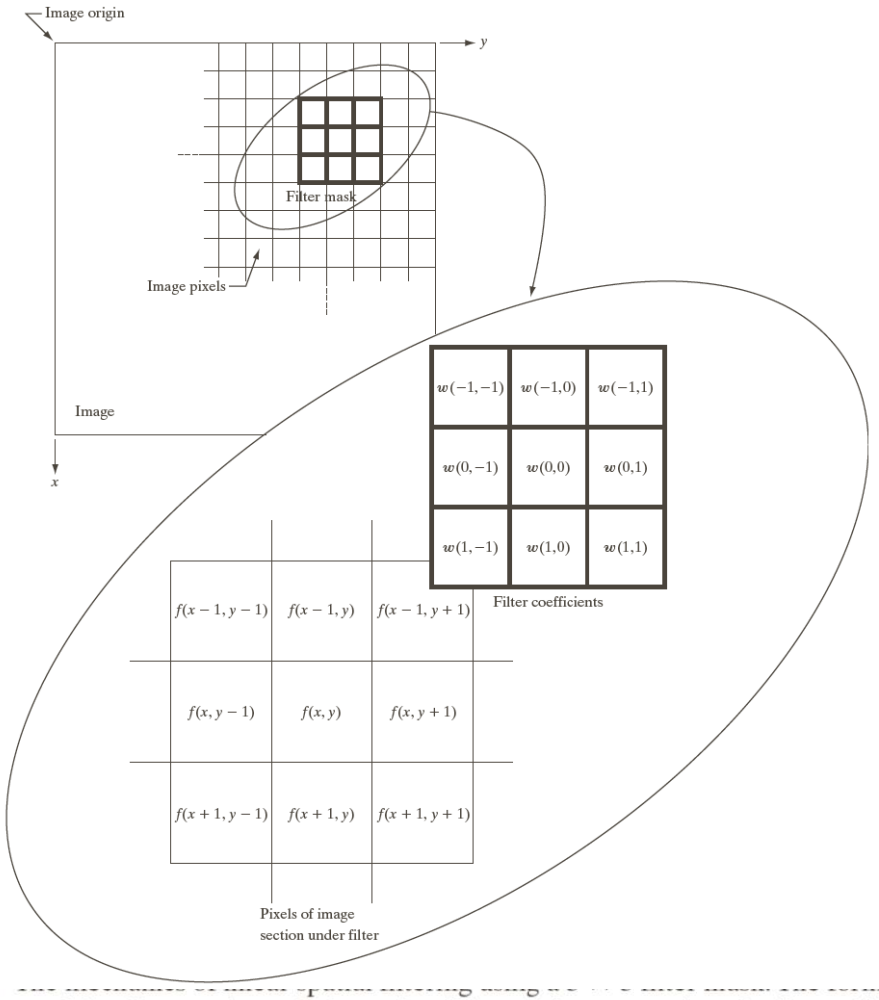


FIGURE 3. chosen to denote the coordinates of the filter mask coefficients simplifies writing expressions for linear filtering.

Filteret har gjerne oddetalls størrelse.

Filterets origo er i filterets senter.

Filtrering I: Konvolusjon

Oppgave: Konvolver følgende filter og bilde:

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

3x3-middelverdifilter

1	3	2	1
5	4	5	3
4	1	1	2
2	3	2	6

Inn-bilde f

Anta at bildet er 0 utenfor det definerte 4x4-området.

Konvolusjonseksempel

Steg 1: Roter filteret 180 grader.

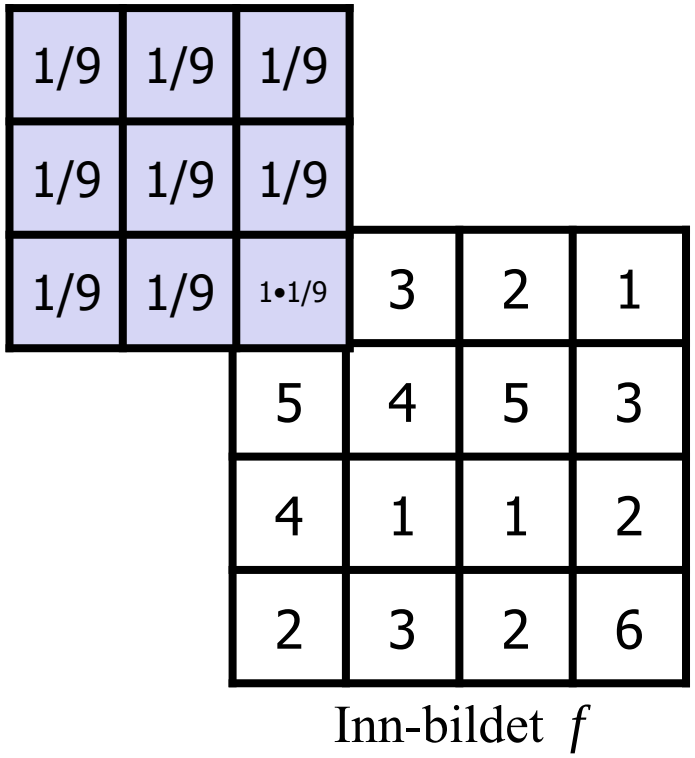
Ikke nødvendig her ettersom filteret er symmetrisk.

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

3x3-middelverdifilteret
er symmetrisk

Konvolusjonseksempel

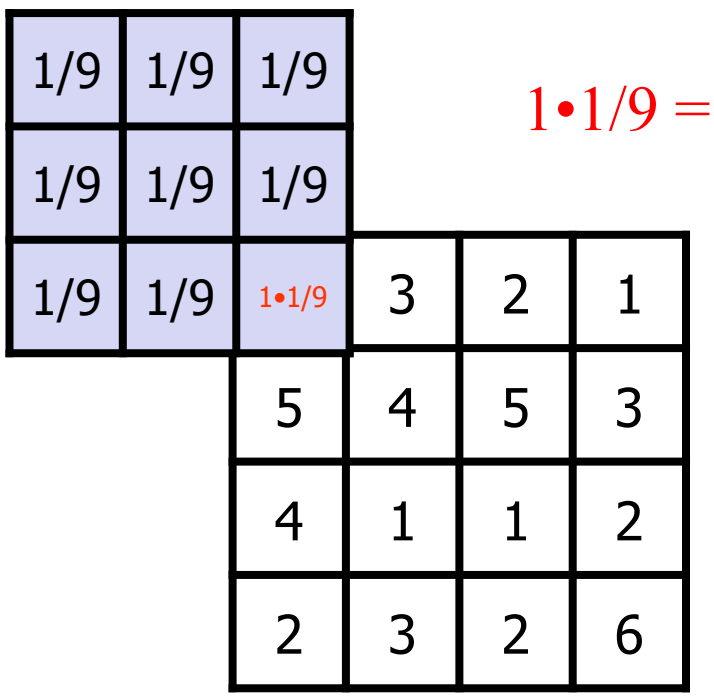
Steg 2: Legg det roterte filteret over først posisjon der filteret og bildet overlapper.



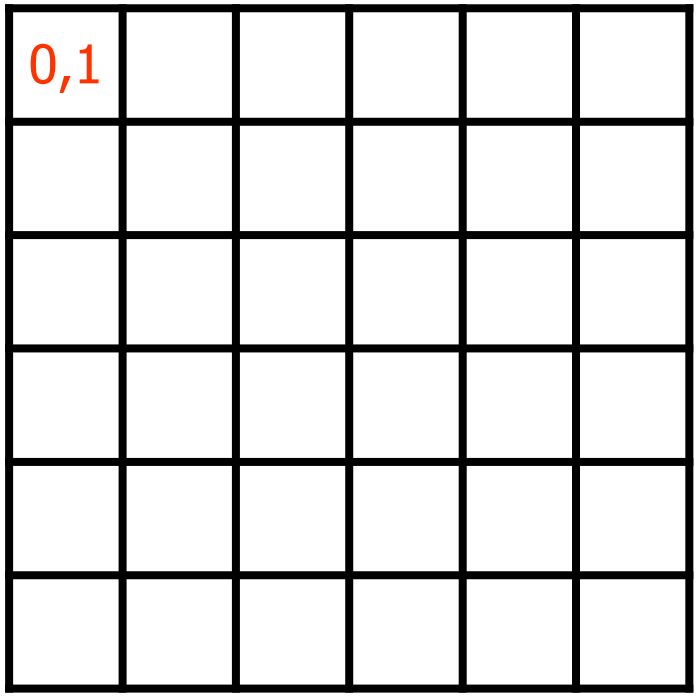
Inn-bildet f

Konvolusjonseksempel

Steg 3: Multipliser filterets vekter med verdiene av de overlappende pikslene i bildet.
Responsen er summen av produktene.



$1 \bullet 1/9 = 1/9 \approx 0{,}1$



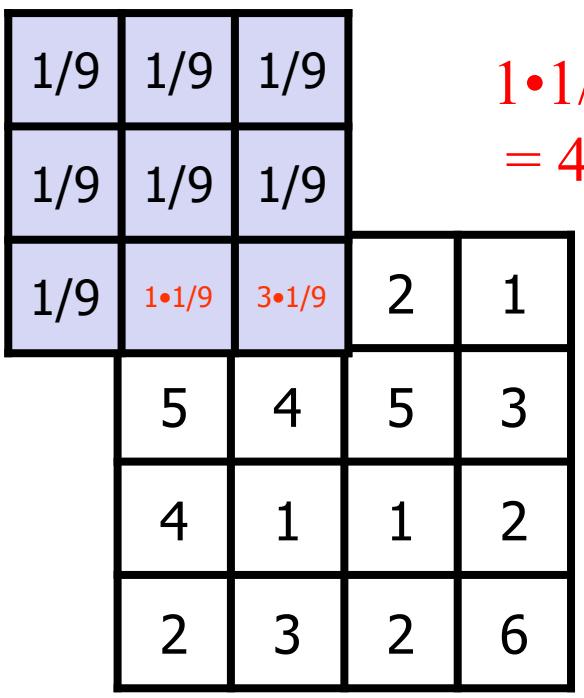
Inn-bildet f

Foreløpig ut-bilde g

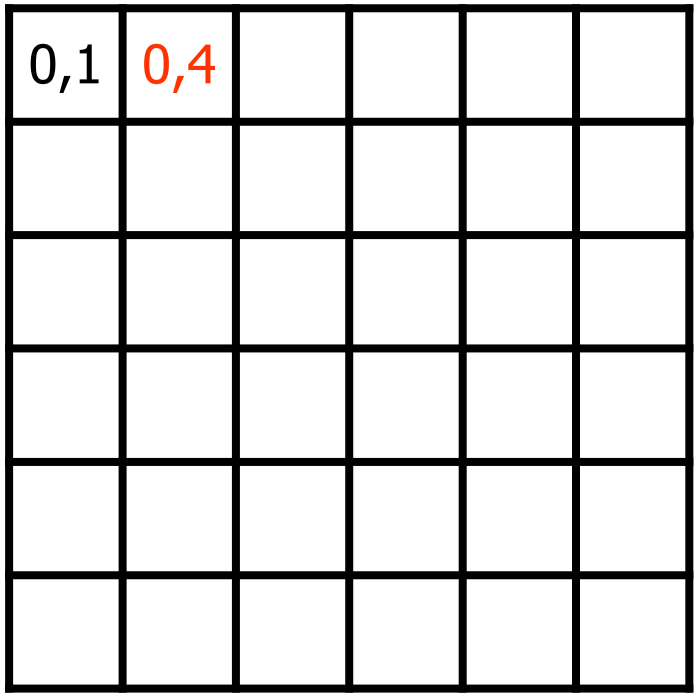
Konvolusjonseksempel

Steg 4: Gjenta 3 for neste overlapp. Ikke flere: ferdig!

Steg 3: Multipliser filterets vekter med verdiene av de overlappende pikslene i bildet og summer.



$1 \cdot 1/9 + 3 \cdot 1/9 = 4/9 \approx 0{,}4$



Inn-bildet f

Foreløpig ut-bilde g

Konvolusjonseksempel

… fjorten steg 3 senere:

Steg 3: Multipliser filterets vekter med verdiene av de overlappende pikslene i bildet og summer.

$3 \cdot 1/9 + 2 \cdot 1/9 + 1 \cdot 1/9 + 4 \cdot 1/9 + 5 \cdot 1/9 + 3 \cdot 1/9 + 1 \cdot 1/9 + 1 \cdot 1/9 + 2 \cdot 1/9 = 22/9 \approx 2,4$

1	3•1/9	2•1/9	1•1/9
5	4•1/9	5•1/9	3•1/9
4	1•1/9	1•1/9	2•1/9
2	3	2	6

Inn-bildet f

0,1	0,4	0,7	0,7	0,3	0,1
0,7	1,4	2,2	2,0	1,2	0,4
1,1	2,0	2,9	2,4		

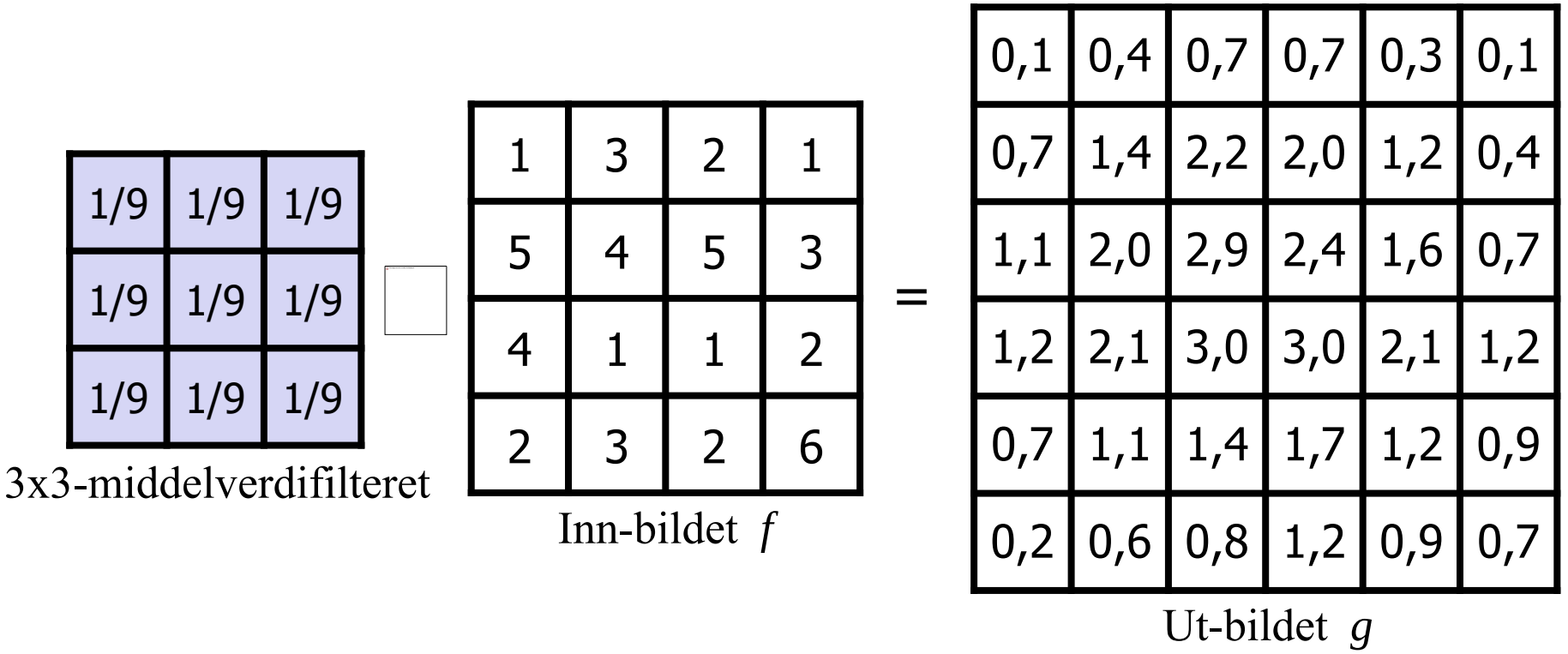
Foreløpig ut-bilde g

Konvolusjonseksempel

… og etter tjue steg 3 til:

Steg 4: Gjenta 3 for neste overlapp. Ikke flere: **ferdig**!

Løsningen er:



Konvolusjon; notasjon

- Konvolusjon av et filter *h* og et bilde *f* er:

$$(h * f)(x,y) = \sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b} h(s,t) f(x-s, y-t)$$

$$= \sum_{s=x-a}^{x+a}\sum_{t=y-b}^{y+b} h(x-s, y-t) f(s,t)$$

  evaluert for alle *(x,y)* slik at hver verdi av *h* overlapper hver verdi av *f*.

For å forenkle notasjonen, antar disse formlene at:
- *h* har odde lengder, $m = 2a+1$ og $n = 2b+1$.
- Senterpikselen er naboskapets origo.

Konvolusjon krever ikke disse antagelsene.

- Responsen i *(x,y)* er en **veiet sum av inn-bildets pikselverdier**.
  - Konvolusjon er en lineær operasjon på inn-bildets verdier.
    - Ikke noe konstantledd.

Beregne en konvolusjon

$$g(x,y) = \sum_{s=x-a}^{x+a} \sum_{t=y-b}^{y+b} h(x-s, y-t) f(s,t)$$

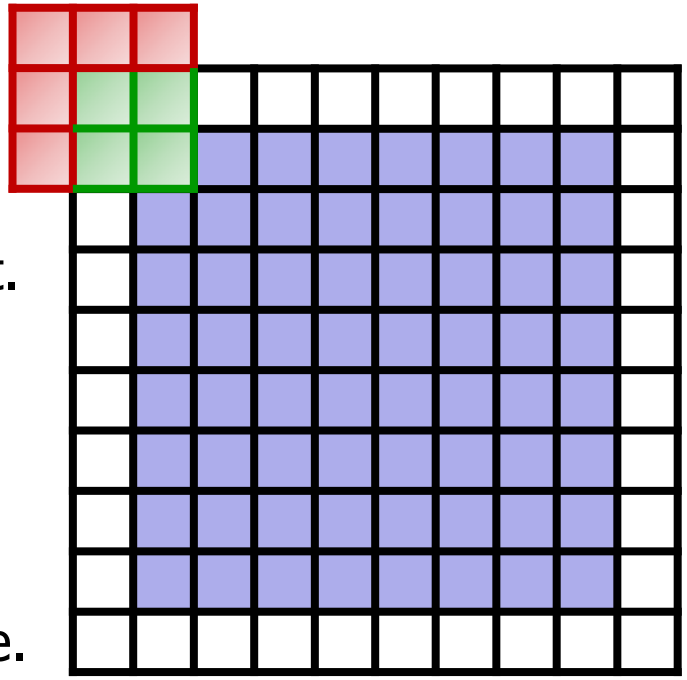
- For å regne ut responsen i posisjon (*x,y*):
  1. Roter konvolusjonsfilteret 180 grader.
     - Unødvendig dersom filteret er symmetrisk.
  2. Legg det roterte filteret over bildet slik at origo overlapper posisjon *(x,y)* i bildet.
  3. Multipliser hver vekt i det roterte konvolusjonsfilteret med underliggende pikselverdi.
  4. Summen av produktene gir responsen, *g(x,y)*.

- For å regne ut responsen i alle posisjoner:
  - Flytt konvolusjonsfilteret over bildet og beregn responsen for hver posisjon med overlapp.

Hvor stort skal ut-bildet være?

Alt.1. Trunkér ut-bildet og beregn pikselverdier bare der hele filteret er innenfor inn-bildet.

- Anta at bildet er M x N piksler og at filteret er m x n (og at m,n er odde)
- Uberørt av **bilderandproblemet**:
  (M-m+1)x(N-n+1)
  - 3x3-filter: (M-2)x(N-2)
  - 5x5-filter: (M-4)x(N-4)

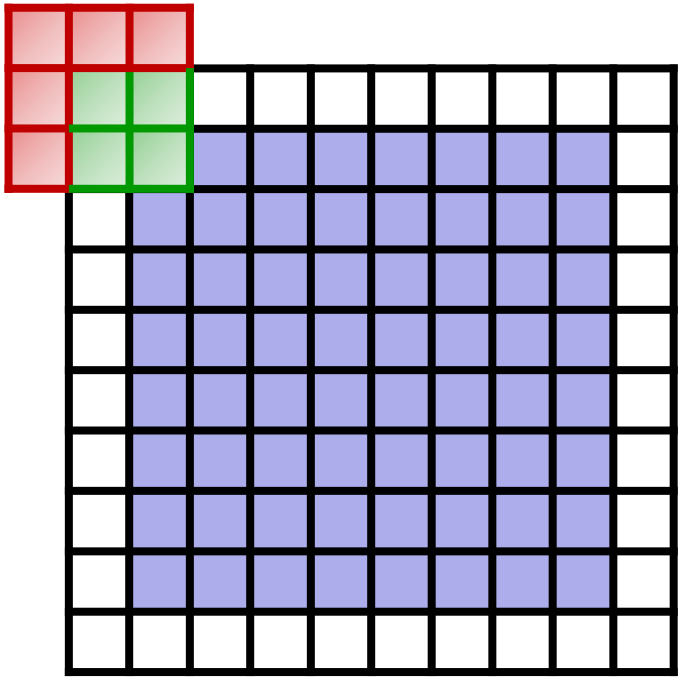


Alt.2. Behold inn-bildets størrelse

- Filterorigo er da innenfor inn-bildet.
- Vanlig når man filtrerer et bilde.
- Langs bilde-randen
  må vi gjøre en antagelse:
  - Enten utvide innbildet, eller
  - endre filterets form og størrelse.

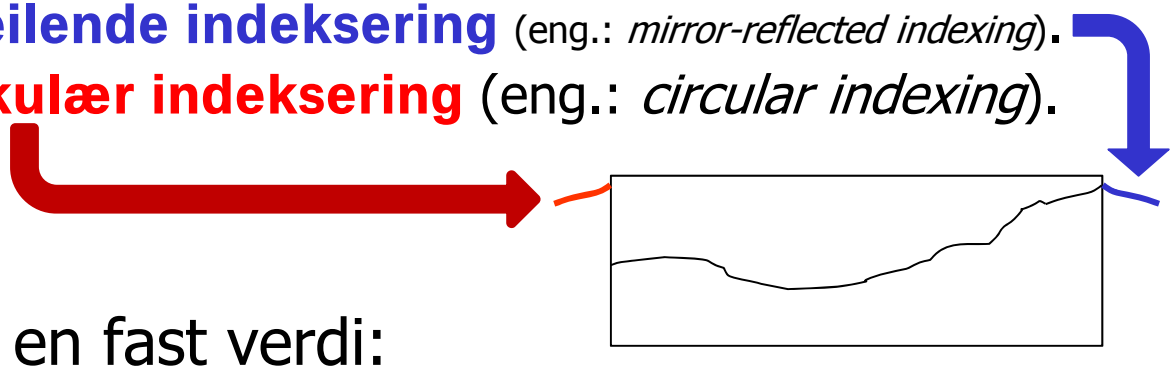
Praktiske problemer

- Får ut-bildet samme kvantifisering som inn-bildet?
- Kan vi direkte endre inn-bildet eller må vi mellomlagre resultatbildet?
- Hva gjør vi langs bilderanden?



Hva gjør vi langs bilderanden?

- Utvid inn-bildet:
  - **VANLIG**: Med 0-ere (nullutvidelse, eng.: *zero padding*).
  - Med en annen fast verdi, for eksempel bildets gjennomsnitt
  - Med nærmeste pikselverdi (eng.: *replicate*).
  - Ved bruk av **speilende indeksering** (eng.: *mirror-reflected indexing*).
  - Ved bruk av **sirkulær indeksering** (eng.: *circular indexing*).



- Sett ut-pikslet til en fast verdi:
  - F.eks. g(x,y) = 0 eller g(x,y) = f(x,y).

- Ignorer posisjonene uten overlapp.
  - Identisk resultat som for nullutvidelse (men mindre ut-bilde).

Større ut-bilde enn inn-bilde?

- Konvolusjons-definisjonen sier at ut-pikslet får en verdi når filteret og inn-bildet overlapper i minst én piksel.
- Ut-bildet blir da større enn inn-bildet.
  - Dersom filteret er større enn 1x1.
- I praksis: Kun vanlig når man konvolverer to filtre.
  - Antar da at begge konvolusjonsfiltrene er 0 utenfor randen.
    - Når man bruker et konvolusjonsfilter «antar» man indirekte alltid at det er 0 utenfor randen.
    - Når to filtre konvolveres bør begge bruke denne «antagelsen».

Egenskaper ved konvolusjon

- Kommutativ

$$f*g = g*f$$

- Assosiativ

$$(f*g)*h = f*(g*h)$$

- Distributiv

$$f*(g+h) = (f*g) + (f*h)$$

- Assosiativ ved skalar multiplikasjon

$$a(f*g) = (af)*g = f*(ag)$$

- Kan utnyttes i sammensatte konvolusjoner!

Merk: Disse egenskapene gjelder generelt bare når man antar **nullutvidelse**.

Filtrering II: Korrelasjon

$$g(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} h(s,t)\, f(x+s, y+t)$$

- Forskjell fra konvolusjon: **Pluss i stedet for minus**.
  - Det betyr at vi ikke skal rotere filteret!

- Legger korrelasjonsfilterets origo over *(x,y)* og multipliserer hver vekt med underliggende pikselverdi. Responsen i *(x,y)* er summen av disse produktene.

- Vi kan utføre korrelasjon som en konvolusjon ved å først roterer filteret 180 grader, og visa versa.

Mønstergjenkjenning

- Korrelasjon kan brukes til å gjenkjenne mønster (eng. *template matching*).
  - Filteret er mønsteret/templatet.
    - Enten forhåndsdefinert, f.eks. «idealbilde» av mønsteret,
    - Eller definert som en utsnitt av bildet vi skal filtrere.

- Normaliser med summen av pikselverdiene innenfor filterets naboskap:

$$g'(x,y) = \frac{g(x,y)}{\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b} f(x+s, y+t)}$$

  - Unngår høyere vekting av lyse piksler.

Mønstergjenkjennings-eksempel

- **Oppgave**: Finn et bestemt objekt i et bilde.

- Templaten må ha samme størrelse og orientering som objektet i bildet (og omtrent samme gråtoner).

Korrelasjonskoeffisient

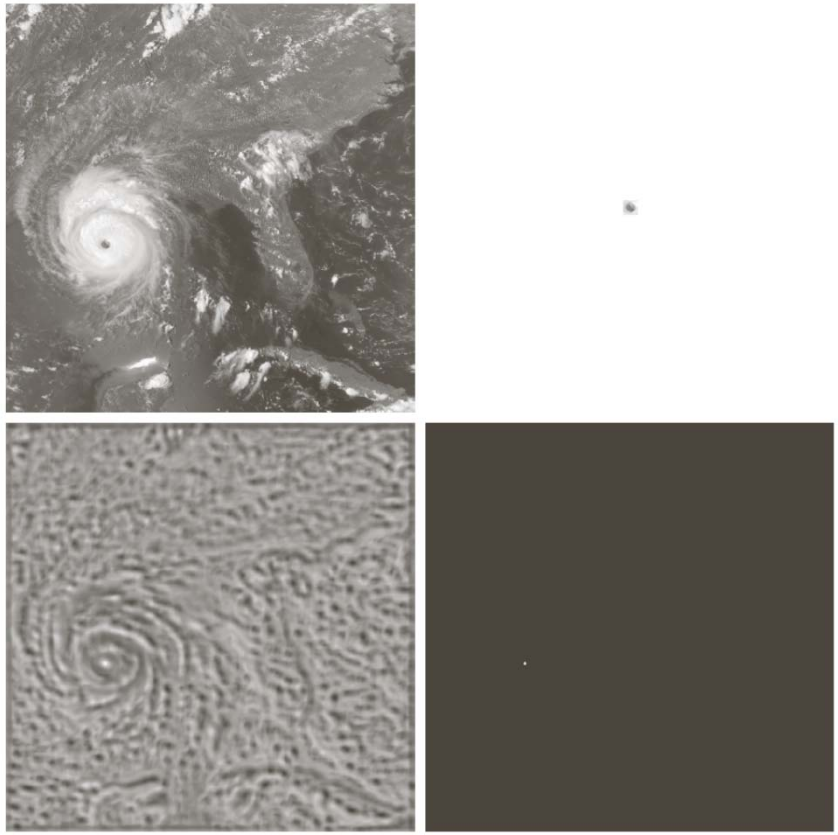
- Mønstergjenkjenning kan bedre gjøres ved bruk av *korrelasjonskoeffisienten*:

$$\gamma(x,y) = \frac{\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}(h(s,t)-\bar{h})(f(x+s,y+t)-\bar{f}(x,y))}{\sqrt{\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}(h(s,t)-\bar{h})^2 \sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}(f(x+s,y+t)-\bar{f}(x,y))^2}}$$

  - Telleren er en middelverdi-normalisert korrelasjon.
    - Templaten er normalisert med sin (globale) middelverdi.
    - Bildet er normalisert med middelverdien av bildeverdiene i pikslene der templaten og bildet overlapper (lokal middelverdi).
  - Nevneren normaliserer korrelasjonsresponsen slik at:
    - $\gamma(x,y)$ ikke påvirkes av variasjonen rundt $f(x,y)$.
    - $\gamma(x,y)$ er alltid i intervallet [-1, 1].

Deler derfor på:
•Bildets lokale standardavvik.
•Templatens standardavvik.

Korrelasjonskoeffisient-eksempel



a b
c d

FIGURE 12.9
(a) Satellite image of Hurricane Andrew, taken on August 24, 1992. (b) Template of the eye of the storm. (c) Correlation coefficient shown as an image (note the brightest point). (d) Location of the best match. This point is a single pixel, but its size was enlarged to make it easier to see. (Original image courtesy of NOAA.)

- **Q**: Hva hvis templatets størrelse og rotasjon er ukjent?
  - Må det gjøres regnekrevende?

Filtrering i bildedomenet

- Anvendelsen av en **operator** som beregner ut-bildets verdi i hver piksel *(x,y)* ved bruk av inn-bildets piksler i et **naboskap** rundt *(x,y)*.

$$g(x,y) = T(f(x,y))$$

g(x,y) angir ut-bildets verdi i *(x,y)* og *f(x,y)* angir inn-bildets piksler i et naboskap rundt *(x,y)*

Ut-bilde

Operator

Inn-bilde

1	3	2	1
5	4	5	3
4	1	1	2
2	3	2	6

Et inn-bilde *f*

Filtrering

(3x3-middelverdifilteret, speilende indeksering og bevart bildestørrelse)

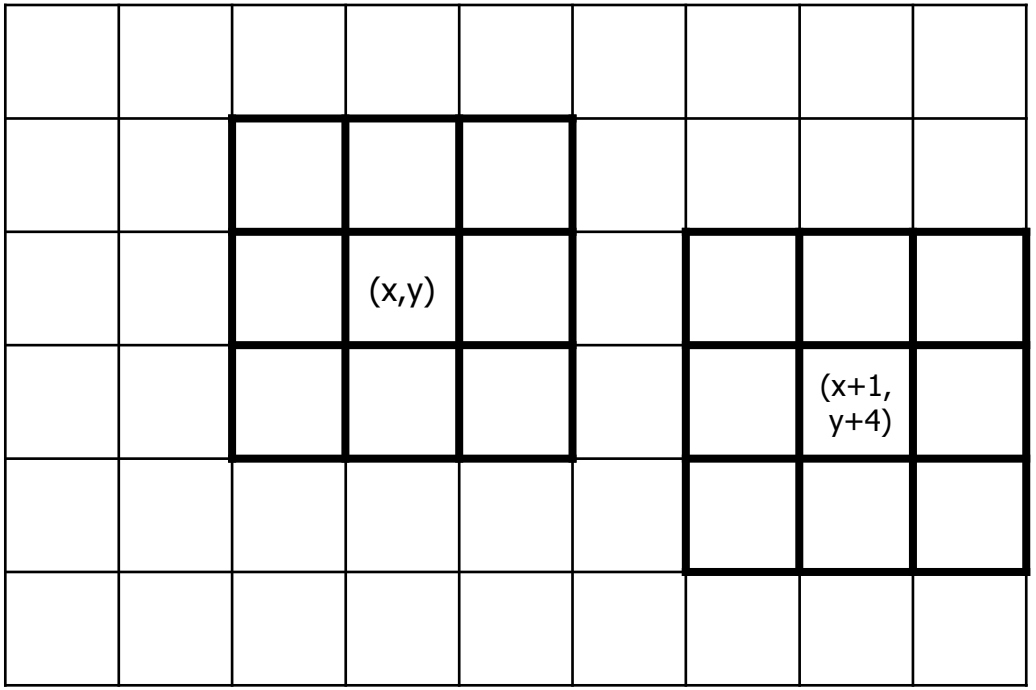
2,7	2,9	2,7	2,1
3,1	2,9	2,4	2,2
3,3	3,0	3,0	3,3
2,6	2,2	2,9	3,7

Ut-bildet *g*

Naboskap: Definisjon

- Filterets naboskap (eng.: *neighbourhood*) angir **pikslene rundt *(x,y)* i inn-bildet** som operatoren (potensielt) benytter.
  - Også kalt *omegn* og *omgivelse*.

- Eksempel: Et sentrert 3x3-naboskap rundt *(x,y)* og *(x+1,y+4)*:

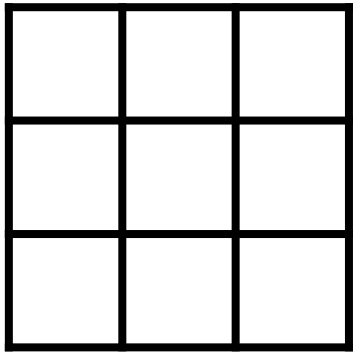


Naboskap: I praksis

- Kvadrater/rektangler er mest vanlig.
  - Av symmetrihensyn er bredden/høyden oftest odde.
    - Da er naboskapets senterpunkt i en piksel.
    - Når annet ikke er spesifisert så er senterpunktet naboskapets **origo**.
- Spesialtilfelle: Naboskapet er 1×1:
  - T er da en gråtonetransform; ny pikselverdi avhenger bare av den gamle pikselverdien i samme pikselposisjon *(x,y).*
  - Hvis T er lik over hele bildet, har vi en global operator.
- Hvis naboskapet er større enn 1×1, har vi en lokal operator (selv om T er posisjons-invariant).
  - Filtreringen kalles da en **naboskaps-operasjon** (eng. *neighbourhood processing technique*).

Naboskap + Operator = Filter

- Naboskap:
  - Angir de pikslene rundt *(x,y)* i inn-bildet som *T* opererer på.
- Operator:
  - Også kalt *transform* og *algoritme*.
  - Opererer på pikslene i et naboskap.
- Filter: Naboskap + Operator
  - Også kalt *maske* og *kjerne*.
    - og *vindu*, men vi vil bare bruker det om et (muligens ikke-rektangulært) delbilde.
  - Eksempel: Et konvolusjonsfilter, f.eks. → 3x3-middelverdifilter



3x3-naboskap

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

Filter-egenskap: Additivt?

$$T(f_1(x,y) + f_2(x,y)) = T(f_1(x,y)) + T(f_2(x,y))$$

$f_1(x,y) + f_2(x,y)$ angir bildet $f_1 + f_2$ sine piksler i et naboskap rundt (x,y) og burde derfor strengt tatt vært skrevet $(f_1 + f_2)(x,y)$

- T er operatoren.
- f_1 og f_2 er vilkårlige bilder.
- (x,y) er en vilkårlig piksel.

- Hva betyr dette:
  - Hvis vi skal addere to filtrerte bilder?

Filter-egenskap: Homogent?

$$T(af(x,y)) = aT(f(x,y))$$

- T er operatoren.
- a er en vilkårlig konstant.
- f er et vilkårlig bilde.
- (x,y) er en vilkårlig piksel.

- Hva betyr dette:
  - Hvis vi skalerer et bilde før filtrering?

Filter-egenskap: Lineært?

$$T(af_1(x,y)+bf_2(x,y)) = aT(f_1(x,y))+bT(f_2(x,y))$$

- T er operatoren.
- a og b er vilkårlige konstanter.
- f_1 og f_2 er vilkårlige bilder.
- (x,y) er en vilkårlig piksel.

- Additiv + Homogen = Lineær

Filter-egenskap: Posisjons-invariant?

$$T(f(x-l, y-m)) = g(x-l, y-m)$$

- T er operatoren.
- f er et vilkårlig bilde.
- (x,y) er en vilkårlig piksel.
- $g(x,y) = T(f(x,y))$ for alle (x,y).
- (l,m) er et vilkårlig posisjons-skift.

- Operatoren bruker ikke pikselposisjonene.
  - Ut-bildets verdi i (x,y) avhenger kun av inn-bildets **verdier** i naboskapet rundt (x,y), **ikke av posisjonene**.

Lavpassfiltre

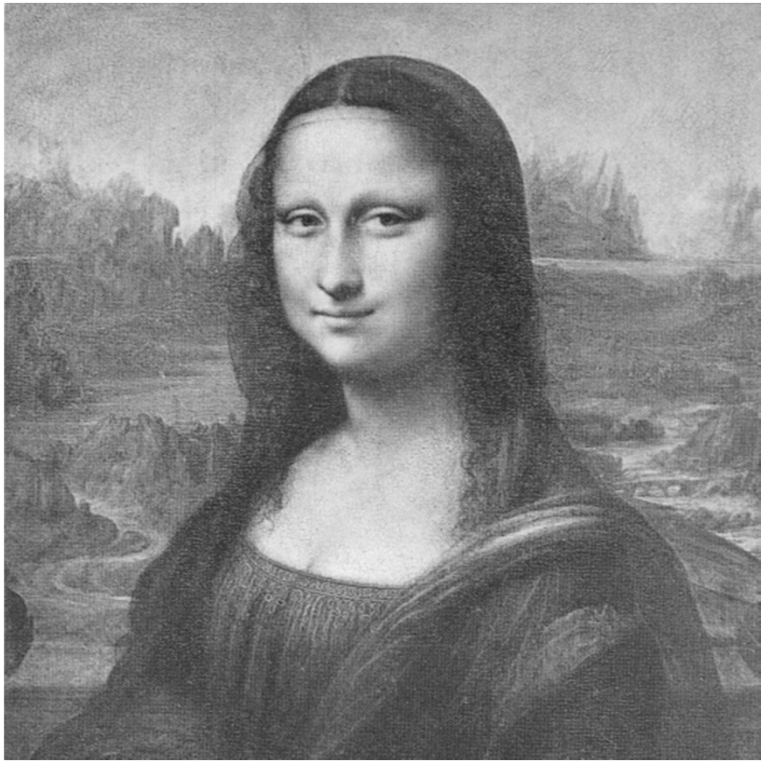
- Slipper gjennom lave frekvenser
  og demper eller fjerner høye frekvenser.
  - Lav frekvenser = trege variasjoner, store trender.
  - Høye frekvenser = skarpe kanter, støy, detaljer.
  - … mye mer om frekvens i Fourier-forelesningene.
- Effekt: Glatting/utsmøring/«blurring» av bildet.
- Typiske mål: Fjerne støy, finne større objekter.
- Utfordring: Vi vil gjerne bevare kanter!

Middelverdifilter (lavpass)

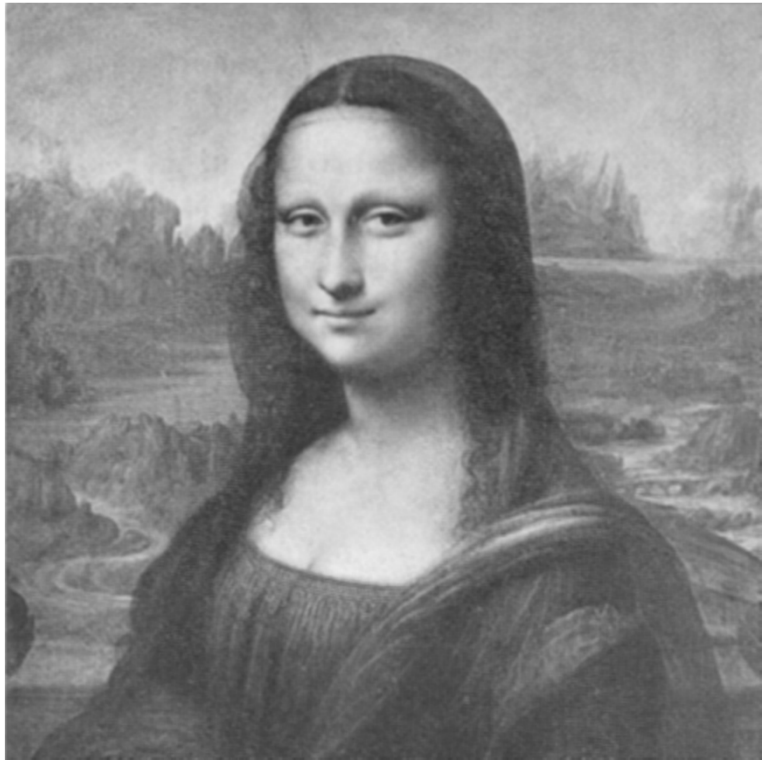
- Beregner middelverdien i naboskapet.
  - Alle vektene er like.
  - Vektene summerer seg til 1.
    - Gjør at den lokale middelverdien bevares.
- Størrelsen på filteret avgjør graden av glatting.
  - Stort filter: mye glatting (utsmørt bilde).
  - Lite filter: lite glatting, men kanter bevares bedre.

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad \frac{1}{25}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad \frac{1}{49}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Middelverdifilter-eksempel



Original



Filtrert med
3x3-middelverdifilteret

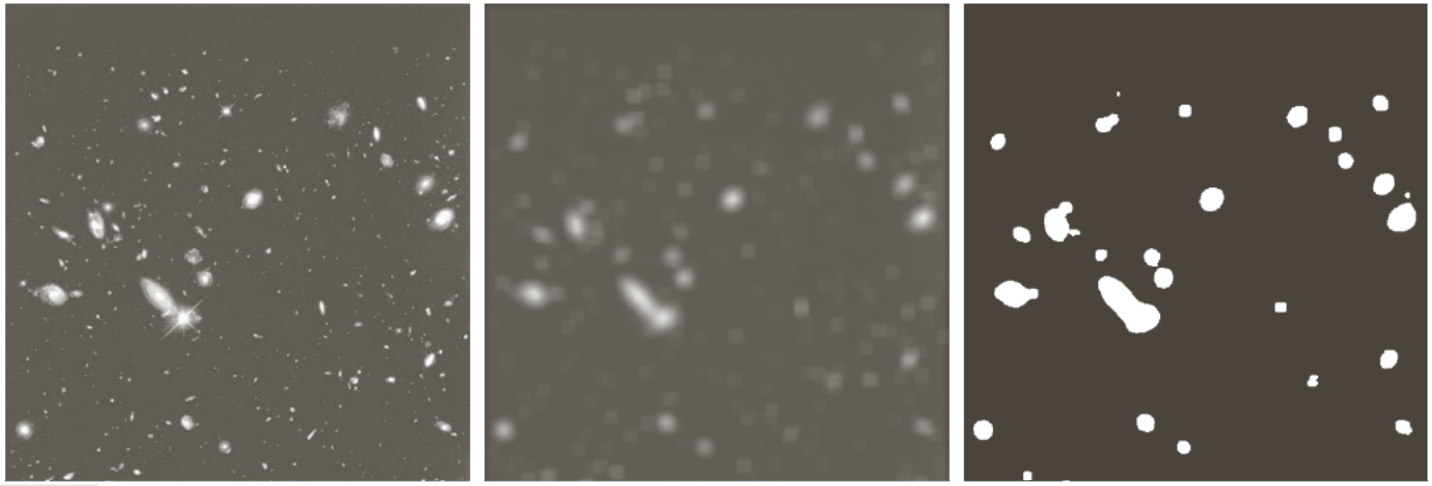
Middelverdifilter-eksempel

Filtrert med
9x9-middelverdifilteret

Filtrert med
25x25-middelverdifilteret

Middelverdifilter-eksempel

- **Oppgave**: Finne store objekter.
  - I denne oppgaven er objektpikslene lyse.
- **Løsning**: 15x15-middelverdifiltrering + terskling.
  - Filterstørrelsen relaterer seg til hva man legger i «store».



a b c

FIGURE 3.34 (a) Image of size 528 × 485 pixels from the Hubble Space Telescope. (b) Image filtered with a 15 × 15 averaging mask. (c) Result of thresholding (b). (Original image courtesy of NASA.)

Separable filtre

- Et filter kalles separabelt hvis **filtreringen kan utføres som to sekvensielle 1D-filtreringer**.
- Fordel: **Raskere filtrering**.
- Geometrisk form: Rektangel (inkludert kvadrat).
- Middelverdifiltre er separable: For 5x5-naboskap:

$$h(i,j) = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Beregne én respons for $n \times n$-konvolusjonsfiltre:
  - 2D-konvolusjon: n^2 multiplikasjoner og n^2-1 addisjoner.
  - To 1D-konvolusjoner: $2n$ multiplikasjoner og $2(n-1)$ addisjoner.

Tidsbesparelse ved separasjon

- Vanlig 2D-konvolusjon:
  n^2 multiplikasjoner og n^2-1 addisjoner.

- To 1D-konvolusjoner:
  $2n$ multiplikasjoner og $2(n-1)$ addisjoner.

- Andel spart tid ved separasjon av $n \times n$ -konvolusjonsfilter:

n	Δ	Δ'
3	0,41	0,33
5	0,63	0,60
7	0,73	0,71
9	0,79	0,78
11	0,83	0,82
13	0,85	0,85
15	0,87	0,87

$$\Delta = \frac{2n^2 - 1 - (2n + 2(n-1))}{2n^2 - 1} = 1 - \frac{4n-2}{2n^2-1} \overset{n \text{ stor}}{\approx} 1 - \frac{2}{n} = \Delta'$$

Konvolusjon ved oppdatering

- Konvolusjonsfiltre med identisk kolonner *eller* rader kan effektivt implementeres ved oppdatering:
  1. Beregn responsen R for første piksel, (x,y).
  2. Beregn responsen i neste piksel R_{ny} med utgangspunkt i R:
     - For identisk kolonner: Neste piksel er én til høyre, $(x,y+1)$, og ny respons er gitt ved:
       $$R_{ny} = R - C_1 + C_n$$
       der C_1 er «responsen» for først kolonne når plassert i (x,y), og C_n er «responsen» for siste kolonne når plassert i $(x,y+1)$.
     - For identiske rader: Neste piksel er én ned, $(x+1,y)$, og ny respons er gitt ved:
       $$R_{ny} = R - R_1 + R_n$$
       der R_1 er «responsen» for først rad når plassert i (x,y), og R_n er «responsen» for siste rad når plassert i $(x+1,y)$.
  3. La neste piksel være (x,y) og R_{ny} være R. Gjenta steg 2.

Konvolusjon ved oppdatering

- C_1, C_n, R_1 eller R_n beregnes ved n multiplikasjoner og $n-1$ addisjoner.
  - Tar totalt $2n$ multiplikasjoner og $2n$ addisjoner å finne R_{ny}.
- Like raskt som separabilitet.
  - Sett bort fra initieringen; finne R for hver ny rad eller kolonne.
  - Alle «oppdaterbare» konvolusjonsfiltre er separable, men separable konvolusjonsfiltre må ikke være oppdaterbare.
  - Kan kombineres med separabilitet når et 1D-filter er uniformt.
- Uniforme filtre kan implementeres enda raskere.
  - Sett bort fra initiering (finne en kumulativ matrise) så kan hver respons beregnes ved 2 subtraksjoner og 1 addisjon!
  - Kun skaleringer av middelverdifiltre er uniforme filtre.

Gauss-filter (lavpass)

- For heltallsverdier av x og y, la:

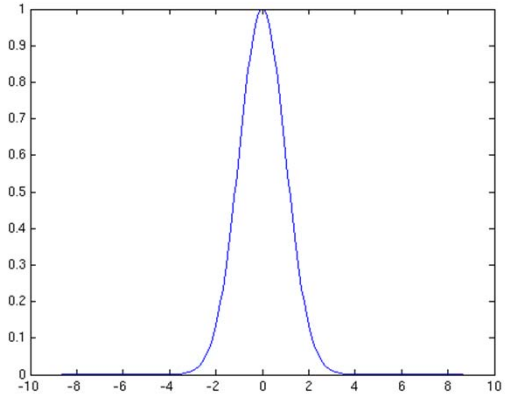
$$h(x,y) = A\exp\left(-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{2\sigma^2}\right)$$

  - A settes slik at summen av vektene blir 1.
  - $N(0,\sigma^2 I_2)$ med alternativ skalering A.

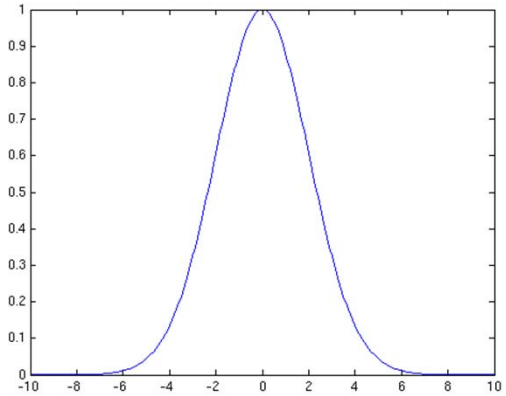
- **Ikke-uniformt lavpassfilter**.

- Parameteren σ er standardavviket og avgjør graden av glatting.
  - Lite σ => lite glatting.
  - Stort σ => mye glatting.

- Filterstørrelsen $n \times n$ må tilpasses σ.
  - Et Gauss-filter glatter *mindre* enn et middelverdifilter av samme størrelse.



$\sigma = 1$



$\sigma = 2$

Approksimasjon av 3x3-Gauss-filter

$$G_{3\times3} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 4 & 2\\1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

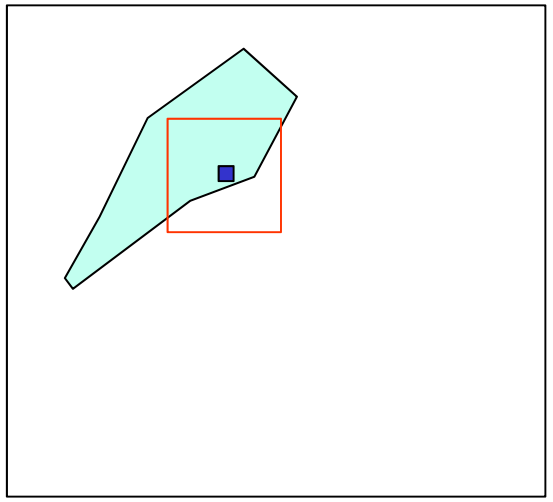
$$= \frac{1}{16}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

Tilsvarer en **geometrisk vekting**:

- Vekten til en piksel er en funksjon av avstanden til *(x,y)*.
- Nære piksler er mer relevante og gis derfor større vekt.

Kant-bevarende støyfiltrering

- Ofte lavpassfiltrerer vi for å **fjerne støy**, men ønsker samtidig å **bevare kanter**.
- Det finnes et utall av «kantbevarende» filtre.
- Men det er et system:
  - Anta at vi har to piksel-populasjoner i naboskapet rundt *(x,y)*, f.eks. slik: →
  - Sub-optimalt å bruke hele naboskapet.



- Vi kan lage filtre som sorterer pikslene:
  - Radiometrisk (etter pikselverdi)
  - Både geometrisk (etter pikselposisjon) og radiometrisk

Rang-filtrering

- Vi lager en én-dimensjonal liste av alle pikselverdiene i naboskapet rundt *(x,y)*.
- Listen sorteres i stigende rekkefølge.
- Responsen i *(x,y)* er pikselverdien i en bestemt posisjon i den sorterte listen, eller en veiet sum av en del av listen.
- Dette er et ikke-lineært filter.

Median-filter (lavpass)

- *g(x,y)* = median pikselverdi i naboskapet rundt *(x,y)*.
- Median = den midterste verdien i den sorterte listen.
  - Medianfilteret er et rangfilter der vi velger midterste posisjon i den sorterte 1D-listen.
- Et av de mest brukte kant-bevarende støyfiltrene.
- Spesielt god mot impuls-støy («salt-og-pepper-støy»).
- Ikke uvanlig med ikke-rektangulære naboskap, f.eks. +
- Problemer:
  - Tynne linjer kan forsvinne.
  - Hjørner kan rundes av.
  - Objekter kan bli litt mindre.
- Valg av størrelse og form på naboskapet er viktig!

Middelverdi eller median?

Inn-bilde med tydelig salt-og-pepper-støy

Etter middelverdifiltrering

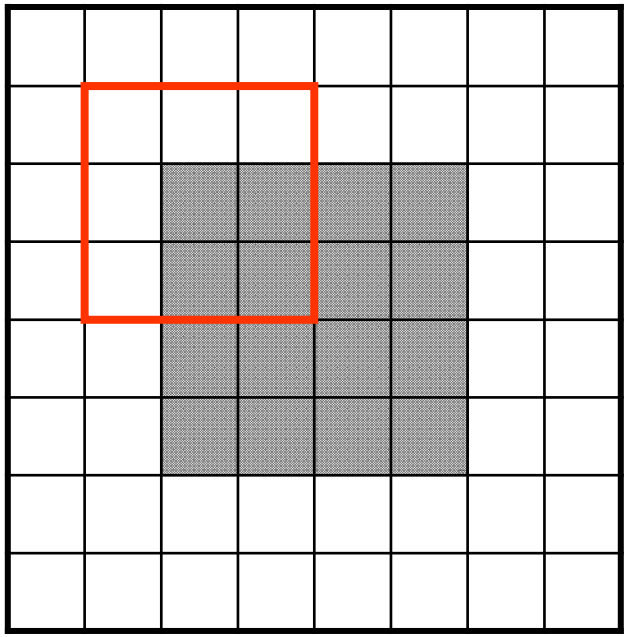
Etter medianfiltrering

Middelverdi eller median?

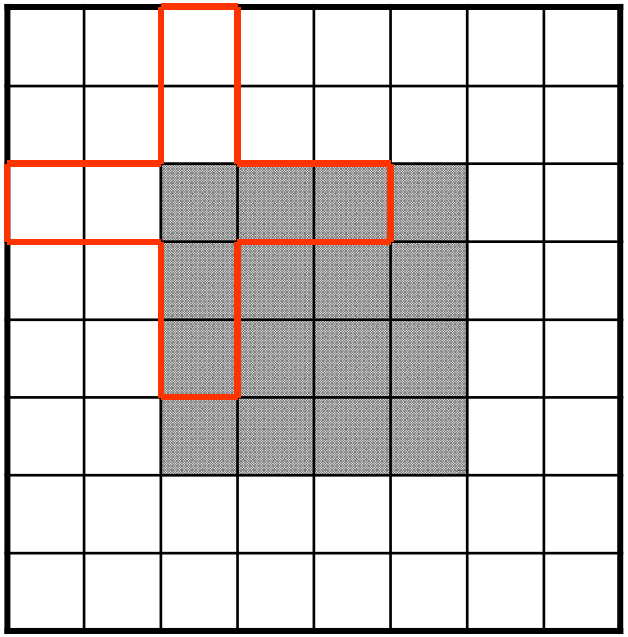
- Middelverdifilter: Middelverdien innenfor naboskapet.
  - Glatter lokale variasjoner og støy, men også kanter.
  - Spesielt god på lokale variasjoner,
    som kan være mild støy i mange pikselverdier.

- Medianfilter: Medianen innenfor naboskapet.
  - Bedre på visse typer støy og til å bevare kanter,
    men dårligere på lokal variasjon og annen type støy.
  - Fungerer spesielt godt på salt-og-pepper-støy.

Medianfiltrering og hjørner



Med kvadratisk naboskap
avrundes hjørnene



Med pluss-formet naboskap
bevares hjørnene

Raskere medianfiltrering (kursorisk)

- Å sortere pikselverdiene innenfor naboskapet er regnetungt, $\sim O(N^2)$.
- Med bit-logikk kan medianen av N verdier finnes i $O(N)$.
  - Avhenger også av antall biter i representasjonen av en verdi.
  - For n xn -naboskap er $N = n^2$.
  - P.E. Danielsson: "Getting the median faster", CVGIP 17, 71-78, 1981.
- **Oppdater histogrammet** av pikselverdiene i naboskapet for hver ny inn-piksel-posisjon (x,y) gir $O(n)$ for nxn -naboskap.
  - Avhenger også av antall mulige pikselverdier *eller* middelverdien av absolutt-differansen mellom horisontale (eller vertikale) nabopiksler i det filtrerte bildet.
  - Huang, Yang, and Tang: "A fast two-dimensional median filtering algorithm", IEEE TASSP 27(1), 13-18, 1979.
- Oppdater histogrammet ved bruk av oppdatert kolonnehistogram (gjenbruker lik informasjon fra forrige rad) gir $O(1)$.
  - Må avhenge av antall mulige pikselverdier.
  - Finnes i OpenCV programbibliotek http://nomis80.org/ctmf.html).
  - Perreault and Hébert: "Median filtering in constant time", IEEE TIP 16(9), 2389-2394, 2007.

Trimmet middelverdifilter (lavpass)

- *g(x,y)* = middelverdien av de *mn-d* midterste verdiene (etter sortering) i *m*x*n* -naboskapet rundt *(x,y)*:

$$g(x,y) = \frac{1}{mn-d} \sum_{(s,t)\in S_{x,y}} f(s,t)$$

der $S_{x,y}$ angir pikselposisjonene til de *mn-d* midterste pikselverdiene etter sortering.

- God egnet ved **flere typer støy**, f.eks. salt-og-pepper-støy og lokale variasjoner.

- **Q**: Hva hvis d=0? Eller d=mn-1?

K Nearest Neighbour-filter (lavpass)

- *g(x,y)* = middelverdien av de *K* pikslene i naboskapet rundt *(x,y)* som ligner mest på *(x,y)* i pikselverdi.
  - «Ligner mest» = Lavest absoluttdifferanse.

- Er et trimmet middelverdifilter:
  Middelverdien av de *K* mest like nabopikslene.

- Problem: *K* er konstant for hele bildet.
  - Hvis vi velger for liten *K*, fjerner vi lite støy.
  - Hvis vi velger for stor *K* fjernes linjer og hjørner.

For $n \times n$ -naboskap der $n=2a+1$:
- K=1: ingen effekt
- K≤n: bevarer tynne linjer
- $K \leq (a+1)^2$: bevarer hjørner
- K≤(a+1)n: bevarer rette kanter

K Nearest Connected Neighbour-filter (lavpass)

- Naboskapet er hele bildet!
- Responsen i *(x,y)* beregnes slik:
  - Valgt piksel = (x,y)
  - Liste = <tom>
  - While # valgte piksler < K
    - Tilføy (4- eller 8-)naboene til sist valgt piksel i listen.
      - Ikke tilføy piksler som allerede finnes i listen.
    - Sorter listen på pikselverdi.
    - Velg pikselen i listen som er mest lik (x,y) og fjern den fra listen.
  - Beregn middelverdien av de *K* valgte pikslene.
- Tynne linjer, hjørner og kanter blir bevart dersom *K* er mindre eller lik antall piksler i objektet.

MinimalMeanSquareError (MMSE) (lavpass)

- Merk: For et naboskap rundt *(x,y)* kan vi beregne lokal varians $\sigma^2(x,y)$ og lokal middelverdi $\mu(x,y)$
  => bestem en vindus-størrelse wxw
- Anta at vi har et estimat på støy-variansen, σ_η^2
- MMSE-responsen i *(x,y)* er da:

$$g(x,y) = f(x,y) - \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma^2(x,y)}\left(f(x,y) - \mu(x,y)\right)$$

  – Hvis $\sigma_\eta^2 > \sigma^2$ så settes $g(x,y) = \mu(x,y)$.
- I «homogene» områder blir responsen nær $\mu(x,y)$.
- Nær en kant vil $\sigma^2(x,y)$ være større enn σ_η^2 og resultatet blir nær $f(x,y)$.

Sigma-filter (lavpass) (kursorisk)

- *g(x,y)* = middelverdien av de pikslene i naboskapet rundt *(x,y)* som har pikselverdi i intervallet $f(x,y) \pm t\,\sigma$
  - t er en parameter og σ er estimert i «homogene» områder i bildet, f.eks. som en lav persentil av alle lokale standardavvik (beregnet rundt hver piksel ved bruk av det aktuelle naboskapet).

$$g(x,y) = \frac{\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b} h_{x,y}(s,t)\, f(x+s,y+t)}{\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b} h_{x,y}(s,t)}, \qquad h_{x,y}(s,t) = \begin{cases} 1 \text{ hvis } \left| f(x,y) - f(x+s,y+t) \right| \le t\sigma \\ 0 \text{ ellers} \end{cases}$$

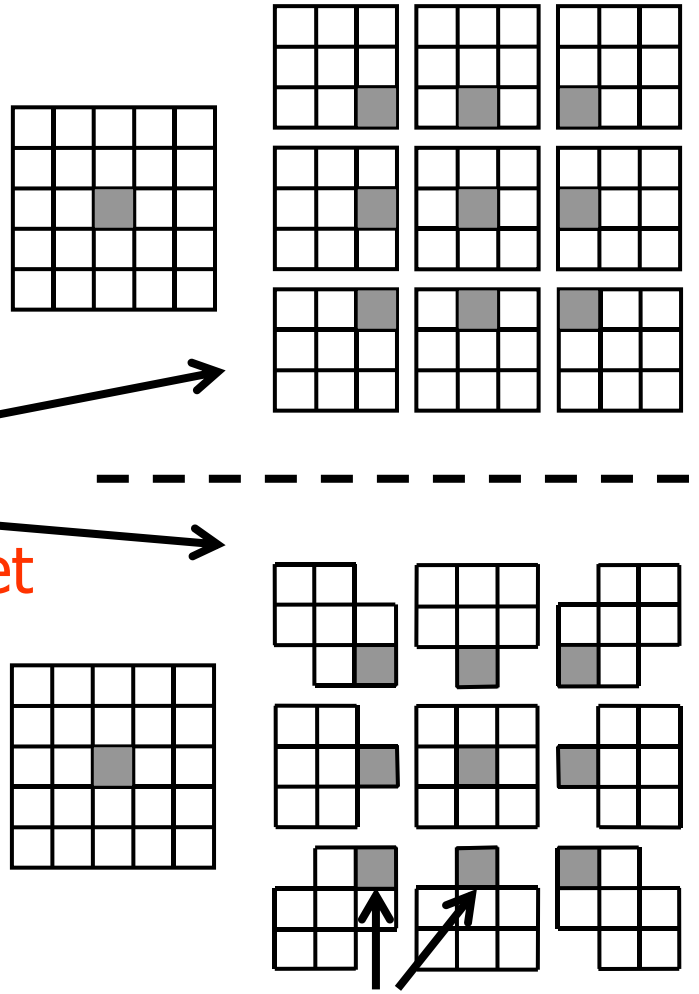
- Alternativt: Erstatte σ med **lokal** *median absolute deviation* (MAD):

$$\mathrm{MAD}_{x,y} = \underset{s\in[-a,a],t\in[-b,b]}{\mathrm{median}} \left(\left| f(x+s,y+t) - \underset{u\in[-a,a],v\in[-b,b]}{\mathrm{median}} \left(f(x+u,y+v) \right) \right| \right)$$

  - Dette filteret kalles *MAD trimmed mean* (MADTM).
- Problem: Ingen av disse filtrene fjerner isolerte støy-piksler.

Max-homogenitet (lavpass)

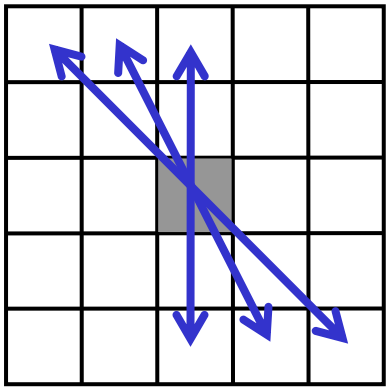
- Ønsker kantbevarende filter.
- ***Et enkelt triks:***
- Del opp naboskapet i flere, overlappende sub-naboskap.
  - Alle inneholder senterpikselen.
  - Flere mulige oppdelinger.
- Det mest homogene sub-naboskapet inneholder minst kanter.
  - Beregn μ og σ i hvert sub-naboskap.
  - La $g(x,y)$ være μ fra det sub-naboskapet som gir lavest σ.
  - Alternativ: |max-min| istedetfor σ.



Merk: Sub-naboskapets origo er ikke sub-naboskapets senterpiksel.

Symmetrisk nærmeste nabo (SNN) (lavpass)

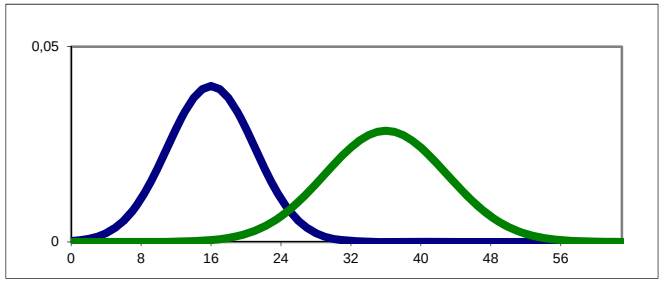
- For hvert symmetrisk piksel-par i naboskapet rundt *(x,y)*:
  - Velg den pikselen som ligner mest på *(x,y)* i pikselverdi.



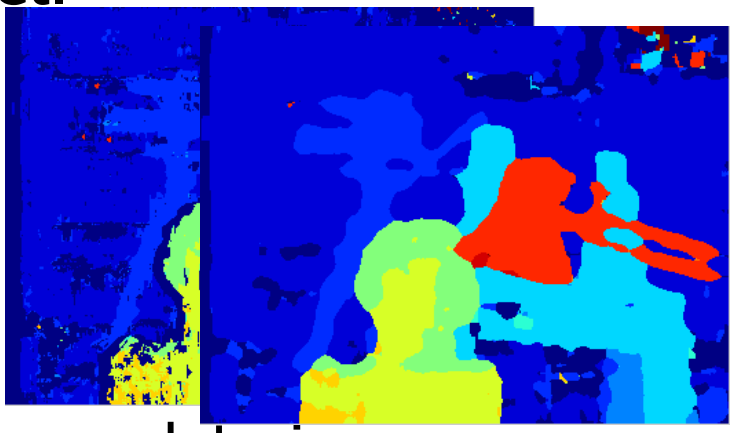
- *g(x,y)* = middelverdien av *(x,y)* og de valgte pikslene.
  - Antall verdier som midles v.b.a. *m*x*n* -naboskap: *1+(mn-1)/2*

Mode-filter (lavpass) (kursorisk)

- *g(x,y)* = hyppigst forekommende pikselverdi i naboskapet rundt *(x,y)*.
  - **Q**: Forskjell fra median?



- Antall pikselverdier bør være lite i forhold til antall piksler i naboskapet.
  - Brukes derfor sjelden på gråtonebilder.
  - Anvendes mest på segmenterte eller klassifiserte bilder for å fjerne isolerte piksler.



- Kan implementeres v.h.a. histogram-oppdatering.

Oppsummering

- Romlig filter = Naboskap + Operator
  - Operatoren definerer *hvordan* inn-bildet endres.
- Konvolusjon er lineær romlig filtrering.
  - Konvolusjonsfilteret er en matrise av vekter.
  - Å kunne utføre konvolusjon for hånd
    på et lite eksempel er sentralt i pensum!
  - Å programmere konvolusjon er sentralt i Oblig1.
- Korrelasjon og korrelasjonskoeffisienten kan brukes til mønstergjenkjenning.
- Lavpassfiltrering kan fjerne støy.

Er det noe mer ?

- Ja, masse bildestyrte adaptive filtre!
- F.eks. Anisotrop diffusjons-filtrering
  - Reduserer/fjerner støy isotropt i homogene områder
  - Bevarer kanter og linjer i bildet
    ved å filtrere anisotropt (langs kanter og linjer)
    - *"anisotrop" = ikke lik i alle retninger*
- Dette er en familie av ikke-lineære filtre.
- Ikke pensum her!

Lavpassfiltre i denne forelesningen

Navn	Kommentar
Middelverdifilter	Uniformt konvolusjonsfilter.
Gauss-filter	Konvolusjonsfilter med geometrisk vekting.
Rang-filter	Husk medianfilteret! Bevarer kanter bedre enn middelverdifilteret.
Alfa-trimmet middelverdifilter	Mellomting mellom middelverdi- og medianfilter.
K Nearest Neighbour-filter	K må velges med omhu.
K Nearest Connected Neighbour-filter	Pikslene må også være geometriske naboer.
MinimalMeanSquareError-filter	Benytter at den lokale variansen er større i nærheten av en kant.
Sigma-filter	μ av pikselverdi i intervallet $f(x,y) \pm t\,\sigma$
Max-homogenitet	Sub-naboskap tar i bruk geometrien.
Symmetrisk nærmeste nabo-filter	Symmetrisk parring tar i bruk geometrien.
Mode-filter	Hyppigst forekommende pikselverdi.