UNIVERSITETET I OSLO

Time 4: *z*-transformasjonen

Andreas Austeng@ifi.uio.no, INF3470

Ifi/UiO

September 2009

UNIVERSITETET I OSLO

Dagens temaer

z-dometet; ett av tre domener

z-transformasjonen; definisjon og egenskaper

$H(z)$; systemfunksjonen og implementasjoner

UNIVERSITETET I OSLO

Tema

z-dometet; ett av tre domener

UNIVERSITETET I OSLO

3 domener

- Vi kan analysere digitale systemer i tre forskjellige domener:
  - *n*-domenet eller tidsdomenet
    - Domenet for sekvenser, impulsresponser og differens likninger.
    - Signaler er generert og prosessert i dette domenet.
    - Filtre er implementert i dette domenet.
  - Ω-domain eller frekvensdomenet
    - Domenet for frekvensresponsen & spektrumrepresentasjon, og tolking av disse!
    - Viktig for analyse av f.eks lyd, men sjelden benyttet til implementasjon (i HW).
  - *z*-domenet
    - Domenet for *z*-transformasjonen, operatorer, poler & nullpunkter.
    - Eksisterer primært fordi det muliggjør en matematisk analyse & syntese.

Hvorfor flere domener???

- Vanskelige analyser i et domene *kan* være enklere i et annet domene ...
- Flere domener *kan* gi bedre innsikt ...
- Eksempel:
  Kaskadekombinasjon av LTI-systemer:
  - n-domenet: Introduserte “ny” (og mindre kjent) teknikk kalt konvolusjon.
  - I z-domentet: Reduseres til polynomsk multiplikasjon.

  Stabilitet:
  - n-domenet: BIBO.
  - z-domenet: Enhetssirkelen inneholdt i ROC.

  Kausalitet
  - n-domenet: Kun benytte tidligere og nåtids sampler.
  - z-domenet: Alle poler innenfor ROC.

Tema

z-transformasjonen; definisjon og egenskaper
- Definisjon
- ROC
- Egenskaper

Definisjon av z-transformasjonen

- $X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$,
  hvor $z = Re^{\jmath 2\pi F} = Re^{\jmath\Omega}$ er en kompleks variabel.
- En uendelig potensrekke (??); eksisterer kun for de verdiene av z hvor rekken konvergerer
  $\Rightarrow$ Region Of Convergence (ROC);
  den mengen av argumenter hvor $X(z)$ antar en endelig verdi.
- Notasjon:

$$x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$$

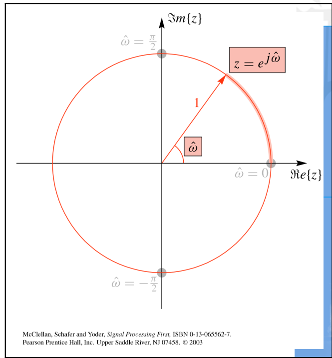
$$x[n] \Leftarrow \boxed{\mathrm{ZT}} \Rightarrow X(z)$$

Definisjon av z-transformasjonen ...

- z-transformasjonen er en funksjon av en kompleks variabel; illustreres i det komplekse z-planet.
- $z = \Re(z) + \jmath\Im(z) = Re^{-\jmath n\Omega}$
- z-transformasjonen evaluert på enhetssirkelen tilsvarer DTFT (tema for kapittel 5):

$$X(e^{\jmath\Omega}) = X(z)|_{z=e^{\jmath\Omega}}$$

- Hvis DTFT'en eksisterer, så er enhetssirkelen inneholdt i ROC



Example (Drill problem 4.2)

```
% Script som plotter X(z), Y(z)  og G(z) funnet i Drill Problem 4.2, side 141.

% Setter opp akser og et "meshgrid"
ax = -10:1/100:10; ay = -10:1/100:10;
[xs,ys] = meshgrid(ax,ay);

% Finner verdien til z, dvs z = R*exp(j*Omega), Omega \in [-\pi..\pi)
z = sqrt(xs.^2 + ys.^2) .* exp(j*atan2(ys,xs));

%% X(z) fra 4.2a
X = z ./ ( z-0.5);
X(xs.^2 + ys.^2 <= 0.5.^2) = NaN;

figure(1); meshz(ax,ay,abs(X)); xlabel('Re(z)'); ylabel('Im(z)');
%%
zlim([0 5]); caxis([0 5])

%% Y(z) fra 4.2a
Y = z ./ ( z+0.5);
Y(xs.^2 + ys.^2 <= 0.5.^2) = NaN;

figure(2); mesh(ax,ay,abs(Y)); xlabel('Re(z)'); ylabel('Im(z)');
%%
zlim([0 5]); caxis([0 5])

%% G(z) fra 4.2c
G = z ./ (z - 0.5);
G(xs.^2 + ys.^2 >= 0.5.^2) = NaN;
figure(3); meshz(ax,ay,abs(G)); xlabel('Re(z)'); ylabel('Im(z)');
%%
axis([-1 1 -1 1 0 5]); caxis([0 5])
```


ROC

- Gitt endelig lengde sekvens $x[n]$. Da er $X(z)$ et polynom i z eller z^{-1} ($X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}$) som konvergerer for alle z bortsett fra
  - i $z = 0$, hvis $X(z)$ inneholder ledd på formen z^{-n}
  - i $z = \infty$, hvis $X(z)$ inneholder ledd på formen z^{n}

  $\Longrightarrow X(z)$ endelig for hele planet med mulig untak for $z = 0$ og $z = \infty$.
- Mer generelt, så er $X(z)$ en rasjonell funksjon:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Rasjonell z-transformasjon

- $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$.
- Hvis $a_0 \neq 0$ og $b_0 \neq 0$, så kan vi ungå negative eksponenter av z ved å faktorisere ut leddene $b_0 z^{-M}$ og $a_0 z^{-N}$:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^{-M}}{a_0 z^{-N}} \frac{z^M + (b_1/b_0)z^{M-1} + \cdots + b_M/b_0}{z^N + (a_1/a_0)z^{N-1} + \cdots + a_N/a_0}$$

$$= \frac{b_0 z^{-M}}{a_0 z^{-N}} \frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}$$

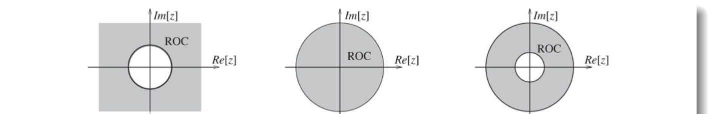
$$= \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{\Pi_{k=1}^{M}(z-z_k)}{\Pi_{k=1}^{N}(z-p_k)}$$

Rasjonell z-transformasjon ...

- $X(z) = \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{\Pi_{k=1}^{M}(z-z_k)}{\Pi_{k=1}^{N}(z-p_k)}$
  - M endelige nullpkt $z = z_1, z_2, \ldots, z_M$.
  - N endelige poler $z = p_1, p_2, \ldots, p_M$.
  - $|N - M|$ nullpkt (hvis $N > M$) eller poler (hvis $N < M$) i origo $z = 0$.
  - Poler og nullpkt kan forekomme i $z = \infty$. Et nullpkt ekstisterer i $z = \infty$ hvis $X(\infty) = 0$ og en pol eksisterer i $z = \infty$ hvis $X(\infty) = \infty$.
  - Teller vi med alle poler og nullpunkter i origo og uendelig, finner vi at $X(z)$ har like mange poler som nullpunkter.
  - ROC kan ikke inneholde poler!
  - Hvis alle poler/nullpkt er kjent kan vi bestemme $X(z)$ på en konstant nær ($\frac{b_0}{a_0}$).

ROC ...

- ROC generelt en annulus på formen $\alpha < |z| < \beta$.
  - Hvis $\alpha = 0$, kan ROC også inneholde punktet $z = 0$.
  - Hvis $\beta = 0$, kan ROC også inneholde punktet $z = \infty$.
- Endelig tid signaler
  - Kausal: Hele z-planet untatt $z = 0$.
  - Anti-kausal: Hele z-planet untatt $z = \infty$.
  - Tosidig: Hele z-plane untatt $z = 0$ og $z = \infty$.
- Uendelig lengde signaler
  - Kausal: $r_1 < |z|$
  - Anti-kausal: $|z| < r_2$
  - Tosidig: $r_1 < |z| < r_2$



ROC (shaded) of right-sided signals — ROC (shaded) of left-sided signals — ROC (shaded) of two-sided signals

Egenskaper til z-transformasjonen

- Linearitet:
  $Z\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$;
  ROC: minst $\mathrm{ROC}_{x1} \cap \mathrm{ROC}_{x2}$.
- Shifting i tid:
  $Z\{x[n - n_0]\} = z^{-n0} X(z)$;
  ROC $=$ ROC$_x$, med mulig untak at punktene $z = 0$ $z = \infty$ kan legges til eller fjernes.
- Skifting i frekvens:
  $Z\{a^n x[n]\} = X(\frac{z}{a})$;
  ROC $=$ ROC$_x$ skalert med $|a|$.

Egenskaper til z-transformasjonen ...

- Tidsreversering:
  Hvis $Z\{x[n]\} = X(z)$; ROC : $r_1 < |z| < r_2$,
  så er $Z\{x[-n]\} = X(z^{-1})$;
  ROC : $1/r_2 < |z| < 1/r_1$.
- Derivering i z-domenet:
  $Z\{nx[n]\} = -z\frac{dX(z)}{dz}$;
  ROC $=$ ROC$_x$.
- Konvolusjon av to sekvenser:
  $Z\{x_1[n] * x_2[n]\} = X_1(z) X_2(z)$;
  ROC : $\mathrm{ROC}_{x1} \cap \mathrm{ROC}_{x2}$.
  ROC kan være større hvis det forekommer pol-nullpkt kansellering i produktet $X_1(z)X_2(z)$.

Egenskaper til z-transformasjonen ...

- Kompleks konjugering:
  $Z\{x^*[n]\} = X^*(z^*)$;
  ROC $=$ ROC$_x$.
- “The initial value” teoremet:
  Hvis $x[n]$ kausal, så er $x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$.

UNIVERSITETET I OSLO

Tema

$H(z)$; systemfunksjonen og implementasjoner

- System transferfunksjonen
- Koblede systemer
- Operator- og blokknotation
- Blokkdiagramer

UNIVERSITETET I OSLO

"The transfere function" eller systemfunksjonen

- $Y(z) = H(z)X(z)$.
- $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-1}$ og $h[n]$ er ekvivalente beskrivelse av et system i forskjellige domener.
- $H(z)$ kalles *system transfere function* eller bare *systemfunksjonen*.

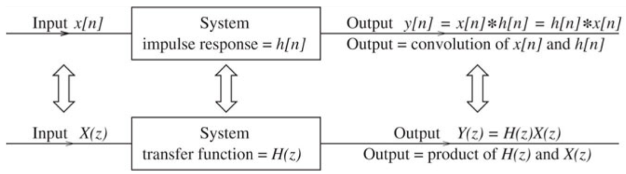


FIGURE 4.3 System description in the time domain and z-domain. In the time domain, the system output is found by the convolution of $x[n]$ and $h[n]$. In the z-domain, the transformed output $Y(z)$ is found by the product of $X(z)$ and $H(z)$. Convolution in one domain transforms to multiplication in the other

UNIVERSITETET I OSLO

"The transfere function" eller systemfunksjonen ...

- Lineær konstant-koeffisient differanse linkning:

  $y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$ gir

  $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$.
- Hvis $a_k = 0$ for $k = 1..N$; *all-zero system*/ FIR system / MA system.
- If $b_k = 0$ for $k = 1..M$; *all-pole system*/ IIR system.
- Generell form; *pole-nullpunkt system*/ IIR system.

UNIVERSITETET I OSLO

Koblede systemer

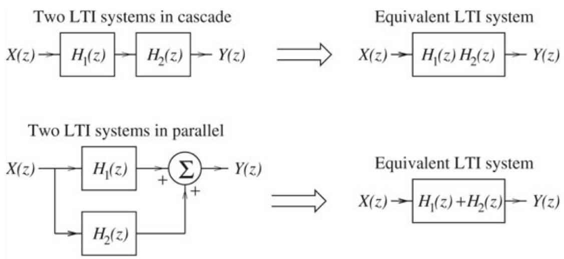
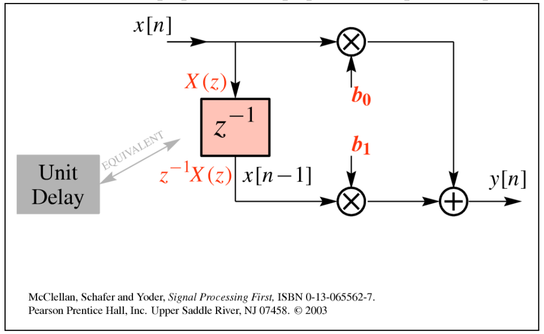


FIGURE 4.4 The equivalent transfer function of systems in cascade is the product of the individual transfer functions. The equivalent transfer function of systems in parallel is the sum of the individual transfer functions

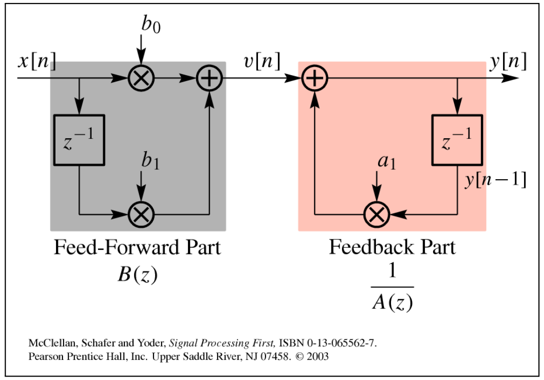
Operatornotation

- En forsinkelse på ett sampel tilsvarer mult. med z^{-1}
  - $x[n-1] \Leftarrow \boxed{\text{ZT}} \Rightarrow z^{-1}X(z)$
  - Refererer til dette som unit-delay property.
- Blokknotation av $y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$



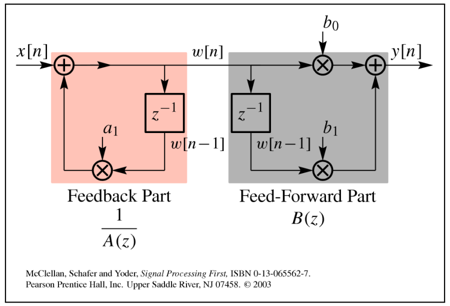
Direkte form I struktur

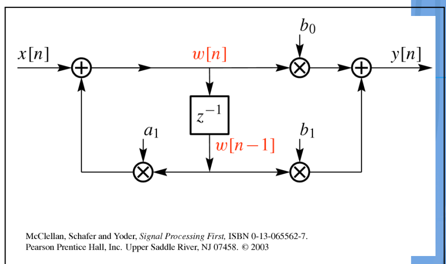
- Gitt systemfunksjonen $H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$.
  - Faktorisering av denne i en FIR og en IIR del gir
    $H(z) = (b_0 + b_1 z^{-1}) \left(\frac{1}{1 - a_1 z^{-1}}\right) = B(z)\left(\frac{1}{A(z)}\right)$
  - Kaskadekobling av de to delene gir



Direkte form II struktur

- Ved bytting av rekkefølgen på "IIR" og "FIR" delen fås;
  $H(z) = \left(\frac{1}{A(z)}\right) B(z)$:





Transponert form

- Med utgangspkt i en *Direkte form struktur* (vanligvis DF II):
  1. Bytt retning på alle piler (og behold multiplikatorer).
  2. La alle "samlepunkt" bli "summepunkt" og vv.
  3. Bytt roller til inngang og utgang.