Mål

1. Beherske regneoperasjoner med komplekse tall.
2. Beherske regneoperasjoner med trigonometriske funksjoner.
3. Huske og forstå de fleste trigonometriske identiteter.

NB: Dette danner grunnlaget for hele kurset, selv om det ikke er "pensum" - så bruk mye tid på øvelser! Det forventes at dere kan dette fra tidligere kurs.

24. august 2009 2

ifi UNIVERSITETET I OSLO

Komplekse tall: Grunnleggende

- $z=a+jb$ med koeffisienter a,b
  - $a = Re\{z\}$ er realdelen til z
  - $b = Im\{z\}$ er imaginærdelen til z
  - j = roten av -1, ($j^2 = -1$): den imaginære enheten
- Vær oppmerksom på at i mange andre lærebøker/sammenhenger brukes *i* istedet for *j*
  - Opprinnelig *i* for imaginær, er slik i matematikk
  - I elektrofag er *i* strøm, derfor brukes heller *j*

24. august 2009 3

UNIVERSITETET I OSLO

Komplekse tall: Sum og produkt

Regning følger vanlig aritmetikk, men husk $j^2 = -1$

- Gitt $z_1 = a_1 + jb_1$, $z_2 = a_2 + jb_2$
- Sum: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$
- Produkt: $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

24. august 2009 4

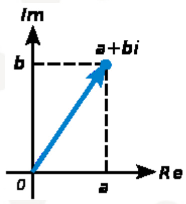
UNIVERSITETET I OSLO

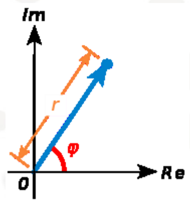
Eksponesialfunksjoner

- $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$
- $1/z^n = z^{-n}$

Komplekse tall: Visualisering og koordinatsystemer

- Reelle tall: et punkt på en tall-linje
- Komplekse tall: et punkt i planet.
- Regneoperasjoner kan da tolkes som vektor-operasjoner.
- To mulige koordinatsystemer i planet:
  - kartesiske koordinater
  - polar-koordinater



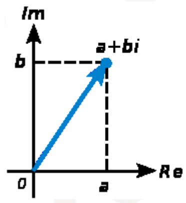


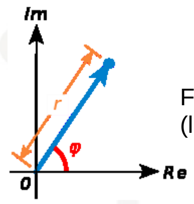
Wikipedia

Komplekse tall på kartesisk form

- $z = a + jb$
- Realdel:
  $a = r\cos(\theta) = \mathrm{Re}\{z\}$
- Imaginærdel:
  $b = r\sin(\theta) = \mathrm{Im}\{z\}$

- Gir enkel addisjon



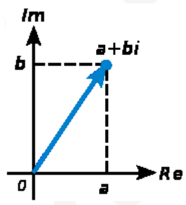


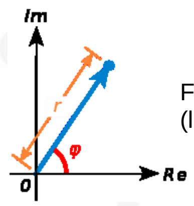
Fra Wikipedia
(la $\theta = \phi$)

Komplekse tall på polar form

- $z = re^{j\theta}$
- Tallverdi, magnitude:
  $r = (a^2 + b^2)^{1/2} = |z|$
- Fase:
  $\theta = \tan^{-1}(b/a) = \mathrm{ang}\{z\}$

- Gir enkel multiplikasjon





Fra Wikipedia
(la $\theta = \phi$)

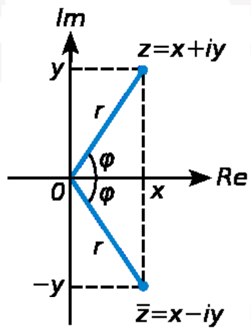
Komplekse tall: komplekskonjugering

Kartesisk form:

$z^* = (x + jy)^* = x – jy$

Polar form:

$z^* = (re^{j\theta})^* = re^{-j\theta}$

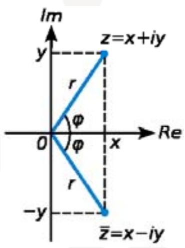


Fra Wikipedia
(la $\theta = \phi$)

Komplekse tall: komplekskonjugering

Multiplikasjon med komplekskonjugert:

$zz^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 = |z|^2$



Addisjon med komplekskonjugert:

$z + z^* = (a + jb) + (a - jb) = 2a = 2Re\{z\}$

Subtraksjon med komplekskonjugert:

$z - z^* = (a + jb) - (a - jb) = 2jb = 2j\ Im\{z\}$

Komplekse tall og trigonometri

Eulers identiteter for sinus og cosinus:

- $(e^{j\theta} + e^{-j\theta})/2 = \cos(\theta)$ addisjon av k. konj.
- $(e^{j\theta} - e^{-j\theta})/2j = \sin(\theta)$ subtraksjon av k. konj

Generell (tidsavhengig) cosinus-funksjon:

- $A\cos(2\pi ft + \phi) = (A/2)\,(e^{j2\pi ft}\,e^{j\phi} + e^{-j2\pi ft}\,e^{-j\phi})$
- En cosinus med frekvens *f* og fase ϕ kan tolkes som summen av to komplekse eksponensialer.

Komplekse tall og trigonometri

- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = ?$
- $[(e^{j\theta} + e^{-j\theta})/2]^2 + [(e^{j\theta} - e^{-j\theta})/2j]^2 =$
  $(1/4)[e^{j2\theta} + 2 + e^{-j2\theta}] - (1/4)[e^{j2\theta} - 2 + e^{-j2\theta}] = 1$
- Meget viktig resultat som er veldig lett å utlede med komplekse eksponensialer, ikke så lett uten.
- Tilsvarende lett å finne $\cos(2\theta)$, $\sin(2\theta)$, $\cos(\theta/2)$ osv

Komplekse tall og trigonometri

Eksempel 1: Modulasjon

- $\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) = (1/2)(\cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos(\theta_1 - \theta_2))$

Eksempel 2: Sum av sinuser med samme frekvens

- $\sum_k A_k \cos(2\pi f t + \phi_k) = A\cos(2\pi f t + \phi)$
  der $Ae^{j\phi} = \sum_k \{A_k e^{j\phi_k}\}$

Eksponensialform er mye enklere å bruke for regning i disse eksemplene.