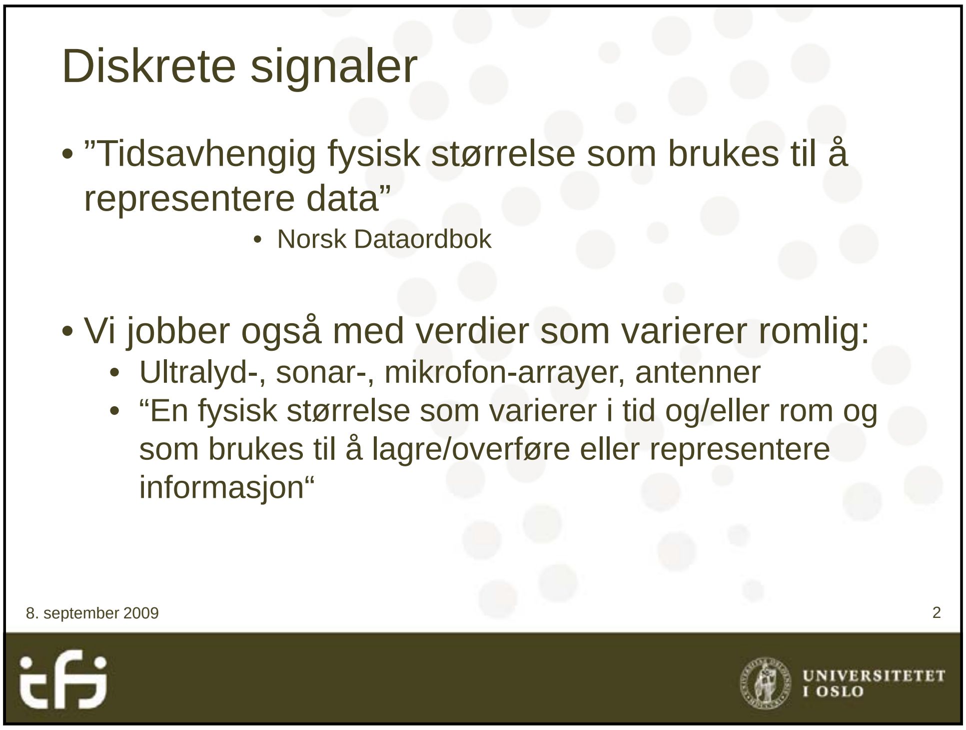
INF3470 Digital signalbehandling

Diskrete signaler (kap 2)

Sverre Holm



Diskrete signaler

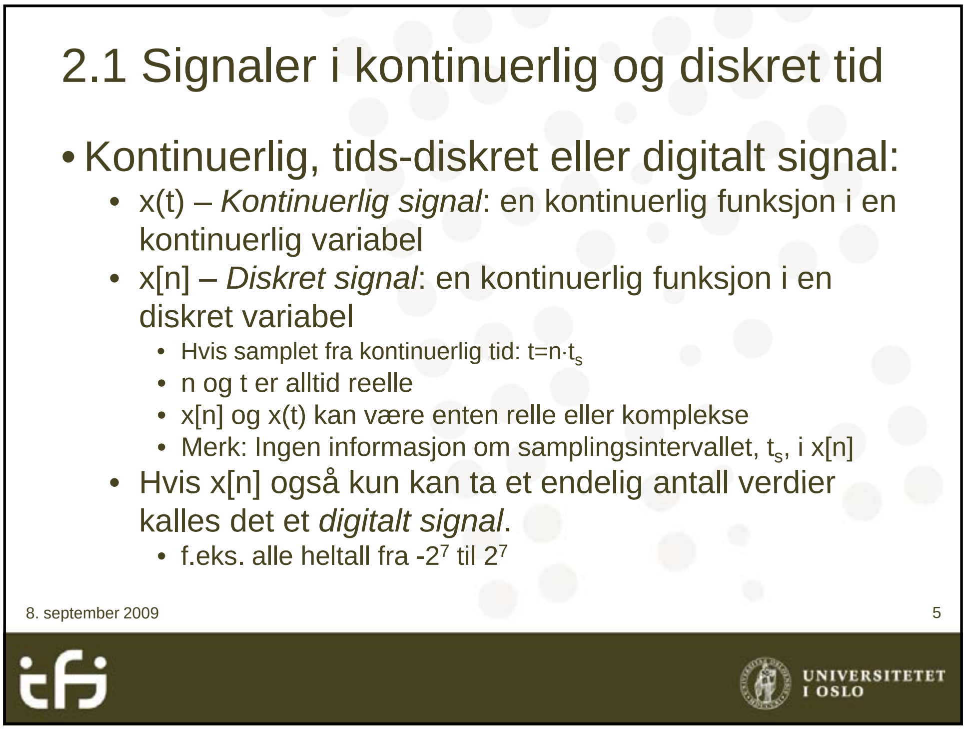
- ”Tidsavhengig fysisk størrelse som brukes til å representere data”
  - Norsk Dataordbok
- Vi jobber også med verdier som varierer romlig:
  - Ultralyd-, sonar-, mikrofon-arrayer, antenner
  - “En fysisk størrelse som varierer i tid og/eller rom og som brukes til å lagre/overføre eller representere informasjon“

Mål for kapittel 2: Diskrete signaler

1. Kunne transformere et diskret signal med tidskift og tidsreversering
2. Forstå like og odde symmetri og vite hvordan å finne de like og odde delene av et generelt signal
3. Forstå hvordan å klassifisere et signal basert på energi og effekt
4. Forstå grunnleggende interpolasjon og desimering
5. Vite definisjoner på standard signaler

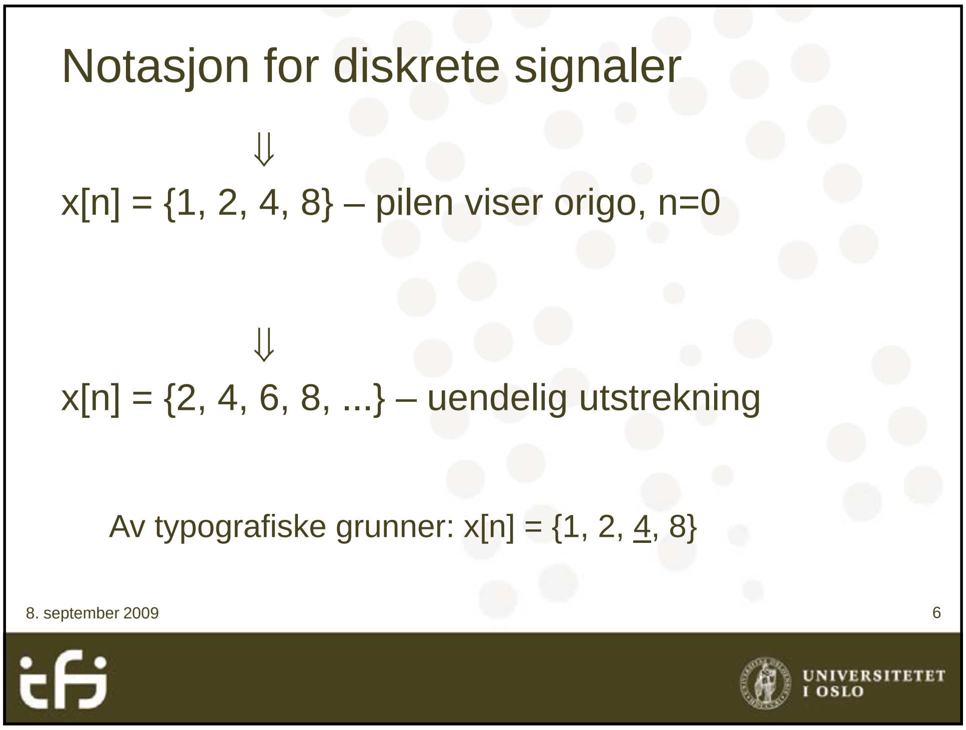
Mål for kapittel 2: Diskrete signaler

6. Vite hvordan å finne den digitale frekvensen til en sinus eller en kompleks eksponensial
7. Vite hvordan å finne perioden til en sum av sinuser/komplekse eksponensialer
8. Forstå samplingsteoremet og vite hvordan bestemme samplingrate
9. Forstå aliasing og vite hvordan å finne de aliasede frekvensene
10. Forstå de målene som brukes for å karakterisere stokastiske signaler



2.1 Signaler i kontinuerlig og diskret tid

- Kontinuerlig, tids-diskret eller digitalt signal:
  - x(t) – *Kontinuerlig signal*: en kontinuerlig funksjon i en kontinuerlig variabel
  - x[n] – *Diskret signal*: en kontinuerlig funksjon i en diskret variabel
    - Hvis samplet fra kontinuerlig tid: $t=n \cdot t_s$
    - n og t er alltid reelle
    - x[n] og x(t) kan være enten relle eller komplekse
    - Merk: Ingen informasjon om samplingsintervallet, t_s, i x[n]
  - Hvis x[n] også kun kan ta et endelig antall verdier kalles det et *digitalt signal*.
    - f.eks. alle heltall fra -2^7 til 2^7



Notasjon for diskrete signaler

$$\qquad\qquad\Downarrow$$
x[n] = {1, 2, 4, 8} – pilen viser origo, n=0

$$\qquad\qquad\Downarrow$$
x[n] = {2, 4, 6, 8, ...} – uendelig utstrekning

Av typografiske grunner: x[n] = {1, 2, $\underline{4}$, 8}

- Høyresidig, venstresidig
- Kausalt, anti-kausalt
  - Viktig begrep for karakterisering av filtre

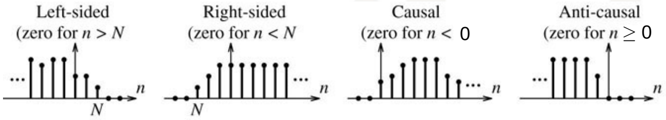


FIGURE 2.1 An infinite-length discrete signal may be left-sided, right-sided, causal, or anti-causal

  - Kausal – cause – årsak: begrep fra impulsrespons

Periodisk signal

- Et diskret periodisk signal gjentar seg selv etter N samples:

- $x[n] = x[n \pm kN]$, k=0, 1, 2, 3, ...

  - Der N, heltall, er det minste antall samples som oppfyller dette.

Drill 2.1

a) ⇓

x[n] = {...,1,2,0,0,4,1,2,0,0,4,1,2,0,0,4,1,2,0,0,4,...}

Hva er perioden?

b) ⇓

x[n]={...,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2, ...}

y[n]={...,1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,2,3, ...}

Hva blir perioden til g[n]=x[n]+y[n]?

Hvilke sampleverdier har g[n] i en periode?

Mål på signaler

- Absolutt sum:

$$S_A = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[m]|$$

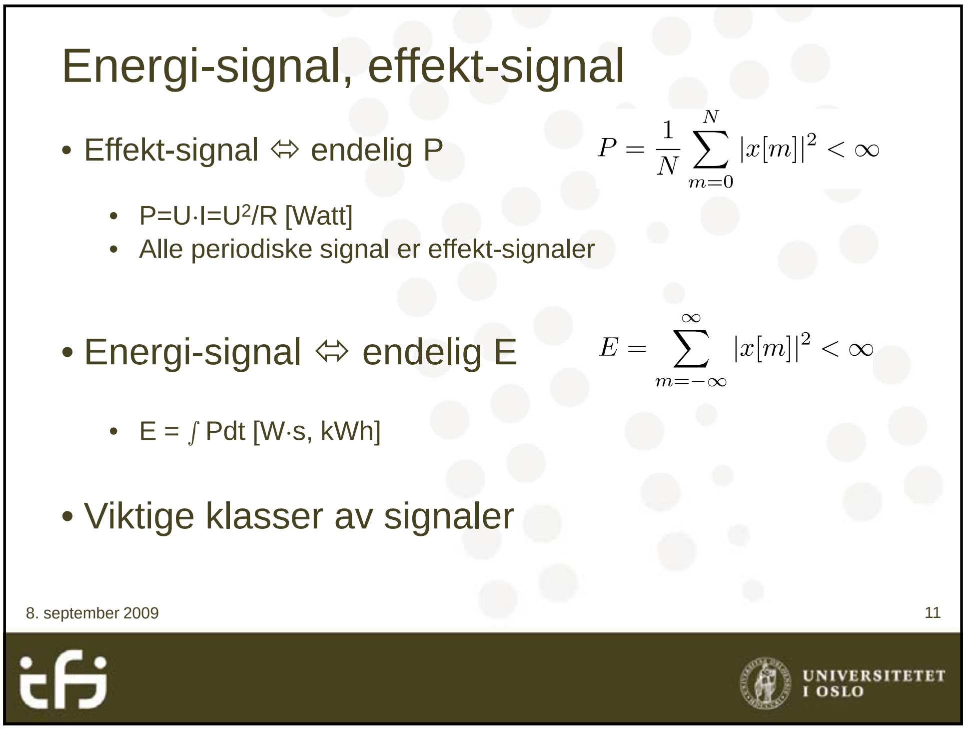
- Signal energi:

$$E = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[m]|^2$$

- Middeleffekt for periodisk signal:

$$P = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N} |x[m]|^2$$

- Endelig absolutt sum ⇔ absolutt summerbar
- Endelig E ⇔ summerbar i kvadrat
  - E=∞ for periodiske signaler
- Middel over N samples i perioden



Energi-signal, effekt-signal

- Effekt-signal ⇔ endelig P

$$P = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N} |x[m]|^2 < \infty$$

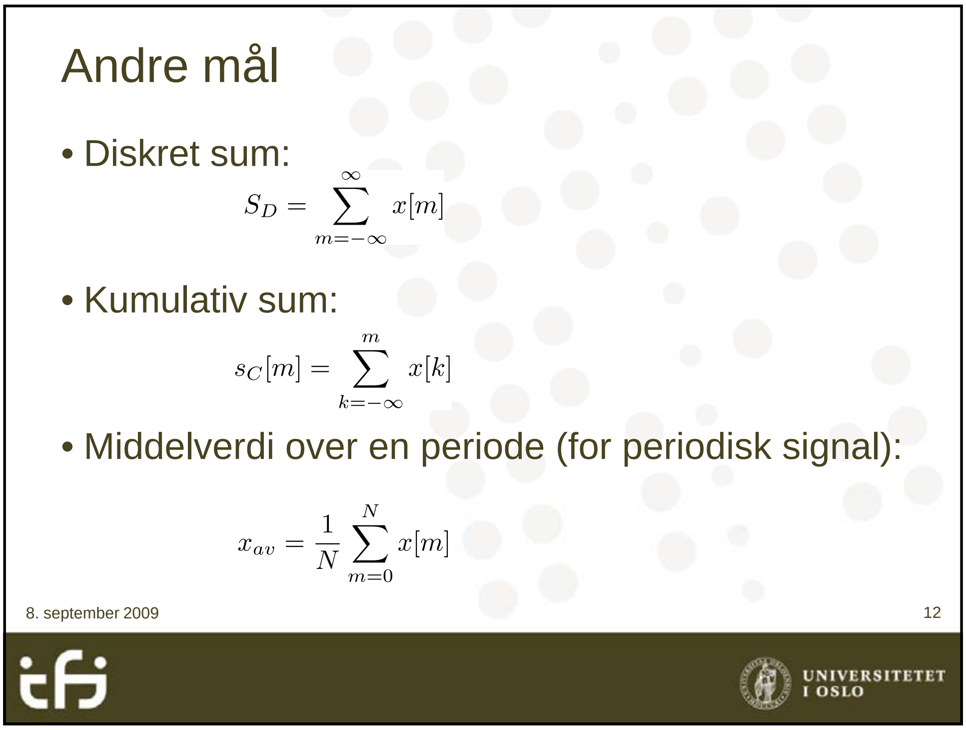
  - P=U·I=U^2/R [Watt]
  - Alle periodiske signal er effekt-signaler

- Energi-signal ⇔ endelig E

$$E = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[m]|^2 < \infty$$

  - E = ∫ Pdt [W·s, kWh]

- Viktige klasser av signaler



Andre mål

- Diskret sum:

$$S_D = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]$$

- Kumulativ sum:

$$s_C[m] = \sum_{k=-\infty}^{m} x[k]$$

- Middelverdi over en periode (for periodisk signal):

$$x_{av} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N} x[m]$$

Eks 2.1 Signal energi og effekt

- Finn energien i x[n]=3(0.5)^n, n $\geq$ 0

$$E = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[m]|^2 = \sum_{m=0}^{\infty} |3(0.5)^m|^2 = 9\sum_{m=0}^{\infty}(0.25)^m = 9\frac{1}{1-0.25} = 12$$

- Viktige formler for sum av konvergent geometrisk rekke, brukes mye:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m = \frac{1}{1-\alpha}, |\alpha| < 1 \qquad \sum_{m=0}^{M-1} \alpha^m = \frac{1-\alpha^M}{1-\alpha}, |\alpha| < 1$$

Drill 2.2

a) $\Downarrow$

x[n] = {1,2,0,0,4} – Hva er energien?

b) $\Downarrow$

x[n] = {...,1,2,0,0,4,1,2,0,0,4,1,2,0,0,4,1,2,...} – Hva er midlere effekt?

c) $\Downarrow$

x[n]={...,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2, ...}

y[n]={...,1,2,2,1,2,2,1,2,2,1,2,2,1,2,2,1,2,2, ...}

La g[n]=x[n]+y[n], hva er middelverdien til g[n] og middeleffekten til x[n], y[n] og g[n]?

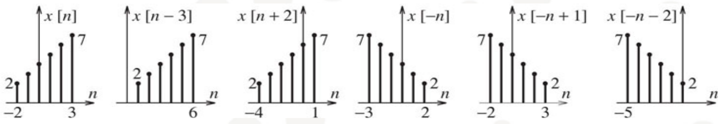
2.2 Operasjoner på diskrete signaler

- Tidsskift: $y[n] = x[n-\alpha]$
  - Forsinkelse: $\alpha>0$ (kommer senere)
  - Flytting fremover i tid: $\alpha<0$ (kommer tidligere)
  - Hvis $x[n]$ starter ved $n=N$, vil $y[n]$ starte ved $n=N+\alpha$
- Tidsreversering: $y[n] = x[-n]$ – speilbilde om origo
  - Bytter fortegn på n
- Kombinasjon av tidsreversering og skift: $x[-n-\alpha]$
  - Enten forsinkelse først $x[n-\alpha]$, og så speiling $x[-n-\alpha]$
  - Eller speiling $x[-n]$, fulgt av forsinkelse $x[-n-\alpha]$

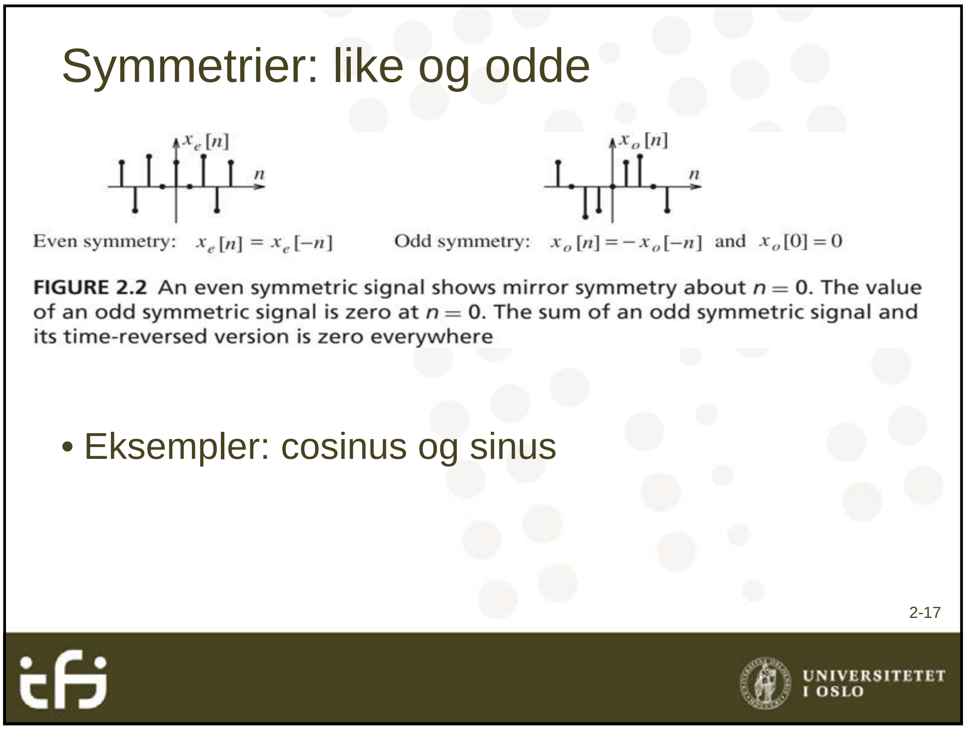
Eks 2.2 Forsinkelse & reversering

- Eksempel
  - ⇓
  - $x[n]=\{2,3,4,5,6,7\}$
  - $x[n-3]$, $x[n+2]$, $x[-n]$, $x[-n+1]$, $x[-n-2]$

FIGURE E.2.2 The signals for Example 2.2



- Sjekk: Sample som var ved n=0 havner nå ved:
  - $n=0$, $n-3=0$, $n+2=0$, $-n=0$, $-n+1=0$, $-n-2=0$

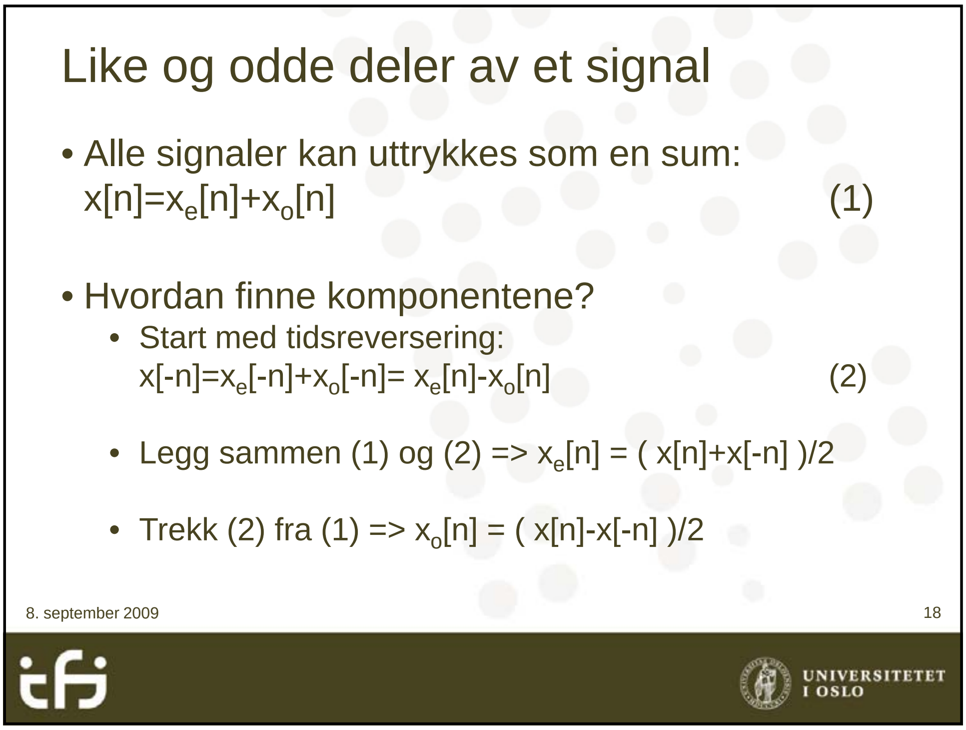


Symmetrier: like og odde

Even symmetry: $x_e[n] = x_e[-n]$ Odd symmetry: $x_o[n] = -x_o[-n]$ and $x_o[0] = 0$

FIGURE 2.2 An even symmetric signal shows mirror symmetry about $n = 0$. The value of an odd symmetric signal is zero at $n = 0$. The sum of an odd symmetric signal and its time-reversed version is zero everywhere

- Eksempler: cosinus og sinus



Like og odde deler av et signal

- Alle signaler kan uttrykkes som en sum:
  $x[n]=x_e[n]+x_o[n]$ (1)
- Hvordan finne komponentene?
  - Start med tidsreversering:
    $x[-n]=x_e[-n]+x_o[-n]= x_e[n]-x_o[n]$ (2)
  - Legg sammen (1) og (2) => $x_e[n] = (x[n]+x[-n])/2$
  - Trekk (2) fra (1) => $x_o[n] = (x[n]-x[-n])/2$

Eks: Finn like og odde signal

- ⇓
- x[n]=[1,1,1,1,1] = u[n]-u[n-5]

- Definisjoner:
  - $x_e[n] = (x[n]+x[-n])/2$
  - $x_o[n] = (x[n]-x[-n])/2$

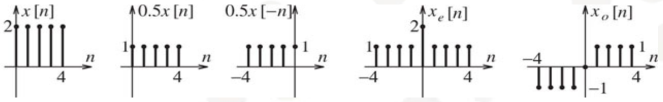
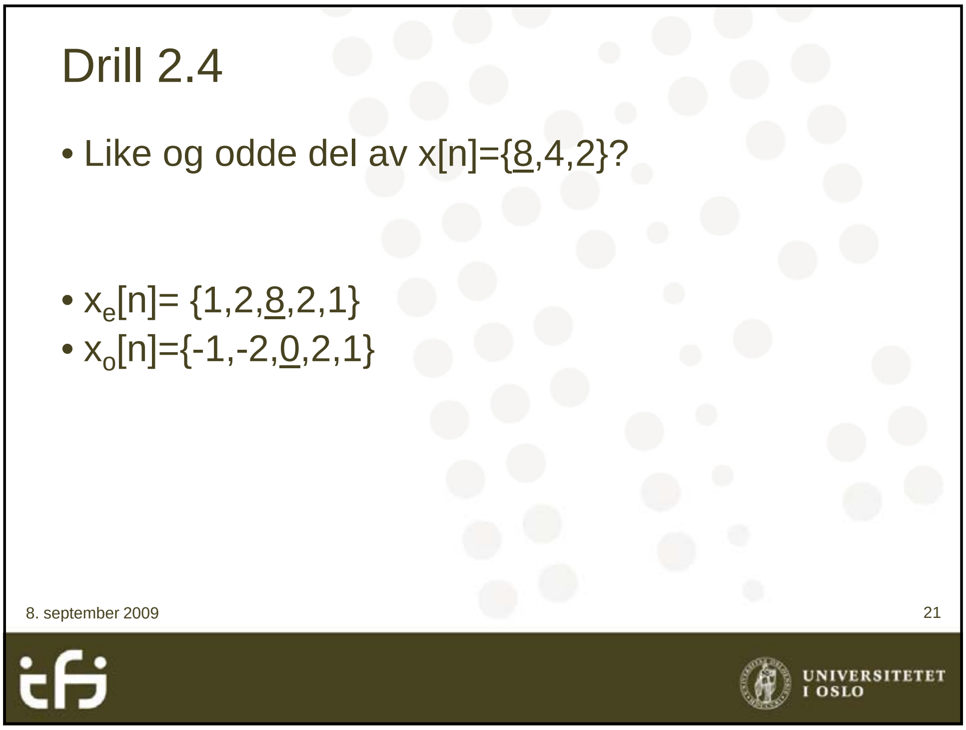


FIGURE E 2.3.b The signal *x*[*n*] and its odd and even parts for Example 2.3(b)

Klassifisering av signaler

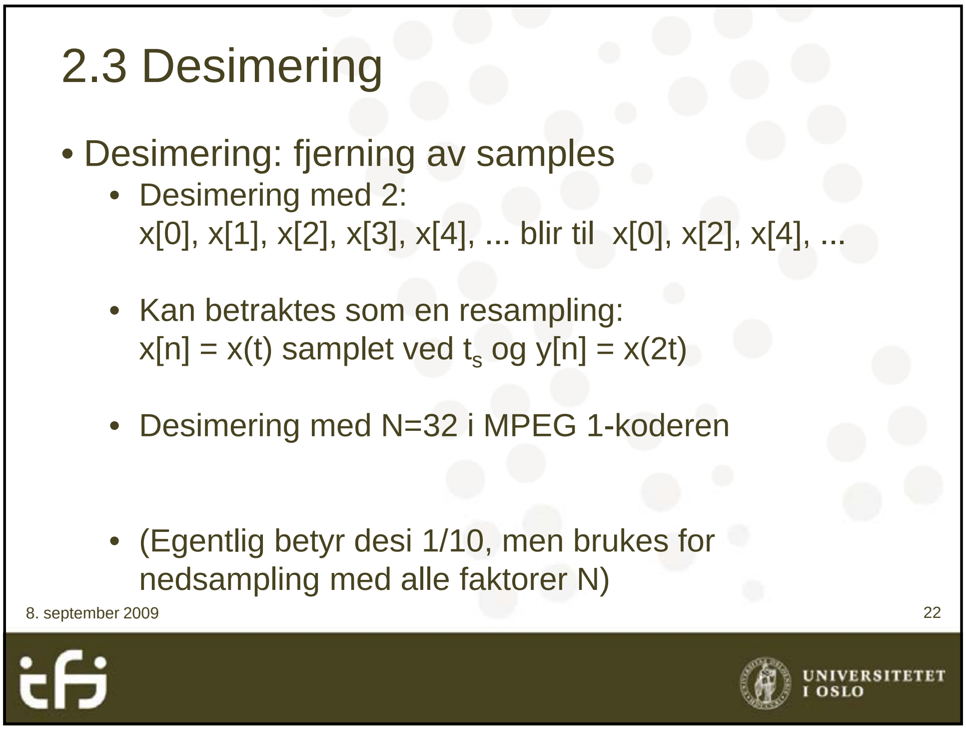
- Endelig lengde eller uendelig lengde.
- Periodisk eller aperiodisk.
- Symmetrisk, anti-symmetrisk eller ikke-symmetrisk.
- Høyresidig, venstresidig eller tosidig.
- Kausalt, anti-kausalt eller ikke-kausalt.
- Energi-signal, effekt-signal eller ingen av disse.



Drill 2.4

- Like og odde del av $x[n]=\{\underline{8},4,2\}$?

- $x_e[n]= \{1,2,\underline{8},2,1\}$
- $x_o[n]=\{-1,-2,\underline{0},2,1\}$



2.3 Desimering

- Desimering: fjerning av samples
  - Desimering med 2:
    x[0], x[1], x[2], x[3], x[4], ... blir til x[0], x[2], x[4], ...
  - Kan betraktes som en resampling:
    $x[n] = x(t)$ samplet ved t_s og $y[n] = x(2t)$
  - Desimering med N=32 i MPEG 1-koderen
  - (Egentlig betyr desi 1/10, men brukes for nedsampling med alle faktorer N)

2.3 Interpolasjon

- Interpolasjon: økning av antall samples
  - Interpolasjon med faktor 2: $y[n] = x(t/2) = x\uparrow[n/2]$
    - Annenhver sample lik de som er i x[n]
  - Når man ikke kjenner det analoge signalet, x(t), må verdiene velges/estimeres:
    - Sett til null ⇔ oppsampling, brukes ofte; null-interpolasjon
      - $y[n]=x(n/N)$ for $n=0,\pm N,\pm 2N, \ldots$ og 0 ellers
    - Sett lik forrige sample: step-interpolasjon, 0'te-ordens hold
    - Sett lik middelverdi av samples på hver side (lineær interpolasjon)
    - Mer kompliserte interpolasjoner basert på mange naboer
  - Interpolasjon med N=32 i MPEG 1-dekoder (spiller)
    - Oppsampling fulgt av filter

Eks 2.4a

$x[n]=\{1,\underline{2},5,-1\}$

1. Nedsampling med 2:
   - $x[2n] = \{\underline{2},-1\}$
2. Oppsampling med 3:
   - Forskjellige versjoner av $x\uparrow[n/3]$:
     - Null-interpolert: $\{1,0,0,\underline{2},0,0,5,0,0,-1,0,0\}$
     - Step-interpolert: $\{1,1,1,\underline{2},2,2,5,5,5,-1,-1,-1\}$
     - Lineær interpol.: $\{1,4/3,5/3,\underline{2},3,4,5,3,1,-1,-2/3,-1/3\}$
       - Vekter: 2/3 og 1/3, 1/3 og 2/3
       - Antatt 0 som etterfølgende sampleverdi

Eks 2.4b

x[n]={3,4,$\underline{5}$,6}, Finn g[n]=x[2n-1] og h[n]=x[0.5n-1] med step-interpolasjon

- Skal man forsinke først eller sist?
  - Litt tvetydig notasjon. Må forsinke først da det betyr forsink med 1 på opprinnelig samplerate, så des/interp. med faktor 2

Forsinkelse: y[n]=x[n-1]={3,$\underline{4}$,5,6}

1. Desimering: y[2n]=x[2n-1] = {$\underline{4}$,6}
2. Interpolasjon: y[0.5n]=x[0.5n-1] = {3,3,$\underline{4}$,4,5,5,6,6}

Er interpolasjon og desimering inverse?

Gir begge disse operasjonene den opprinnelige x[n]?

1. Desimering med N fulgt av interpolasjon med N
2. Interpolasjon med N fulgt av desimering med N

Eks: x[n]={$\underline{1}$,2,6,4,8}, N=2, step-interpolasjon

1. Desimering så interpolasjon
   - → {$\underline{1}$,6,8} → {$\underline{1}$,1,6,6,8,8} ≠ x[n]
2. Interpolasjon så desimering
   - → {$\underline{1}$,1,2,2,6,6,4,4,8,8} → {$\underline{1}$,2,6,4,8} = x[n]

- Desimering opphever interpolasjon, men ikke omvendt
  - Må starte med å øke antall samples, ikke med å kaste dem

Eks 2.4c

- x[n]={3,4,5,6}. Finn x[2n/3], bruk step-interpolasjon der det trengs

- Ikke-heltallig: husk først å øke antall samples

- Interpolasjon x↑[n/3] ={3,3,3,4,4,4,5,5,5,6,6,6}
- Desimering med 2: x[2n/3]= {3,3,4,5,5,6}

Ikke heltallige forsinkelser

- y[n]=x[n-M/N]
- Eks: forsinke med halv sample, M=1, N=2

1. Interpoler x[n] → x↑[n/N]
2. Forsink med M → x[(n-M)/N]
3. Desimer med N → x[(nN-M)/N] = x[n-M/N]

Eks 2.4d

- Forsink x[n]={2,4,6,8} med et halvt sample, dvs finn x[n-0.5]. Bruk lineær interpolasjon.

1. Interpoler med faktor 2: x[n/2]=]={2,3,4,5,6,7,8}
2. Forsink med én: x[(n-1)/2]= {2,3,4,5,6,7,8,4}
3. Desimer med faktor 2: x[n-0.5]={3,5,7,4}

2.4 Standard diskrete signaler

- Impuls, det nest-viktigste signalet i faget:
  $\delta[n] = 1$ for n=0, og 0 for $n \neq 0$
- Forsinket impuls:
  $\delta[n-k] = 1$ for n=k, og 0 for $n \neq k$
  - Viktig: n er variabelen/tidsindeksen og k er en konstant
- Enhetssprang, step: u[n] = 1 for $n \geq 0$, og 0 ellers

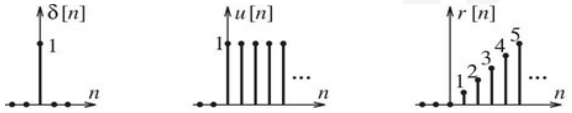


FIGURE 2.3 The discrete unit impulse $\delta[n]$ is also called the unit sample. The standard unit step $u[n]$ and unit ramp $r[n] = nu[n]$ are both causal signals

Egenskaper ved impuls

- x[n]δ[n-k] = x[k]δ[n-k]
  - Impulsen er 1 bare ved n=k
- Ekstraksjonsegenskap (sikt-egenskap):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-k] = x[k]$$

- Leder til signalrepresentajson ved impulser

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

  - Ser trivielt ut, men viktig ved konvolusjon
  - Eks $u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$

Andre signaler

- Diskret rektangulær puls, rect(n/(2N))og diskret triangulær puls

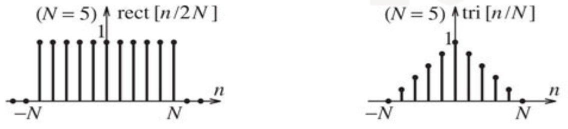


FIGURE 2.4 The definition of rect($\frac{n}{2N}$) implies even symmetry and $2N + 1$ samples. The signal tri(n/N) has even symmetry and also contains $2N + 1$ samples (if we include the two zero-valued end samples)

Drill 2.6

- Uttrykk h[n]={3,3,3,5,5,5} ved hjelp av enhetssprang

  1. Et sprang ved n=-2: 3u[n+2]
  2. Et nytt sprang ved n=1: 2u[n-1]
  3. Kanseller alt ved n=3: -5u[n-3]

  - h[n]= 3u[n+2] + 2u[n-1] - 5u[n-3]

Andre signaler

- Diskret sinc-funksjon: $sinc(\frac{n}{N}) = \frac{\sin(n\pi/N)}{n\pi/N}$
  - 0 for nπ/N=kπ => n=kN, k=$\pm$1, $\pm$2, ...
  - sinc(0) = 1, definert med analogi til kontinuerlig sinc
  - Impulsrespons til ideelt lavpassfilter
- Diskret eksponensial: x[n]=α^nu[n]
  - Hva skjer for α=2, α=0.5, α=-0.5?
  - α=re$^{j\theta}$ => r^{n}e$^{jn\theta}$= r^n (cos(nθ) + jsin(nθ))
    - 0<r<1 =>
    - r>1 =>
  - Husk formler for sum av diskret eksp. (eks 2.1)

2.5 Tidsdiskrete sinuser

- Analog sinus $x(t)=\cos(2\pi ft)$ samplet ved t_s der $S=1/t_s$ Hz:
- => Diskret cosinus: $x[n] = \cos(2\pi fnt_s) = \cos(2\pi nf/S)= \cos(2\pi nF)$
- 4 frekvensbegreper: f, F, og vinkelfrekvens $\omega=2\pi f$ og $\Omega=2\pi F$:

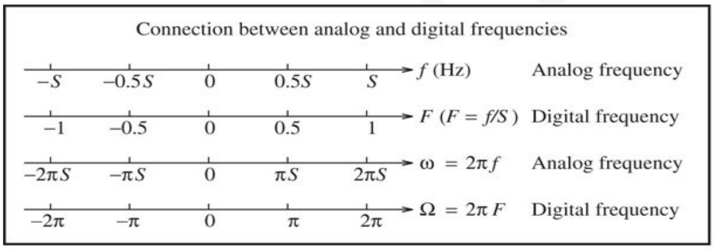


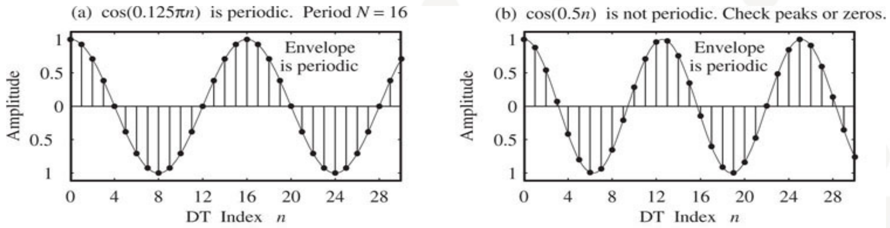
FIGURE 2.5 Comparison of analog and digital frequencies. Note that the digital frequency $F = 1$ corresponds to the sampling frequency $f = S$ because, by definition, the digital frequency $F = f/S$ is the ratio of the analog frequency f and the sampling rate S

Kompleks sinus

- $x[n] = e^{j2\pi nF+\theta}=\cos(j2\pi nF+\theta) + j\sin(j2\pi nF+\theta)$
- Brukes ofte i stedet for cos(·) som lett kan finnes fra realdelen

Tidsdiskret sinus – periodisk i tid?

- Tidsdiskret sinus $x[n]=\cos(2\pi nF_0)$:
  - $\cos(2\pi nF_0) = \cos(2\pi(n+N)F_0) = \cos(2\pi nF_0+2\pi NF_0)$
  - Bare periodisk for NF_0=heltall, dvs $F_0=k/N$!



(a) $\cos(0.125\pi n)$ is periodic. Period $N = 16$

(b) $\cos(0.5n)$ is not periodic. Check peaks or zeros.

FIGURE 2.6 Discrete-time sinusoids are not always periodic. The first panel shows the signal $\cos(0.125n\pi)$ (whose period is $N = 16$) and its envelope. The second panel shows the signal $\cos(0.5n)$ and its envelope. Even though their envelopes are periodic, look carefully at the peaks and troughs and confirm that the first signal is periodic while the second signal is not periodic

Tidsdiskret sinus – periodisk i frekvens?

- Tidsdiskret sinus $x[n]=\cos(2\pi nF_0)$:
  - $\cos(2\pi nF_0) = \cos(2\pi n(F_0+m)) = \cos(2\pi nF_0+2\pi nm)$

  - Alltid periodisk, dvs F_0 og F_0+m gir samme resultat, der m er et heltall
  - Unikt område for frekvens: $-0.5 \leq F \leq 0.5$
  - Alle andre frekvenser vil ha en alias i dette området, $Fa=F_0-M$, der $|F_a| < |F_0|$

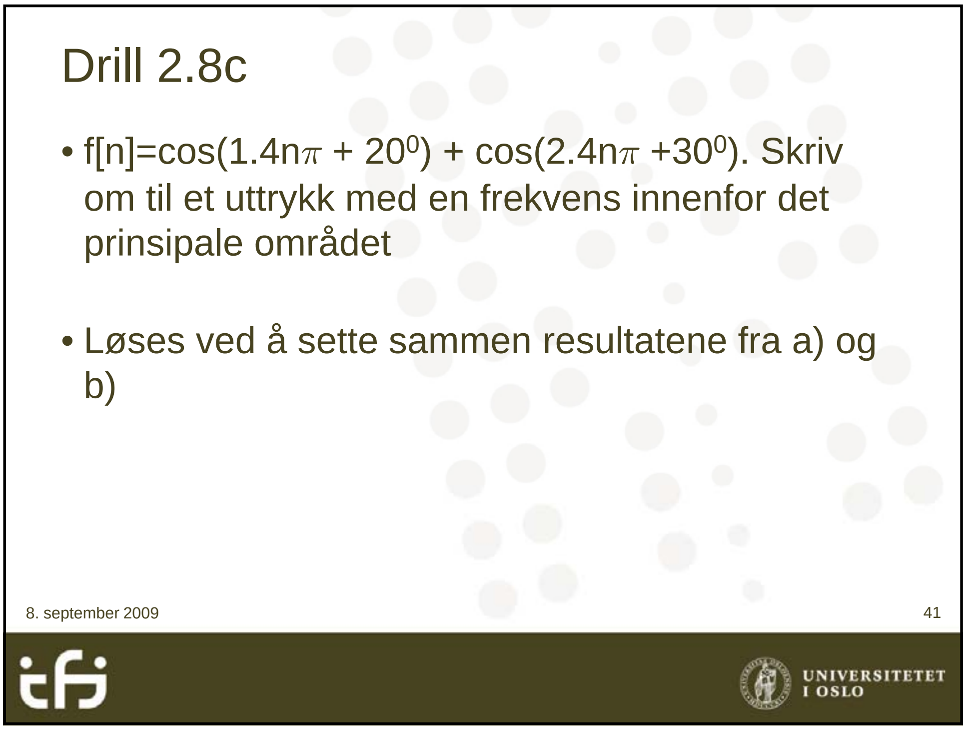
Drill 2.8a

- La $x[n] = e^{j1.4n\pi} = e^{j2\pi F_u n}$ der $|F_u| \leq 0.5$. Hva er F_u?
- $2\pi F_u = 1.4\pi \Rightarrow F_u=1.4/2=0.7 > 0.5$
- Altså må det trekkes fra 1 for å få den innenfor området => $F=F_{\underline{u}}-1=0.3$

Drill 2.8b

- $y[n] = \cos(2.4n\pi + 30^0)$. Skriv om til et uttrykk med en frekvens innenfor det prinsipale området

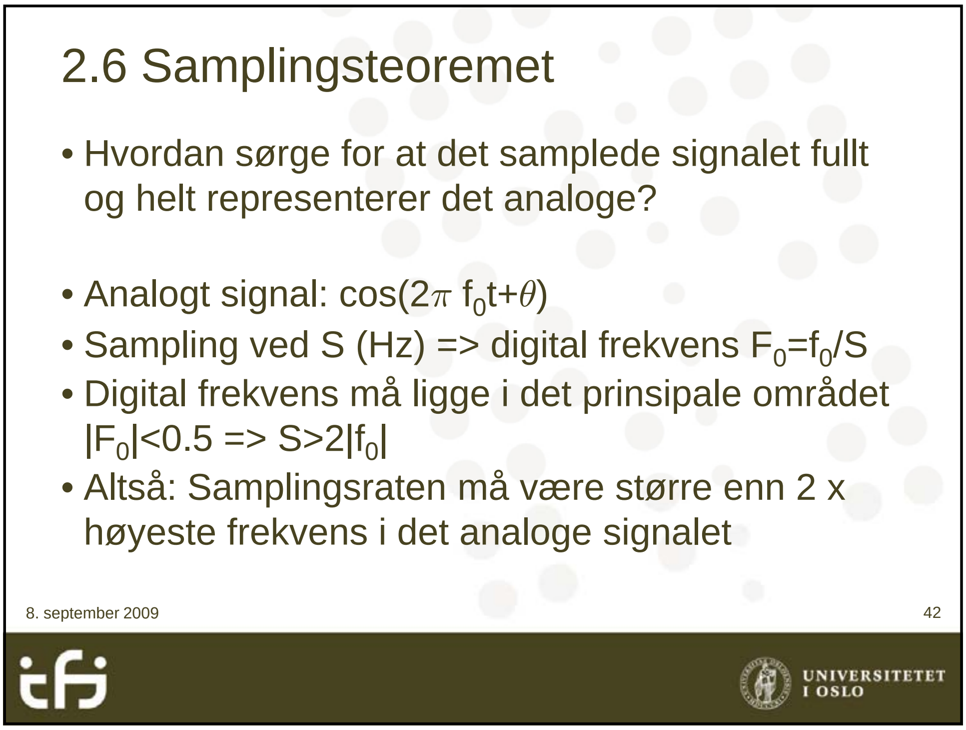
- $2.4n\pi + 30^0 = 2\pi\ F_0\ n + \theta \Rightarrow 2.4 = 2F_0$ og $F_0=1.2$
- Men da dette ikke er en løsning innenfor det ønskede området må den reduseres ved å trekke fra m: $2\pi(1.2\text{-}m)n + \theta = 2\pi\ F\ n + \theta$
- Det gir m=1 og altså F=0.2 og $\theta=30^0$ eller $y[n]= \cos(0.4n\pi + 30^0)$.



Drill 2.8c

- $f[n]=\cos(1.4n\pi + 20^0) + \cos(2.4n\pi +30^0)$. Skriv om til et uttrykk med en frekvens innenfor det prinsipale området

- Løses ved å sette sammen resultatene fra a) og b)



2.6 Samplingsteoremet

- Hvordan sørge for at det samplede signalet fullt og helt representerer det analoge?

- Analogt signal: $\cos(2\pi f_0 t+\theta)$
- Sampling ved S (Hz) => digital frekvens $F_0=f_0/S$
- Digital frekvens må ligge i det prinsipale området $|F_0|<0.5 \Rightarrow S>2|f_0|$
- Altså: Samplingsraten må være større enn 2 x høyeste frekvens i det analoge signalet

Samplingsteoremet: begreper

- Kritisk samplingsrate = Nyquist frekvens: $S=2f_{max}$
- Nyquist intervall $ts=1/2_{fmax}$
- Ekvivalent med å ta 2 samples per periode

- Drill 2.9b
  - En sinus på 50 Hz er blitt samplet på det dobbelte av Nyquist-raten. Hvor mange samples får man da i løpet av 3 sekunder?

Rekonstruksjon fra samples

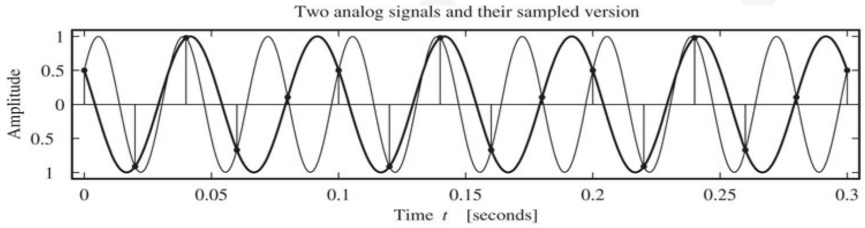
- Rekonstruksjon baserer seg på at digital frekvens er i det prinsipale området $-0.5 \leq F \leq 0.5$
  - Svarer til analog frekvens $–S/2 \leq f \leq S/2$
- Korrekt samplet: Hvis det analoge signalet var samplet i følge samplingsteoremet så gjenvinnes det opprinnelige analoge signalet
- Undersamplet: Hvis det opprinnelige analoge signalet var undersamplet, da gjenvinnes en alias, $F_a=F_0-M$ $(|F_a|<0.5)$ svarende til en lavere analog frekvens $f_a=f_0-MS$.

Eksempel 2.7b

- 100 Hz sinus samplet på 240, 140, 90 og 35 Hz. Aliasing? Hvis ja, hva er alias-frekvensen?
- Samplingsteorem S>200 Hz => S=240 Hz OK
- Resten er undersamplet: $f_a=f_0$-MS slik at $F_a=F_0$-M kommer i området < 0.5
  - S=140 Hz => f_a=100 Hz-140 Hz = -40 Hz som er OK da |-40| < S/2
  - S=90 Hz => f_a=100 Hz-90 Hz = 10 Hz < S/2
  - S=35 Hz =>
    - M=1: f_a=100-35 = 65 Hz > S/2
    - M=2: f_a=100-2*35 Hz = 30 Hz > S/2
    - M=2: f_a=100-3*35 Hz = -5 Hz: OK

Eksempel 2.7c: Identiske samples

- To analoge sinuser er samplet og leder til samme samples. Er det aliasing her? Finn det originale og det aliasede signalet. Finn frekvensene.



Eksempel 2.7c: Identiske samples

- Kan lese av t_s=0.02 s =>S=50 Hz

- Periodisitet med N=5
  - Hvis det er 1 periode på 2 samples => F=1/2
  - 3 perioder av x_1(t) - lys strek) => F_1=3/5 > 0.5
  - 2 perioder av x_2(t) - mørk strek => F_2=2/5
  - Så x_1(t) har aliaset til x_2(t) og
    f_1=50*3/5 = 30 Hz
    f_2=50*2/5 = 20 Hz

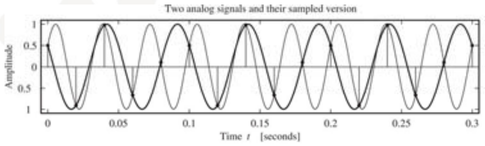


FIGURE E 2.7.c The sinusoids for Example 2.7(c). We see five samples per period. These five samples are obtained from three full cycles of $x_1(t)$ (shown light) or two full cycles of $x_2(t)$ (shown dark). The signal $x_2(t)$ has the lower frequency and thus corresponds to the aliased version

---

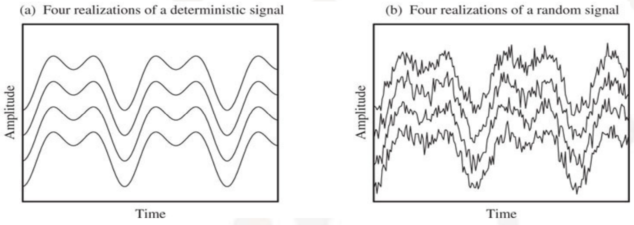
Eksempel 2.7d ?

- En 100 Hz sinus er samplet og det rekonstruerte signalet har frekvens 10 Hz. Hva var samplingsraten?
- f=100, F=10 eller F=-10
- F-M· S = f
  - 100-S = 10 ⇒ S=90
  - 100-S=-10 ⇒ S=110
  - 100-M·S=10 eller -10
    - +10: M=2 ⇒ S=45, M=3 ⇒ S=30
    - -10: M=2 ⇒ 55, M=3 ⇒ S=110/3 ≈ 36.7 Hz

2.7 Stokastiske signaler

- Deterministiske – stokastiske/tilfeldige
  - Forskjellig realisering, x(t), hver gang
  - Det stokastiske signalet X(t) er familien av slike realiseringer
  - Ved hvert tidspunkt, t, en stokastisk variabel
    - Hvilke verdier, x, kan den ha?
    - Hva er sannsynligheten for at en verdi er opp til x, sannsynlighetsfordelingen, $0 \leq F(x) \leq 1$?

FIGURE 2.7 A deterministic process results in identical realizations but every realization of a stochastic or random process is different



(a) Four realizations of a deterministic signal

(b) Four realizations of a random signal

Sannsynlighetstetthet

- Sannsynlighetstetthet f(x) = dF(x)/dx
- Kumulativ sannsynlighet: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\lambda) d\lambda$
- Sannsynligheten for at $X \leq x_1$

$$F(x_1) = Prob[X \leq x_1] = \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx$$

Mål for stokastiske variable

- Forventningsverdi, mål for hvor fordelingen er sentrert:

$$E(x) = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

- Midlere kvadratverdi = 2. ordens moment:

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

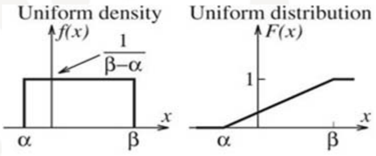
- Varians, 2. ordens sentralmoment

$$\sigma_x^2 = E((x - m_x)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = E(x^2) - m_x^2$$

  - Måler spredning, bredde, usikkerhet,
  - σ: standardavvik, root-mean-square = rms verdi

Uniform fordeling

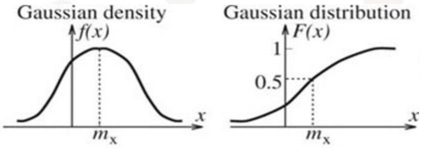
- f(x) = 1/(β-α) for $\alpha \leq$ x $\leq \beta$, 0 ellers
- m_x=0.5(α+β)
- σ_x^2 = (β-α)^2/12



- Anvendelser
  - Kvantiseringsstøy i A/D-konverter:
    - Trinnstørrelse Δ
    - Kvantiseringsfeil uniformt fordelt mellom -Δ/2 og Δ/2
  - Sinus med tilfeldig fase, cos(2πft+θ):
    - Fase, θ, uniformt fordelt mellom -π og π

Normalfordeling, Gauss-fordeling

- Sannsynlighetstetthet $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp - \frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}$
  - Standard Gaussfordeling, m_x=0, σ=1
  - Sum av Gaussiske variable er Gaussisk
- Sentralgrenseteoremet
  - Pdf til en sum av mange stokastiske variable går mot Gaussisk når antallet blir stort, selv om de ikke er Gaussiske
- Anvendelse
  - Modell for støy



Periodiske signaler: ”stokastiske mål”

- Varians for sinus x(t) = A cos(2π t/T+θ): σ^2=A^2/2
  - Uttrykk for effekten i signalet
  - σ: effektivverdien
- Fordeling for et periodisk signal:

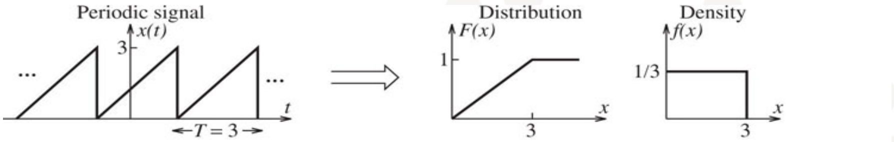


FIGURE 2.9 A periodic signal and its distribution and density functions. The signal varies linearly from 0 to 3. Thus, all values in the range are equally likely and the density function is a constant over this range. The constant is chosen to give unit area. The distribution is found by integrating the density function

Stasjonæritet, ergodisitet

- Stasjonært signal: statistiske egenskaper endrer seg ikke med tid
  - Forskjellige realiseringer har samme statistiske egenskaper
  - Konstant middelverdi og varians
- Hvis en kan finne middel og varians ved midling over tid i stedet for over realiseringer er prosessen ergodisk.
  - For en ergodisk prosess klarer det seg med én realisering – derfor antas ergodisitet ofte

---

Statistiske estimater: ergodisk prosess

- Ensemble middel:

$$E(x) = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \qquad \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx$$

- Ergodisk prosess, bruk tidsmiddel i stedet:
  - Middelverdi: AC effekt:

$$m_x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \qquad \sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - m_x)^2$$

Signal-støy forhold

- Signal med støy: x(t) = s(t) + An(t)
- Signaleffekt: $\sigma_s{}^2$
- Støyeffekt: $A^2\sigma_n{}^2$

- Signal-støy forhold i dB: $SNR = 10 \log \frac{\sigma_s^2}{A^2\sigma_n^2}$

Koherent midling av sinus i støy

- Anta M målinger som er koherente, dvs sinus kommer i samme fase i hver måling: $x_m(t)$=s(t)+A$n_m(t)$
- Estimat $\hat{x} = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x_m(t)$
  - Signalnivå blir det samme
  - Støyvarians $MA^2\sigma^2/M^2$ => SNR -> M·SNR

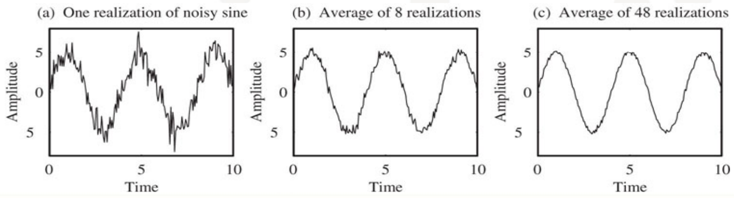


FIGURE 2.11 Coherent averaging of a noisy sine wave. Notice how the signal quality improves as the number of realizations to be averaged increases

Mål for kapittel 2: Diskrete signaler

1. Kunne transformere et diskret signal med tidskift og tidsreversering
2. Forstå like og odde symmetri og vite hvordan å finne de like og odde delene av et generelt signal
3. Forstå hvordan å klassifisere et signal basert på energi og effekt
4. Forstå grunnleggende interpolasjon og desimering
5. Vite definisjoner på standard signaler

Mål for kapittel 2: Diskrete signaler

6. Vite hvordan å finne den digitale frekvensen til en sinus eller en kompleks eksponensial
7. Vite hvordan å finne perioden til en sum av sinuser/komplekse eksponensialer
8. Forstå samplingsteoremet og vite hvordan bestemme samplingrate
9. Forstå aliasing og vite hvordan å finne de aliasede frekvensene
10. Forstå de målene som brukes for å karakterisere stokastiske signaler