Time 6: Analyse i frekvensdomenet

Andreas Austeng@ifi.uio.no, INF3470

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

Oktober 2009

Dagens temaer

Fra forrige gang

Frekvensrespons funksjonen

Fourier rekker og transformer

Egenskaper til DT Fourier transform

LTI systemer som frekvens-selektive filtre

Tema

Fra forrige gang
- z-transformasjonen
- DTFT; Diskret tid Fourier transformasjon

z-transformasjonen

- Definisjon; formel + ROC
- Egenskaper
- Drøfte systemer vha z-transformen
- Invers z-transformasjon
- Poler og nullpunkter

Egenfunksjoner til et LTI system

- La
$$x[n] = e^{\jmath n\Omega}, \quad -\infty < n < \infty, \quad \Omega \in [-\pi, \pi].$$
- Da er
$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{\jmath\Omega(n-k)} = e^{\jmath n\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-\jmath k\Omega} \\ &= H(\Omega)e^{\jmath n\Omega} = H(\Omega)x[n]. \end{aligned}$$
- dvs at egenfunksjonen til et LTI system er
$$x[n] = e^{\jmath n\Omega}, \quad -\infty < n < \infty, \quad \Omega \in [-\pi, \pi].$$
- og egenverdien, benevnt $H(\Omega)$, er
$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-\jmath k\Omega}.$$

Diskret tid Fourier transform; DTFT

Notasjon:

- Analyse : $X(\Omega) \equiv \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-\jmath\Omega n}$.
- Alternativt: $X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-\jmath 2\pi Fn}$.
- Syntese : $x[n] \equiv \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{\jmath\Omega n}d\Omega$.
- Alternativt: $x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(F)e^{\jmath 2\pi nF}dF$.
- $x[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\Omega)$.

Tema

Frekvensrespons funksjonen

Frekvensresponen til LTI system

- Hvis inngangssignalet er en kompleks eksponensial $x[n] = Ae^{\jmath\Phi}e^{\jmath\Omega n}$, blir utgangssignalet
$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]Ae^{\jmath\Phi}e^{\jmath\Omega(n-k)} \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-\jmath\Omega k}\right) Ae^{\jmath\Phi}e^{\jmath\Omega n} \\ &= H(\Omega)Ae^{\jmath\Phi}e^{\jmath\Omega n} \qquad -\infty \le n < \infty \end{aligned}$$
hvor
$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-\jmath\Omega k}.$$
- $H(w)$: Egenverdi til LTI system,
$Ae^{\jmath\Phi}e^{\jmath\Omega n}$: Egenfunksjonen til LTI systems.
- $H(\Omega)$ og $h[n]$ er relatert på en unik måte.

$H(\Omega)$: Frekvensresponsen

- $H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-\jmath k \Omega}$.
- $H(\Omega)$ er en funksjon av frekvensvariabelen Ω.
- $H(\Omega)$ er, generelt, en kompleks størrelse, og kan skrives som:
  - Reell og imaginær del: $H(\Omega) = H_R(\Omega) + \jmath H_I(\Omega)$ eller
  - Magnitude og fase: $H(\Omega) = |H(\Omega)| e^{\jmath \Theta(\Omega)}$,
  - hvor $|H(\Omega)|^2 = H(\Omega) H^*(\Omega) = H_R^2(\Omega) + H_I^2(\Omega)$
  - og $\Theta(\Omega) = \tan^{-1} \frac{H_I(\Omega)}{H_R(\Omega)}$.
- Gruppeforsinkelsen (eller envelopeforsinkelsen) til H: $\tau_g(\Omega) = -\frac{d\Theta(\Omega)}{d\Omega}$.
  - `http://en.wikipedia.org/wiki/Group_velocity/`
- Periodisitet: Siden $x[n] = e^{\jmath n \Omega_0} = e^{\jmath n(\Omega_0 + 2\pi)}$, må vi ha at $H(\Omega_0) = H(\Omega_0 + 2\pi)$.

Example

Betrakt LTI-system med enhets step respon

$$h[n] = \alpha^n u[n], \ \alpha \in \Re, \ |\alpha| < 1.$$

Frekvensresponsen er da

$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-\jmath n \Omega} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^n e^{-\jmath n \Omega}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha e^{-\jmath \Omega})^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-\jmath \Omega}}.$$

Kvadrert magnityde $H(\Omega)$ er

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1-\alpha e^{-\jmath \Omega}} \cdot \frac{1}{1-\alpha e^{\jmath \Omega}} = \frac{1}{1+\alpha^2 - 2\alpha \cos \Omega},$$

og faseresponsen er

$$\Theta(\Omega) = \tan^{-1} \frac{H_I(\Omega)}{H_R(\Omega)} = \tan^{-1} \frac{-\alpha \sin \Omega}{1 - \alpha \cos \Omega}.$$

Gruppeforsinkelsen er gitt som

$$\tau_g(\Omega) = -\frac{\alpha^2 - \alpha \cos \Omega}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \Omega}.$$

Tema

Fourier rekker og transformer

Kontinuerlig tid Fourier rekke og transform

Frekvens analyse av diskret tid periodiske signaler

Fourier rekker og transformer

- Mål: Utvikle et matematisk verktøy (et “prisme”) som dekomponerer signaler (“lys”) inn i sinus og cosinus komponenter (“farger”).
- Virere: Utvilke verktøyet (“det inverse prismet”) som syntetiserer et signal fra beskrivelser av dets frekvenskomponenter .

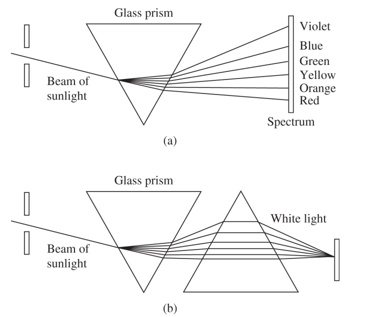

Figure 4.1.1 (a) Analysis and (b) synthesis of the white light (sunlight) using glass prisms.

UNIVERSITETET I OSLO

De fire Fourier rekkene/transformasjonene

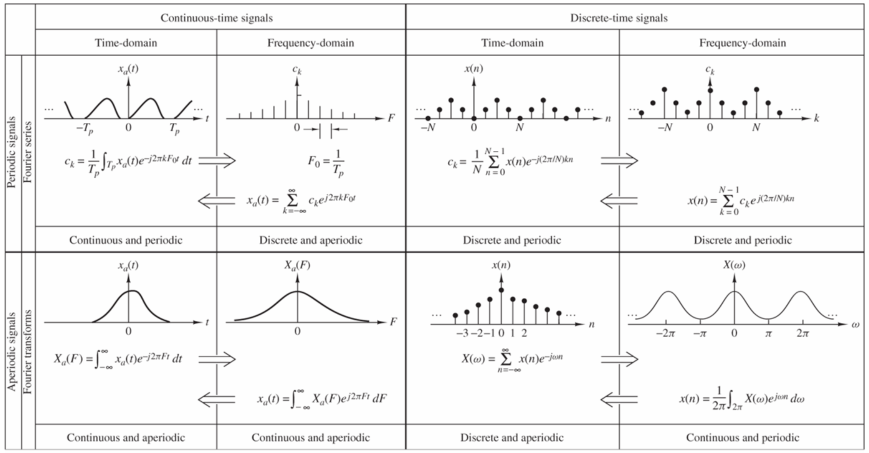

Figure 4.3.1 Summary of analysis and synthesis formulas.

UNIVERSITETET I OSLO

Kontinuerlig tid Fourier rekke og transform

- Fourier rekker: Dekomposisjon av signaler til sum av sinus/cosinus ledd (eller komplekse eksponensialer) $\rightarrow$ *frekvens domenet*.
- De aller fleste signaler av praktisk interesse kan dekomponeres i en sum av sinus/cosinus ledd.
  - Periodiske signaler: Fourier series.
  - Endelig energi signaler: Fourier transform.
- Viktig i analyse av LTI systemer:
  - Et LTI systems respons til en sinus/cosinus er en tilsvarende sinus/cosinus, men med en (kompleks) skalering.
  - Et LTI systems respons til en lineær sum av sinus/cosinus ledd er en tilsvarende sum av sinus/cosinus ledd med kun en mulig kompleks skalering av hvert ledd.

UNIVERSITETET I OSLO

Fourier rekker til CT periodiske signaler

- Hvis $x(t)$ er et periodisk signal som tilfredstiller Dirichlet krav, så er
  - Syntese likn.: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t}$.
  - Analyse likn.: $c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$.
- Dirichlets krav:
  1. Signalet $x(t)$ har et endelig antall diskontinuiteter innenfor enhver periode.
  2. Signalet $x(t)$ innehar et endelig antall maks og min punkter innenfor enhver periode.
  3. Signalet $x(t)$ er absolutt integrerbar innefor enhver periode, dvs $\int_{T_p} |x(t)| dt < \infty$.
- I praksis vil alle periodiske signaler av interesse tilfredstille disse kravene.
- Andre periodiske signaler kan også ha en Fourier rekke representasjon.

UNIVERSITETET I OSLO

Fourier transformasjonen til CT signaler

- Betrakt et aperiodisk signal $x(t)$ med endelig lengde.
- Konstruer et periodisk signal $x_p(t)$ med periode T_p.
- Da er $x(t) = \lim_{T_p \to \infty} x_p(t)$.

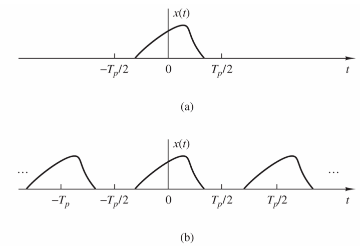

Figure 4.1.7 (a) Aperiodic signal $x(t)$ and (b) periodic signal $x_p(t)$ constructed by repeating $x(t)$ with a period T_p.

Fourier transformasjonen til CT signaler

- Hvis $x(t)$ er et aperiodisk signal som tilfredstiller the Dirichlet krav, så er
  - Syntese likn,: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{\jmath 2\pi f t} df$.
  - Analyse likn.: $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\jmath 2\pi f t} dt$.
- Dirichlets krav:
  1. Signalet $x(t)$ har et endelig antall diskontinuiteter.
  2. Signal $x(t)$ innehar et endelig antall maks og min punkter.
  3. Signal $x(t)$ er absolutt integrerbart, dvs $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$.
- Alle signaler av praktisk interesse tilfedstiller disse kravene.

Diskret tid Fourier rekker.

- Gitt et signal $x[n]$ med periode N, dvs. $x[n] = x[n+N] \forall N$, da vil
  $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{\jmath 2\pi k n/N}$,
  hvor $\{c_k\}$ er Fourier koeffisienten i rekkeutviklingen.
- Fourier koeffisienter:
  $c_l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\jmath 2\pi l n/N}$, $l = 0, 1, \ldots, N-1$.
- $\{c_k\}$ representerer amplitude og fase til frekvenskoeffisienten
  $s_k[n] = e^{\jmath 2\pi k n/N} = e^{\jmath \Omega_k n}$, $\Omega_k = 2\pi k/N$.
- $\{c_k\}$ er periodisk med periode N.

Energitetthetsspekter av periodiske sekvenser

Gjennomsnittlig energi av et diskret tid periodisk signal:
$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$.
Parseval's relasjon.

Fourier rekker av reelle diskrete periodiske signaler

- Hvis $x[n]$ er reell ($x^*[n] = x[n]$), så er
  - $c_k^* = c_{-k}$, eller også
  - Like symmetri: $|c_{-k}| = |c_k|$,
    Ulike symmetri: $-\angle c_{-k} = \angle c_k$.
- Reelle signaler kan uttrykkes som

$$\begin{aligned} x[n] &= c_0 + 2\sum_{k=1}^{L} |c_k| \cos(\tfrac{2\pi}{N} kn + \theta_k) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{L} \left(a_k \cos(\tfrac{2\pi}{N} kn) - b_k \sin(\tfrac{2\pi}{N} kn)\right), \end{aligned}$$

  hvor $a_0 = c_0$, $a_k = 2|c_k| \cos\theta_k$, $b_k = 2|c_k| \sin\theta_k$, og $L = N/2$ hvis N like og $L = (N-1)/2$ hvis N ulike.

Fourier transformasjonen til diskrete ikke-periodiske signaler.

- $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-\jmath \Omega n}$.
  - $X(\Omega)$ representerer frekvensinnholdet i signalet $x[n]$, dvs.
  - $X(\Omega)$ er en dekomposisjon av $x[n]$ inn i sine frekvenskomponenter.
- Unik over frekvensintervallet $(-\pi, \pi)$, eller ekvivalent $(0, 2\pi)$.
- $X(\Omega)$ er periodisk med periode 2π.
- $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{\jmath \Omega n} d\Omega$.

UNIVERSITETET I OSLO

Fourier transformasjonen til diskrete ikke-periodisk signaler ...

- Konvergerer: $X_N(\Omega) = \sum_{n=-N}^{N} x[n]e^{-\jmath\Omega n}$ konvergerer uniformt til $X(\Omega)$, dvs. $\lim_{N\to\infty}\{\sup_\Omega |X(\Omega) - X_N(\Omega)|\} = 0$.
  - Garantert hvis $x[n]$ er absolutt summerbar.
- Mulig med kvadratisk summerbare sekvenser hvis *mean-square* konvergenskriterium er oppfylt.
- Energitetthetsspekter $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$.

UNIVERSITETET I OSLO

Diskret tid Fourier transform; DTFT

Notasjon:

- Analysis : $X(\Omega) \equiv \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-\jmath\Omega n}$.
- Alternativt: $X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-\jmath 2\pi F n}$.
- Syntese : $x[n] \equiv \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{\jmath\Omega n}d\Omega$.
- Alternativt: $x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(F)e^{\jmath 2\pi nF}dF$.
- $x[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\Omega)$.

UNIVERSITETET I OSLO

Fra *z*-transf. til DTFT

- Finner $X(\Omega)$ ved å evaluere z-transformasjonen langs enhetssirkelen.
- $X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$
  - $z = Re^{\jmath 2\pi F}$. Lar $R = 1$ og får:

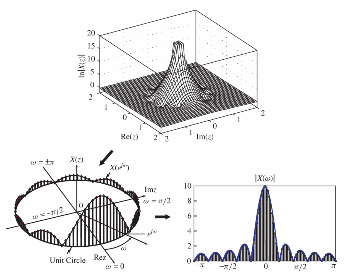

Figure 4.2.9 relationship between $X(z)$ and $X(\omega)$ for the sequence in Example 4.2.4, with $A = 1$ and $L = 10$

UNIVERSITETET I OSLO

Tema

Egenskaper til DT Fourier transform

Egenskaper til DTFT

- Symmetri

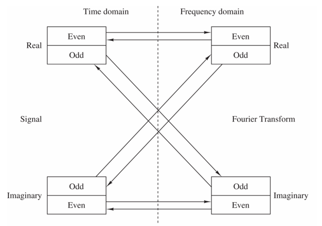

Figure 4.4.2 Summary of symmetry properties for the Fourier transform.

  Realle signaler $x[n]$ har konjugert symetrisk $X(\Omega)$.
- Linearitet:
  $\mathcal{F}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = a\mathcal{F}\{x_1[n]\} + b\mathcal{F}\{x_2[n]\}$.
- Shifting i tid:
  $\mathcal{F}\{x[n-k]\} = X(\Omega)e^{-\jmath\Omega k}$.
  (dvs. frekvensinnhold avhenger bare av form.)

Egenskaper til DTFT ...

- Tidsreversering / Folding:
  $\mathcal{F}\{x[-n]\} = X(-\Omega)$
  (dvs. frekvensinnhold reelt signal ($X(-\Omega) = X^*(\Omega)$) avhenger bare av form.)
- Konjugering:
  $\mathcal{F}\{x^*[n]\} = X^*(-\Omega)$.
- Konvolusjon:
  $\mathcal{F}\{x_1[n] * x_2[n]\} = \mathcal{F}\{x_1[n]\}\mathcal{F}\{x_2[n]\} = X_1(\Omega)X_2(\Omega)$.
- Korrelasjon: $\mathcal{F}\{r_{x_1x_2}\} = S_{x_1x_2} = X_1(\Omega)X_2(-\Omega)$.
  Kryss-korrelasjonstetthetsspektrum.
- Wiener-Khintchine teorem:
  La $x[n]$ være et reelt signal. Da er
  $\mathcal{F}\{r_{xx}(l)\} = S_{xx}(\Omega) = X(\Omega)X(-\Omega) = X(\Omega)X^*(\Omega)$.
  (Ingen faseinformasjon, dvs ikke unik!)

Egenskaper til DTFT ...

- Shifting i frekvens:
  $\mathcal{F}\{x[n]e^{\jmath\Omega_0 n}\} = X(\Omega - \Omega_0)$.
  Modulasjon:
  $\mathcal{F}\{x[n]\cos[\Omega_0 n]\} = \frac{1}{2}[X(\Omega + \Omega_0) + X(\Omega - \Omega_0)]$.
- Parseval's relasjon / Energi:
  $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$.
- Multiplikasjon:
  $\mathcal{F}\{x_1[n] \cdot x_2[n]\} = \mathcal{F}\{x_1[n]\} \circledast \mathcal{F}\{x_2[n]\} = \frac{1}{2\pi}\int X_1(\theta)X_2(\Omega - \theta)d\theta$.
  $\circledast$: *Periodic convolution.*

Sammenheng mellom system funksjon og frekvens respons

- $H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{\jmath\Omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-\jmath\Omega n}$
- Hvis $H(z)$ rasjonell,
  $H(\Omega) = \frac{B(\Omega)}{A(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-\jmath\Omega k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k e^{-\jmath\Omega k}} = b_0 \frac{\Pi_{k=1}^{M}(1-z_k e^{-\jmath\Omega})}{\Pi_{k=1}^{N}(1-p_k e^{-\jmath\Omega})}$,
  hvor $\{a_k\}$ og $\{b_k\}$ reelle, men $\{z_k\}$ og $\{p_k\}$ kan være komplekse.
- Magnitude kvadrert: $|H(\Omega)|^2 = H(\Omega)H^*(\Omega)$
  - $H^*(\Omega)$ finnes ved å evaluere $H^*(1/z^*)$ på enhetssirkelen.
  - Når $\{h[n]\}$ reell ($= \{a_k\}$ and $\{b_k\}$ reelle)
    $\Rightarrow$ komplekse poler og nullpunkter opptrer i kompleks-konjugerte par
    $\Rightarrow$ $H^*(1/z^*) = H(z^{-1})$, i.e. $H^*(\Omega) = H(-\Omega)$ og
    $|H(\Omega)|^2 = H(\Omega)H^*(\Omega) = H(\Omega)H(-\Omega) = H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{\jmath\Omega}}$.

Tema

LTI systemer som frekvens-selektive filtre

Ideell filterkarakteristikk & enkle filtre

Ideell filterkarakteristikk

- Ideelle filte har konstant magnitudekarakteristikk.
  - Skal se på responskarakterstikk av lavpass, høypass, båndpass, all-pass og båndstop eller bånd-eliminasjons filtre.
- Lineær faserespons
  Ideelle filtre har lineær fase i passbåndet.
- I alle tilfeller: Ideelle filtre er ikke fysisk realiserbare!
- Design av enkle digitale filtre
  1. Basert på pol- og nullpunktplassering.
  2. Alle poler innenfor enhetssirkelen (nullpkt hvor som helst).
  3. Komplekse poler/nullpkt. i komplekskonjugerte par.

Ideell filterkarakteristikk ...

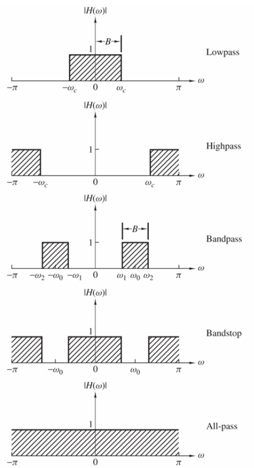

Figure 5.4.1 Magnitude responses for some ideal frequency-selective discrete-time filters.

Enkle filtre

- Lavpass
- Lavpass til høypass transformasjon
  $H_{hp}(\Omega) = H_{lp}(\Omega - \pi)$, i.e.
  $h_{hp}[n] = (e^{j\pi})^n h_{lp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n]$.
- Digitale resonatorer
- Notch filtre
- Kam filtre
- All-pass filtre

Lavpass and høypass filtre

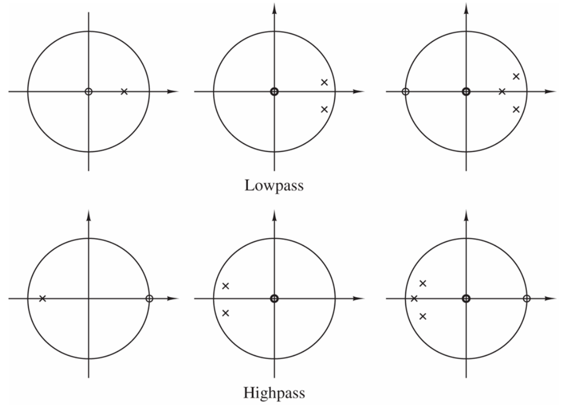

Figure 5.4.2 Pole–zero patterns for several lowpass and highpass filters.

UNIVERSITETET I OSLO

Lavpass and høypass filtre ...

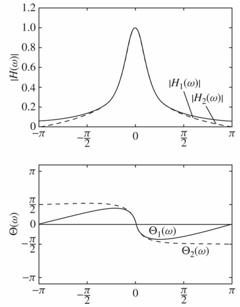

Figure 5.4.3 Magnitude and phase response of (1) a single-pole filter and (2) a one-pole, one-zero filter; $H_1(z) = (1-a)/(1-az^{-1})$, $H_2(z) = [(1-a)/2][(1+z^{-1})/(1-az^{-1})]$ and $a = 0.9$.

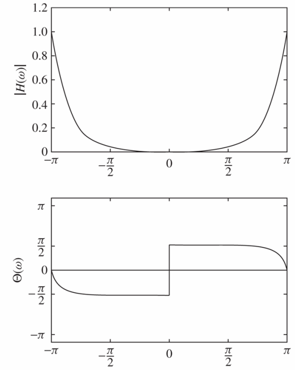

Figure 5.4.4 Magnitude and phase response of a simple highpass filter; $H(z) = [(1-a)/2][(1-z^{-1})/(1+az^{-1})]$ with $a = 0.9$.

UNIVERSITETET I OSLO

Båndpass filter

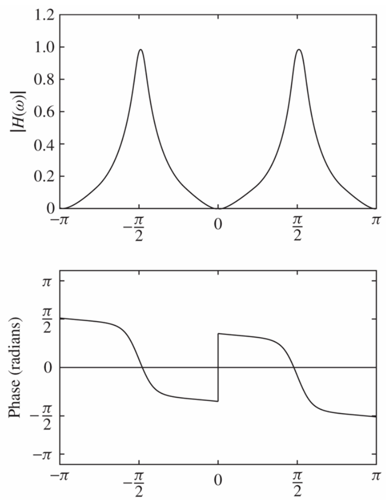

Figure 5.4.5 Magnitude and phase response of a simple bandpass filter in Example 5.4.2; $H(z) = 0.15[(1-z^{-2})/(1+0.7z^{-2})]$.

UNIVERSITETET I OSLO

Digital resonator

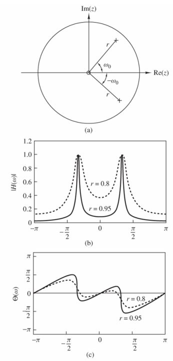

Figure 5.4.6 (a) Pole–zero pattern and (b) the corresponding magnitude and phase response of a digital resonator with (1) $r = 0.8$ and (2) $r = 0.95$.

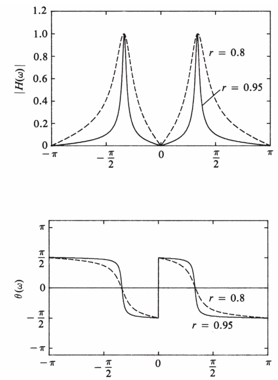

Figure 5.4.7 Magnitude and phase response of digital resonator with zeros at $\omega = 0$ and $\omega = \pi$ and (1) $r = 0.8$ and (2) $r = 0.95$.

Notch filter

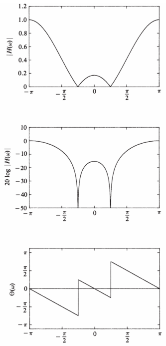

Figure 5.4.9 Frequency response characteristics of a notch filter with a notch at $\omega = \pi/4$ or $f = 1/8$; $H(z) = G[1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}]$.

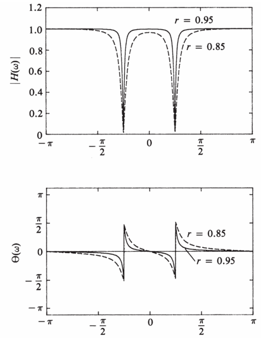

Figure 5.4.10 Frequency response characteristics of two notch filters with poles at (1) $r = 0.85$ and (2) $r = 0.95$; $H(z) = b_0[(1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2})/(1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2})]$.

Kam filter

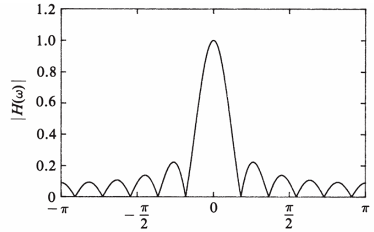

Figure 5.4.11 Magnitude response characteristic for the comb filter given by (5.4.34) with $M = 10$.

Allpass filter

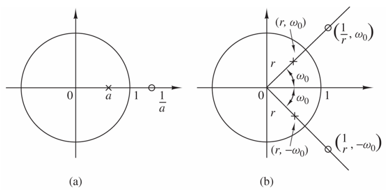

Figure 5.4.16 Pole–zero patterns of (a) a first-order and (b) a second-order all-pass filter.

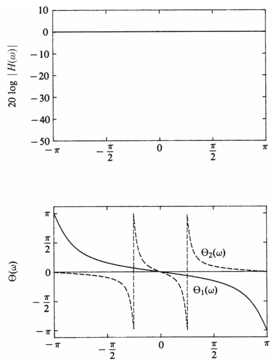

Figure 5.4.17 Frequency response characteristics of an all-pass filter with system functions (1) $H(z) = (0.6 + z^{-1})/(1 + 0.6z^{-1})$, (2) $H(z) = (r^2 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2})/(1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2})$, $r = 0.9$, $\omega_0 = \pi/4$.