INF3470 Digital signalbehandling

Tidsdomene analyse (kap 3 – del 1)

Sverre Holm

UNIVERSITETET I OSLO

Mål for kapittel 3: Systemer

1. Forstå linearitet, superposisjon, tidsinvarians og kausalitet
2. Vite hvordan å identifisere LTI (lineære tidsinvariante) systemer
3. Forstå terminologi og klassifisering av digitale filtre
4. Vite hvordan å sette opp en realisering av filtre
5. Vite at en differanseligning har to responser, en fra initialbetingelser og en fra input

8. september 2009 2

UNIVERSITETET I OSLO

Mål for kapittel 3: Systemer

6. Vite hvordan å finne impulsresponsen til et LTI system fra differanseligningen
7. Vite hvordan å konvertere mellom differanse-ligningen for et system og impulsresponsen
8. Vite hvordan å finne konvolusjon mellom sekvenser av endelig lengde
9. Vite hvordan å bruke definisjonen til å finne konvolusjon
10. Forstå egenskapene til konvolusjon og vite hvordan å bruke dem for å løse problemer

Mål for kapittel 3: Systemer

11. Vite hvordan å finne impulsresponsen til systemer i kaskade og i parallell
12. Forstå stabilitetsbegrepet
13. Vite hvordan å bestemme stabilitet fra differanseligning og impulserespons
14. *Forstå periodisk konvolusjon og hvordan å finne den for to signaler*
15. *Vite hvordan å finne krysskorrelasjon og autokorrelasjon*
16. *Forstå sammenhengen mellom konvolusjon og transform-metoder*

3.1 Tids-diskrete systemer

- Differanselikning,
  - Samme rolle som differensiallikning i analog signalbehandling
- $y[n] = \alpha\, y[n-1] + \beta\, x[n]$
  - Inn x[n], ut y[n]
  - α, β koeffisienter
- Lineære, tidsinvariante (LTI) systemer
  - Viktigste klasse systemer/filtre
  - Konstante koeffisienter

Operatorer

- Operator O(x[n]) = y[n]
  - Addisjon
  - Multiplikasjon med konstant
  - Forsinkelse z^{-m}
  - Alle tre: $O\{\cdot\} = 4z^{-3} + 6$
- Andre:
  - $O\{\cdot\} = x^2$
  - $O\{\cdot\} = C\{\cdot\} + D$ (legge til konstant)

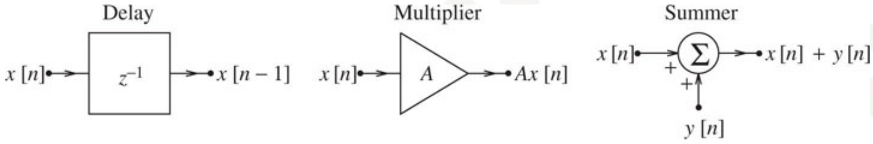
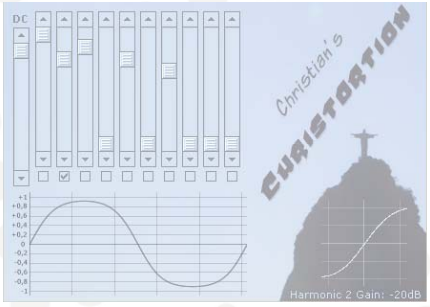


FIGURE 3.1 The building blocks for digital filter realization include delay elements (that can be cascaded), scalar multipliers, and summers

Linearitet

- [Winamp](#) med Christortion plug-in
  - Options, Preferences, Plug-ins, DSP/effects, VST Host DSP v1.0 for Winamp (bridge to VST plugins)
    - Christortion plugin: http://www.savioursofsoul.de/Christian/?page_id=8
    - Christortion manual
- Ikke-linearitet er ofte lettest å høre på stemme



Each of the eight sliders above adjust one harmonic (except the first being the fundamental frequency).

The checkboxes below act as 'Phase Invert' switch. If checked, the phase of the signal is inverted.

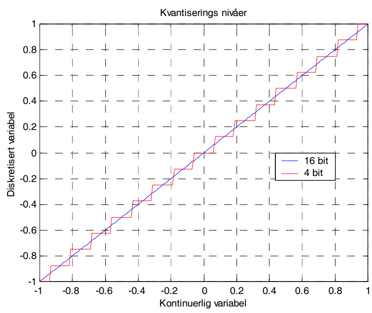
The chart on the bottom of the GUI gives a preview of how a simple sinewave is affected if running through the plugin.

Linearitet og superposisjon

- Formell notasjon:
  - Additiv: $O\{x_1[n] + x_2[n]\} = O\{x_1[n]\} + O\{x_2[n]\}$
  - Homogon eller skalerbar: $O\{Kx[n]\} = K\cdot O\{x[n]\}$
  - Superposisjon: de to sammen ⇔ linearitet: $O\{Ax_1[n] + Bx_2[n]\} = A\cdot O\{x_1[n]\} + B\cdot O\{x_2[n]\}$
- Alle filtre (FIR, IIR) er lineære
- Mange interessante effekter er det ikke:
  - Gitarvreng, ultralyd i kroppsvev, forsterkere/høyttalere som spiller for høyt, ...

Linearitet

- Er kvantisering en lineær operasjon?
  - $\approx$ lineær ved mange nok bit



- Er mpeg-koding av lyd en lineær operasjon?

Tidsinvarians

- Utgangen y[n] er bare avhengig av hva man putter inn, x[n] – og ikke når man gjør det.
- Formell notasjon:
  - $O\{x[n]\}=y[n] \Rightarrow O\{x[n-n_0]\}=y[n-n_0]$
- Alle filtre (FIR, IIR) er tidsinvariante
- Mange interessante effekter er det ikke:
  - Lydeffekter som flanging, phasing, chorus
- De kan likevel tolkes ved hjelp av filterteori
  - Tidsinvariante over kort tid

LTI

- LTI = Lineær og tidsinvariant
  - Mer generelt: skift-invariant (også romlige signaler og systemer)
- Forutsetning for beskrivelse med impulsrespons og frekvensrespons (via Fourier-transform)

- Sjekk av en operator O{·}:
  - Linearitet:
    - $O\{Ax_1[n] + Bx_2[n]\} = A \cdot O\{x_1[n]\} + B \cdot O\{x_2[n]\}$
  - Tidsinvariant:
    - $O\{x[n]\} = y[n] \Rightarrow O\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0]$

3.2 Digitale filtre

- N-te ordensdifferanselikning:
  - $y[n]+A_1y[n-1]+...+A_Ny[n-N]$
    $= B_0x[n] + B_1x[n-1] + ... B_Mx[n-M]$
  - Orden N (utgangsledd med maks forsinkelse)
  - Konstante koeffisienter ⇔ LTI
- Initial-betingelse 0:
  - $y[-1] = ... = y_N[-N] = 0$ => relaxed
- Input $\delta[n]$ => Impuls-respons h[n]
  - Pga superposisjon kan respons til et vilkårlig signal finnes ved hjelp av h[n]: konvolusjon

Ikke-rekursivt filter– FIR filter

- Generelt: $y[n]+A_1y[n-1]+...+A_Ny[n-N]$
  $= B_0x[n] + B_1x[n-1] + ... B_Mx[n-M]$

- Ikke-rekursivt filter: $y[n]= B_0x[n] + B_1x[n-1] + ... B_Mx[n-M]$
  - Orden M
  - Utgangen dannes fra forsinkede inngangsverdier
  - Kobler ikke tilbake: ikke-rekursivt
  - Kalles også Moving Average (MA)
    - Hvis alle $B_m = 1/(M+1)$ blir det middelverdi
  - Skal se at $h[n] = [B_0, ... B_M]$ og at h[n] er endelig: Finite Impulse Response Filter

Rekursivt filter – IIR filter

- Generelt: $y[n]+A_1y[n-1]+...+A_Ny[n-N]$
  $= B_0x[n] + B_1x[n-1] + ... B_Mx[n-M]$

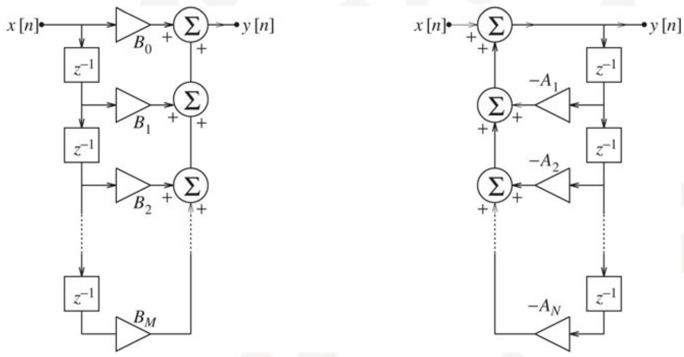
- Rekursivt filter: $y[n]+A_1y[n-1]+...+A_Ny[n-N] = B_0x[n]$
  - Orden N
  - Kobler tilbake: rekursjon, kalles også Autoregressivt (AR)
  - Skal se at h[n] blir ∞ lang: Infinite Impulse Response Filter

- Det mest generelle filteret er også rekursivt og IIR, kalles ARMA (autoregressive – moving average)
  - Utgangen avhenger av tidligere utgangsverdier, y, og også tidligere verdier av inngangen, x

Digitale filtre: realisering

- Multiplikasjon (gain), forsinkelse, summasjon

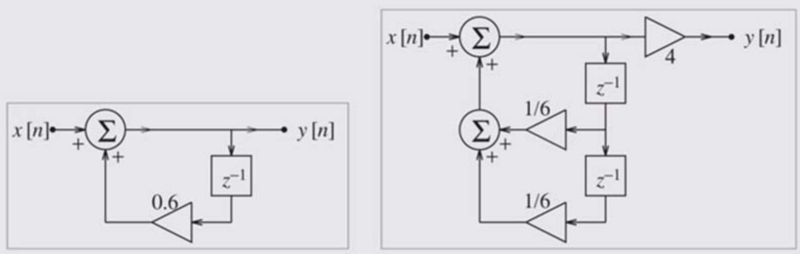
FIGURE 3.2 The realization of a nonrecursive digital filter (left) shows only feed-forward paths. The realization of a recursive digital filter (right) includes feedback paths



Drill 3.6

Sketch the realizations of the following systems
(a) $y[n] - 0.6y[n-1] = x[n]$ **(b)** $y[n] - \frac{1}{6}y[n-1] - \frac{1}{6}y[n-2] = 4x[n]$

Answer:



Filterrealisering – generell form

$y[n]+A_1y[n-1]+...+A_Ny[n-N]=B_0x[n] + B_1x[n-1] + ... B_Mx[n-M]$

- Ekvivalente (pga linearitet)

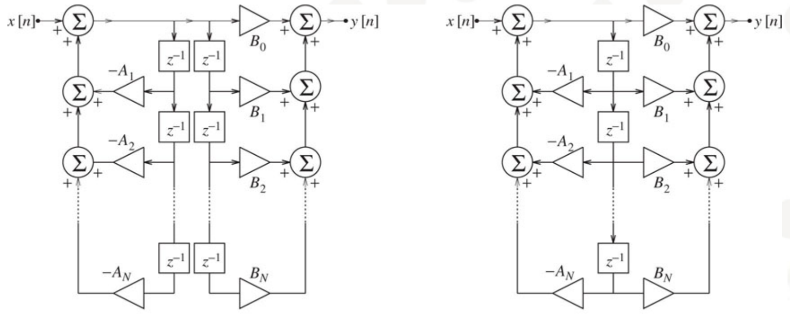
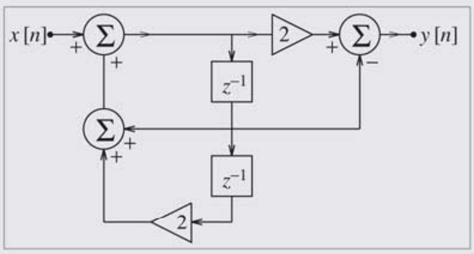


FIGURE 3.3 The direct (direct form I) realization of an Nth-order difference equation (left) requires $2N$ delay elements. The canonical (direct form II) realization the same difference equation requires only N delay elements

Drill 3.7

What is the difference equation of the digital filter whose realization is shown?



3.3 Respons: ikke-rekursive filtre (FIR)

- $y[n]= B_0x[n] + B_1x[n-1] + \ldots . B_Mx[n-M]$
  - Veiet sum av forsinkede input samples
- Eks $y[n]= 2x[n] - 3x[n-2]$
  - Hva er B_0, B_1, B_2?
  - Input $x[n]=0.5^n u[n]$. Hva er $y[1]$ og $y[2]$?

Respons: Rekursive filtre (IIR)

$y[n]+A_1y[n-1]+\ldots+A_Ny[n-N]=B_0x[n] + B_1x[n-1] + \ldots . B_Mx[n-M]$

- Skriver om så utgangen blir:

$y[n]=-A_1y[n-1]-\ldots-A_Ny[n-N]+ B_0x[n] + B_1x[n-1] +\ldots+B_Mx[n-M]$

- Initialbetingelser for å finne y[n]: y[n-1], ..., y[n-N]

Eks: Rekursivt filter

- $y[n]=a_1y[n-1] + b_0x[n]$
  - $x[n] = u[n]$
  - $y[-1] = 0$

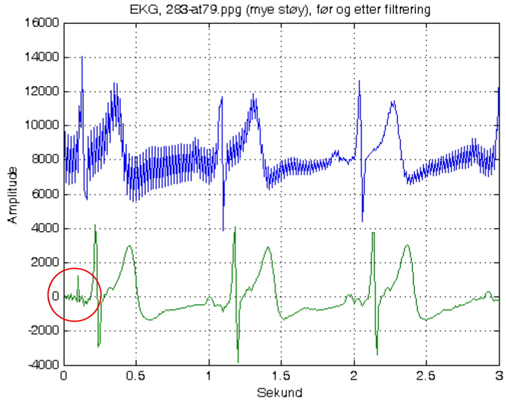
- Utgangen:
  - $y[0] = a_1\ 0+b_0\ 1 = b_0$
  - $y[1] = a_1\ b_0 + b_0 = b_0[1+a_1]$
  - $y[2] = a_1\ b_0[1+a_1] + b_0 = b_0[1+a_1+a_1^2]$
  - ...
  - $y[n] = b_0[1+a_1+a_1^2+ ...+ a_1^n]$
  - Endelig geometrisk rekke: $y[n]=b_0\ (1-a_1^{n+1})/(1-a_1)$

3.4 Løsning av differenselikninger

- Samme metode som for differensiallikninger
- Total respons =
  - Homogen + inhomogen løsning
  - Naturlig respons + tvunget respons
  - Transient respons + stasjonær respons

- $y[n]= y_N[n]+y_F[n]$

Transient: EKG - Før og etter filtrering



Eks fra første forelesing
Se nøyere på starten av det filtrerte signalet.

- Fsample=100 Hz
- FIR Filterlengde N=20
  - 20/100 sek = 200 ms

- Uønskede effekter:
  - Nulling
  - Smell (lyd)
- Blokkprosessering med uønsket effekt ved hver blokkgrense

- Kan bli enda mer med IIR-filter

UNIVERSITETET I OSLO

Transient respons

- Må løse karakteristisk likning og finne røtter
  - N'te ordens: $y[n]+A_1y[n-1]+...+A_Ny[n-N]=x[n]$
  - => karakteristisk likning: $1+A_1 z^{-1}+...+A_N z^{-N}=0$
    - N røtter $z_1, z_2, ..., z_N$
    - Transient løsning har form $y_N[n]=K_1z_1^{\,n} + K_2z_2^{\,n} +...+ K_N z_N^{\,n}$

Entry	Root of Characteristic Equation	Form of Natural Response
1	Real and distinct: r	Kr^n
2	Complex conjugate: $re^{j\Omega}$	$r^n[K_1\cos(n\Omega)+K_2\sin(n\Omega)]$
3	Real, repeated: r^{p+1}	$r^n(K_0+K_1n+K_2n^2+\cdots+K_pn^p)$
4	Complex, repeated: $(re^{j\Omega})^{p+1}$	$r^n\cos(n\Omega)(A_0+A_1n+A_2n^2+\cdots+A_pn^p)+$ $r^n\sin(n\Omega)(B_0+B_1n+B_2n^2+\cdots+B_pn^p)$

UNIVERSITETET I OSLO

Stasjonær respons

- Skyldes inngangssignalet
- Utgang har samme form som inngangen:

Entry	Forcing Function (RHS)	Form of Forced Response
1	C_0 (constant)	C_1 (another constant)
2	α^n (see note above)	$C\alpha^n$
3	$\cos(n\Omega+\beta)$	$C_1\cos(n\Omega)+C_2\sin(n\Omega)$ or $C\cos(n\Omega+\phi)$
4	$\alpha^n\cos(n\Omega+\beta)$ (see note above)	$\alpha^n[C_1\cos(n\Omega)+C_2\sin(n\Omega)]$
5	n	C_0+C_1n
6	n^p	$C_0+C_1n+C_2n^2+\cdots+C_pn^p$
7	$n\alpha^n$ (see note above)	$\alpha^n(C_0+C_1n)$
8	$n^p\alpha^n$ (see note above)	$\alpha^n(C_0+C_1n+C_2n^2+\cdots+C_pn^p)$
9	$n\cos(n\Omega+\beta)$	$(C_1+C_2n)\cos(n\Omega)+(C_3+C_4n)\sin(n\Omega)$

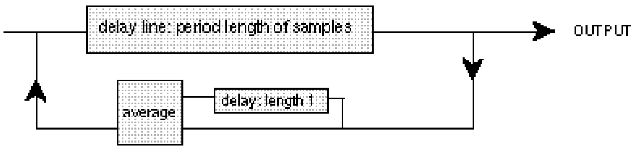
NOTE: If the right-hand side (RHS) is α^n, where α is also a root of the characteristic equation repeated p times, the forced response form must be multiplied by n^p.

3.5 0-input og 0-tilstands respons

- Alternativ måte for løsning av differanse likning:
  - Respons pga initialbetingelser: 0-input respons: $y_{zi}[n]$
  - Respons pga input alene (0 i initialbetingelser): $y_{zs}[n]$
- Totalrespons $y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$
- Likner forrige metode: $y[n]= y_N[n] + y_F[n]$
  - Men $y_{zi}[n] \neq y_N[n]$ og $y_{zs}[n] \neq y_F[n]$

Lydsyntese: filter uten inngang

- 1979 K. Karplus og A. Strong, Stanford Un.
- Gitar-liknende lyd
- y[n] - 0.5*(y[n-N] + y[n-N-1]) = 0

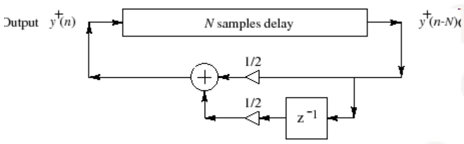


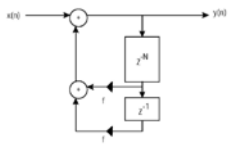
Karplus-Strong algoritmen

- N bestemmer tonehøyde:
  - 440 Hz og fs = 44100 samples/sekund ⇒ P=44100/440=100,22≈100 samples
- y[n], y[n-1], ⋯, y[n-N], må initialiseres med tilfeldige tall og utgangen taes fra y[n-N].
- Høye harmoniske dør ut raskt, lave varer lengre
- Analyse og varianter:
  - Karplus, K. and Strong, A., Digital synthesis of plucked-string and drum timbres, Computer Music Journal, pp. 43-55,1983
  - http://www.music.mcgill.ca/~gary/courses/papers/Karplus-Strong-CMJ-1983.pdf

Differanseligning for Karplus-Strong

- Rekursiv differanseligning: y[n] - 0.5*(y[n-N] + y[n-N-1])=0
  - Intet inngangssignal
  - *Utgangen er en effekt av transienten etter de tilfeldige tallene som er i hele forsinkelseslinjen*
  - På grensen av å være et ustabilt system





  - http://ccrma.stanford.edu/realsimple/faust_strings/Karplus_Strong_Digitar_Algorithm.html
  - http://focus.ti.com/lit/an/spra252/spra252.pdf
  - http://lab.andre-michelle.com/karplus-strong-guitar : Bra demo

UNIVERSITETET I OSLO

Karplus0.m

```
function out = Karplus0(tid, tone, plott)
%
% Karplus-Strong, basic version
%
% tid  in seconds
% tone in Hertz
% plott = 1 for plot and sound
fs=44100;
if nargin == 0
   time = 2*fs;
else
   time = tid *fs; % no of samples
end
if nargin <= 1
   tone = 440; % Hz
end
if nargin <=2
   plott = 0;
end
```

```
length = fix(fs/tone);
out = zeros(time,1);
table = randn(length+1,1);
% initialize output buffer:
out(1:length) = table(2:length+1);
maxloop = fix(time/length);
for loop = 2:maxloop
   table(2:length+1) =
   0.5*(table(2:length+1) + table(1:length));
   out((loop-1)*length + 1: loop*length) =
   table(2:length+1);
end
if (plott == 1)
   soundsc(out,fs)
   figure(1);plot(out)
   figure(2);
   spectrogram(out,512,128,512,fs,'yaxis')
end
```

UNIVERSITETET I OSLO

3.6 Impulsrespons

- Viktigste karakterisering av et filter
  - Null som initialbetingelser
- Viktigste verktøy for beregning av respons
- Lengden avhenger av IIR, FIR (∞ lang eller ikke)

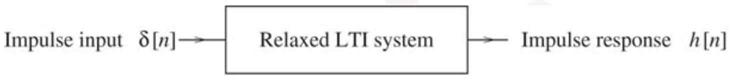


FIGURE 3.4 The impulse response $h[n]$ of a system is the output if the input is the unit impulse $\delta[n]$. It is defined only for relaxed systems (whose initial conditions are zero) and useful primarily for LTI systems

UNIVERSITETET I OSLO

FIR impulsrespons (ikke-rekursivt filter)

- $y[n] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] + \ldots . B_M x[n-M]$
  - La x[n] være δ[n]
- Impulsrespons:
  $h[n] = B_0 \delta[n] + B_1 \delta[n-1] + \ldots . B_M \delta[n-M]$
- $h[n] = \{B_0, B_1, \ldots, B_M\}$ = filterkoeffisientene –lett!
  - Finite Impulse Response filter
  - Ikke-rekursivt filter
  - Transversalt filter

UNIVERSITETET I OSLO

Impulsrespons for rekursivt filter (IIR)

- Noen få koeffisienter kan generere ∞ lang h[n]

- Eks h[n] gitt som et uttrykk
  - Filter gitt ved $y[n] - \alpha\, y[n-1] = x[n]$
  - Løs $h[n] = \delta[n] + \alpha h[n-1]$ med $h[-1]=0$
  - Rekursjon:
    - $h[0] = 1$ – eneste ledd der inngangen har noen verdi
    - $h[1] = \alpha$
    - $h[2] = \alpha^2$
    - ...
    - $h[n] = \alpha^n\, u[n]$ (Husk u[n] da løsningen er bare for $n \geq 0$)
  - Hva slags filter? lavpass for $0<\alpha<1$, høypass for $-1<\alpha<0$

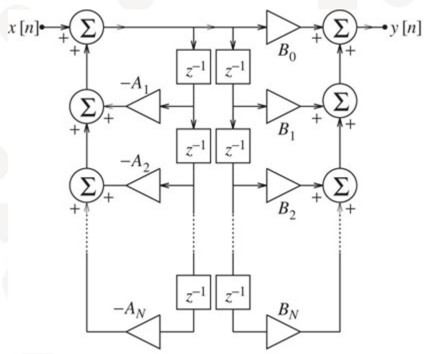
Impulsrespons for rekursivt filter (IIR)

Generelt IIR med ikke-rekursiv del også:

- $y[n]+A_1y[n-1]+\ldots+A_Ny[n-N]=B_0x[n] + B_1x[n-1] + \ldots\ .\ B_Mx[n-M]$

Del i to:

1. Rekursiv del
2. Ikke-rekursiv del



Impulsrespons for rekursivt filter (IIR)

Generelt IIR med ikke-rekursiv del også:

- $y[n]+A_1y[n-1]+...+A_Ny[n-N]=B_0x[n] + B_1x[n-1] + ... B_Mx[n-M]$

1. Finn impulsresponsen, $h_0[n]$, til den rekursive delen $y[n]+A_1y[n-1]+...+A_Ny[n-N]=x[n]$ ved å løse
   - $h_0[n]+A_1h_0 [n-1]+...+A_Nh_0 [n-N]=0$ med $h_0[0]=1$

2. Bruk så superposisjon og inkluder den ikke-rekursive delen $h[n] = B_0h_0[n] + B_1h_0[n-1] + ... B_Mh_0[n-M]$

Eks 3.12

$y[n] – 0.6\ y[n-1] = 3x[n+1] - x[n]$

1. Start med rekursivt system $y[n]-0.6\ y[n-1]=x[n]$
   - Tidligere: $y[n] - \alpha\ y[n-1] = x[n] \Rightarrow h[n]=\alpha^n u[n]$ så da blir $h_0[n]=0.6^n u[n]$
2. Send $h_0[n]$ gjennom ikke-rekursiv del:
   - $h[n] =3h_0[n+1] - h_0[n] = \underline{3\cdot 0.6^{n+1} u[n+1] - 0.6^n u[n]}$

   - Tegn opp så ser man at det også kan skrives som $h[n] = 3\ \delta[n+1] + 3\cdot 0.6^{n+1} u[n] - 0.6^n u[n] =$ $\underline{3\ \delta[n+1] + 0.8\cdot 0.6^n u[n]}$
   - Kausal eller ikke-kausal?

3.7 Systembeskrivelser

- Rekursive filtre er ikke alltid IIR!
- Eks 3.14a) y[n] = y[n-1] +x[n]-x[n-3]
  - Impulsrespons: x[n]=δ[n] og y[-1]=0:
    - y[0]=0+1-0 = 1, y[1]=1+0+0 = 1
    - y[2]=1+0+0 = 1, y[3] =1+0-1 = 0
    - y[4]=0+0+0 = 0, y[5]=0+0+0 = 0, osv
  - Dette er jo et FIR filter! y[n]=x[n]+ x[n-1]+ x[n-2]
  - Finnes noen ganger en rekursiv form for et ikke-rekursivt system
  - NB! Filtre med like koeffisienter og verdi=1, som her, kan være på grensen av stabilitet og ikke helt numerisk gode å ha med å gjøre

Systembeskrivelser

- Å finne differanselikning fra impulsresponsen:
  - Lett for FIR: h[n] = {B_0, B_1, ... , B_M}
  - Generelt for rekursivt system: Kan gjøres, men mye lettere ut fra Z-transform
  - Eks: h[n]=3· 0.6^n u[n]
    - Kjenner igjen formen y[n] - α y[n-1] = x[n] ⇔ h[n]=α^n u[n]
    - => y[n] – 0.6 y[n-1] = 3x[n]

3.8 Eksempler på filtre

- Moving average (MA): middelverdi av naboene:
  - Kausalt FIR filter

$$y[n] = \frac{1}{L}(x[n]+x[n-1]+x[n-2]+...+x[n-(L-1)]) = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1} x[n-k]$$

  - Glattefilter, glatte bort støy – jo lenger filter jo mer glatting
  - Lavpassfilter med impulsrespons:

$$h[n] = \frac{1}{L}\{1,1,1,...,1,1\}$$

MA filter: L=10 og L=50 på N=50 perioders sinus i støy

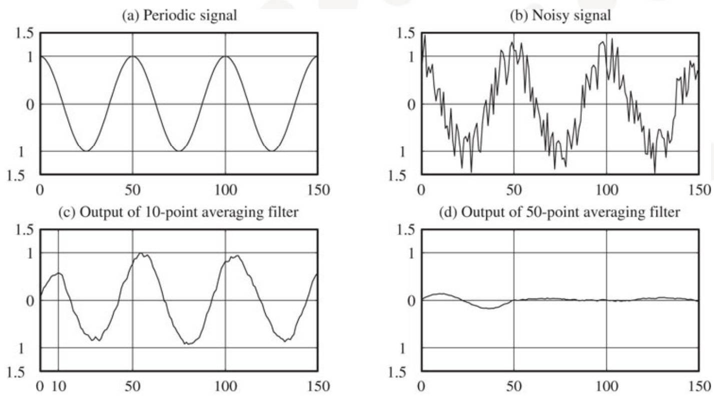


FIGURE 3.5 The response of two averaging filters to a noisy sinusoid. The 10-point averaging filter results in a smoothing of the signal as expected. Since the sinusoid has a period of 50 samples, the 50-point averaging filter yields zero output (average of 50 successive samples) for the sinusoid and all we see is just the start-up transient and the 50-point average of the noise

Inverse systemer

- ’Opphever’ effekten av et tidligere filter
  - Mikrofon som har dårlig respons i bass/diskant ⇒ invers filter for å rette opp
  - Effekten av et rom på lyd ⇒ invers filter gir tilbake lyden som den ”var ment” å være
  - Seismikk

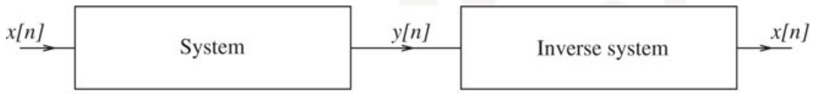


FIGURE 3.6 A system and its inverse. An input $x[n]$ to the system results in an output $y[n]$. The inverse system is then used to recover the original signal $x[n]$

Seismikk

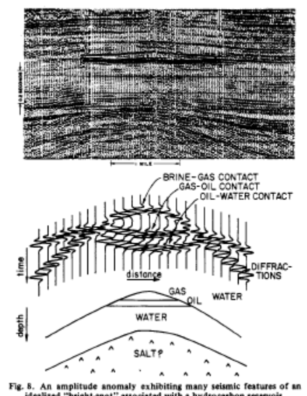
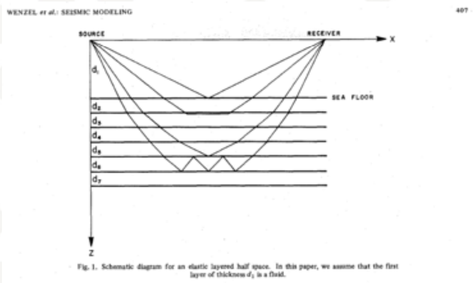


Fig. 8. An amplitude anomaly exhibiting many seismic features of an idealized "bright-spot" associated with a hydrocarbon reservoir.



Wood, L.C.; Treitel, S., "Seismic signal processing," Proc IEEE , April 1975

Wenzel, Seismic modeling in the domain of intercept time and ray parameter, IEEE Trans Acous., speech, Sign. Proc., 1982

8. september 2009 46

Marin seismikk, luftkanon

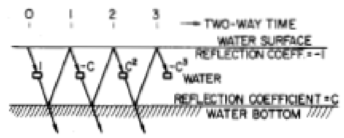
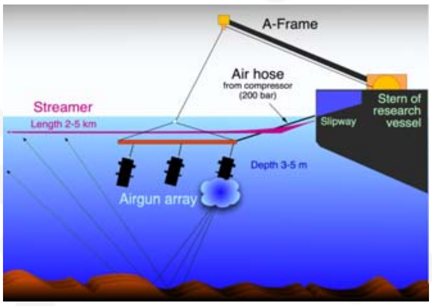


Fig. 10. Reverberations in the water layer where ray paths have been drawn as slanted lines in order to illustrate time dependence [33].

Etterklang mellom vann-bunn i marin seismikk

Wood, L.C.; Treitel, S., "Seismic signal processing," Proc IEEE , April 1975



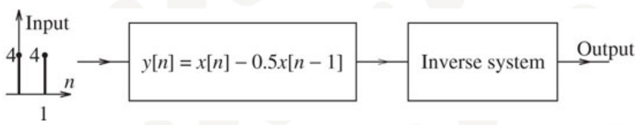
Luftkanonen har en pulsform som 'farger' ekko fra sedimentene ⇒ fjernes ved inversfilter

Wikipedia commons: Airgun-array hg.png

Inverse systemer

- Bytte om inngangs- og utgangs-variable

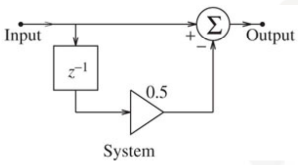
FIGURE E.3.16.a(1) The interconnected system for Example 3.16(a)

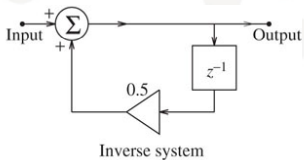


FIR:

IIR: Speilet og med snudd fortegn på tilbakekobling

FIGURE E.3.16.a(2) Realization of the system and its inverse for Example 3.16(a)





Inverse systemer

- System $y[n] = x[n] - 0.5x[n-1]$
- Hypotese: invers er $x[n] = y[n] - 0.5y[n-1]$
- Impulsrespons av system 1: $h_1[n] = \delta[n]-0.5\delta[n-1]$
- Send dette inn på system 2: $y[n] = 0.5y[n-1]+x[n]$
  - $y[0] = 0.5 \cdot 0 + 1 = 1$
  - $y[1] = 0.5 \cdot 1 + (0-0.5) = 0$
  - $y[2] = 0.5 \cdot 0 + (0-0) = 0$ osv
  - $y[n] = \delta[n]$, det samme som ble sendt inn på filter 1
- Så $x[n] = y[n] - 0.5y[n-1]$ er det inverse filteret

Inverse filtre – betingelser for inverterbarhet

- Et FIR filter kan alltid inverteres til et IIR filter, men ikke alltid motsatt
  - Se drill problem 3.20b
- Systemet må være entydig: forskjellige inngangsverdier må gi forskjellige utgangsverdier
  - Ikke-lineært system $y[n]=x[n]^2$ er ikke entydig
  - Desimeringssystem $y[n]=x[2n]$ er lineært, men ikke tidsinvariant
    - $x_1=\{1,2,4,5\}$ og $x_2=\{1,3,4,8\}$ gir begge $y[n]=\{1,4\}$ – ikke entydig