

Konvolusjon \Leftrightarrow produkt

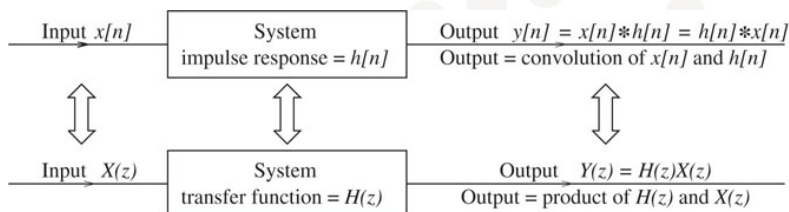


FIGURE 4.3 System description in the time domain and z-domain. In the time domain, the system output is found by the convolution of $x[n]$ and $h[n]$. In the z-domain, the transformed output $Y(z)$ is found by the product of $X(z)$ and $H(z)$. Convolution in one domain transforms to multiplication in the other

20. oktober 2009

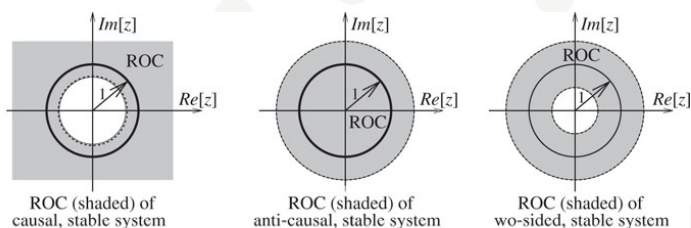
3



Stabilitet og kausalitet

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m}$$

FIGURE 4.8 The ROC of stable systems (shown shaded) always includes the unit circle



20. oktober 2009

4



Fourier transform, filter med reelle koeff

$$H(F) = H(z) \Big|_{z=e^{j2\pi F}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]e^{-j2\pi mF}$$

• Reell $h[m] \Leftrightarrow H(F)=H^*(-F)$:

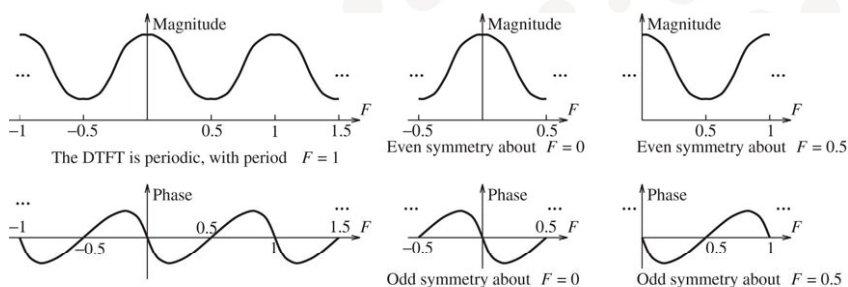


FIGURE 5.1 Illustrating the symmetry in the DTFT spectrum of real signals. The magnitude shows even symmetry about $F = 0$ and about $F = 0.5$. The phase shows odd symmetry about $F = 0$ and about $F = 0.5$. Both are periodic, with unit period (in F)

20. oktober 2009

5



System respons

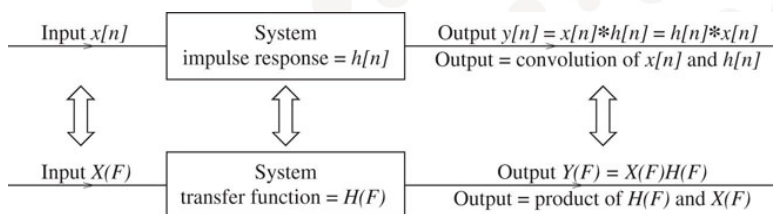


FIGURE 5.3 The equivalence between the time domain and frequency domain. Note that convolution in the time domain transforms to multiplication in the frequency domain

- Konvolusjon \Leftrightarrow produkt \Leftrightarrow sum av dB-verdier:
 - $20\log[Y(F)] = 20\log[X(F)] + 20\log[H(F)]$

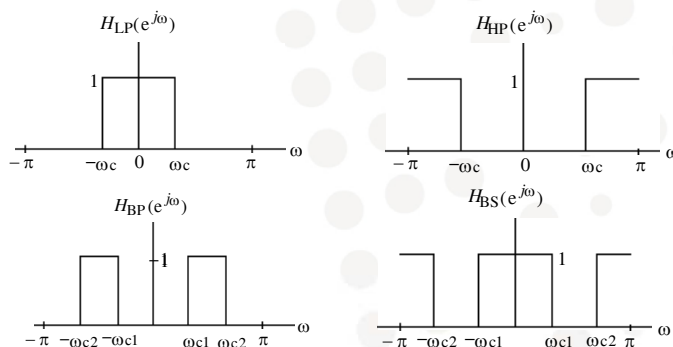
20. oktober 2009

6



Ideelle filtre

- Lavpass, høypass, båndpass, båndstopp



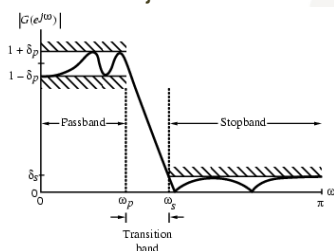
7



Filterspesifikasjon

- Magnituderespons:

- Pass-, stopp-, transisjonsbånd



- Faserespons:

- Lineær fase
- Ikke-lineær fase

- Ulineær forvrengning:

- Genererer nye frekvenskomponenter
- Ikke-lineært system
- Ingen LTI-filtre kan gi ulineær forvrengning

- Lineær forvrengning:

- Amplitude distorsjon: Ikke-flat respons i passbånd
- Fasedistorsjon: Avvik fra lineær fase
- Veier eller forsinker forskjellige frekvenser ulikt

8



Forsterkning

$$H(F) = H(z) \Big|_{z=e^{j2\pi F}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] e^{-j2\pi m F}$$

- DC (direct current = likestrøm) gain $\Leftrightarrow F=0$:
 - $H(0) = \sum h[m]$
 - ≈ 0 for høypass
- Halve samplingsfrekvens, $F=0.5$:
 - $H(0.5) = \sum (-1)^m h[m]$
 - ≈ 0 for lavpass

20. oktober 2009

9

UNIVERSITETET
I OSLO

Lineær fase \Leftrightarrow Ren tidsforsinkelse

- Cosinus som faseforsinkes med ϕ :
 - $\cos(\omega t - \phi) = \cos(\omega(t - \phi/\omega)) = \cos(\omega(t - t_p))$
 - Hvis $\phi = \omega t_p$ – lineær fase – så er det det samme som konstant tidsforsinkelse
- Faseforsinkelse: $t_p(F_0) = -\phi/\omega = -\angle H(F_0)/(2\pi F)$
- Gruppetforsinkelse: $t_g(F_0) = -d\angle H(F_0)/(2\pi dF)$
 - Forsinkelse av en informasjon som er modulert inn på signalet
 - I det enkle cos-eksemplet er $t_p = t_g$

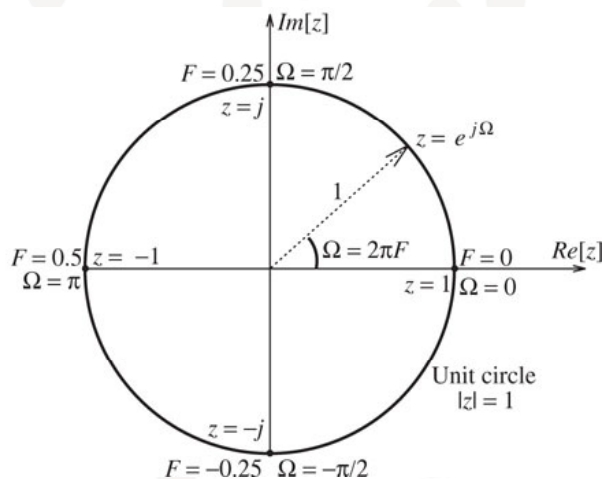
20. oktober 2009

10

UNIVERSITETET
I OSLO

6.1.5. Grafisk metode for frekvensrespons

FIGURE 6.1
Relating the variables z , F , and Ω through the unit circle in the z -plane. The angle in radians equals the digital frequency Ω . On the unit circle, $F = 0$ corresponds to $z = 1$ while $F = 0.5$ corresponds to $z = -1$



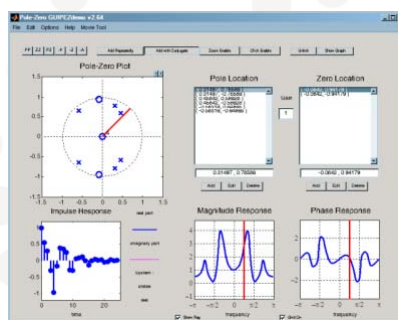
20. oktober 2009

11



Pol-nullpunktseditor for Matlab

- PEZdemo allows the user to select the poles and zeros of a system and then change those poles and zeroes dynamically.
- The z -plane, Fourier domain and time-domain are all updated simultaneously.
- <http://users.ece.gatech.edu/mcclella/matlabGUIs/>
- Georgia Tech



Legges i `..\toolbox\pezdemo`
Legg til i `..\toolbox\local\startup.m`:
- `path(path, 'C:\Program Files\MATLAB\R2008a\toolbox\pezdemo');` (eksempel)

20. oktober 2009

12



Eks, grafisk analyse

- $H(z) = 8(z-1) / (z-0.6-j0.6)(z-0.6+j0.6)$
 - Null: $z=1$, poler: $0.6 \pm j0.6$
- $H(\Omega_0) = \frac{8(\exp(j\Omega_0)-1)}{(\exp(j\Omega_0)-0.6-j0.6)(\exp(j\Omega_0)-0.6+j0.6)}$
- $H(\Omega_0) = 8 N_1 / (D_1 D_2)$
- $|H(\Omega_0)| = 8 |N_1| / (|D_1| |D_2|)$:
 - Gain $\cdot \Pi$ avstander fra nuller / Π avst. fra poler
- $\angle H = \angle N - \angle D_1 - \angle D_2$

20. oktober 2009

13



Grafisk analyse: Kvalitativ metode

- Evaluerer for $z=\exp(j\Omega_0)$ i $z=1$, A, B og C: $8 |N_1| / (|D_1| |D_2|)$

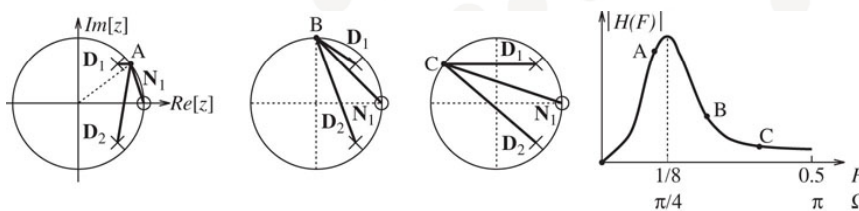


FIGURE 6.2 Graphical interpretation of the frequency response. At the three frequencies indicated by the points A, B and C on the unit circle (in the first three panels), the gain is estimated by computing the ratio of the products of the distances to the zeros and products of distances to the poles. The corresponding values of the gain are labeled on the gain plot

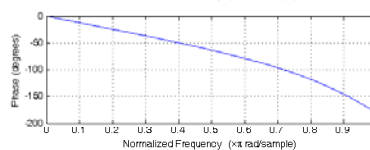
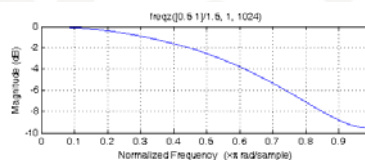
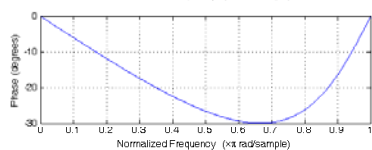
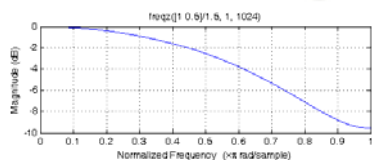
- Fint for å finne verdier der filteret er 0 eller har topper

20. oktober 2009

14



6.1.3 Minimum fase, FIR filter, 2 koeff



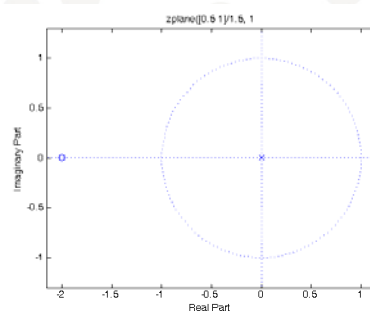
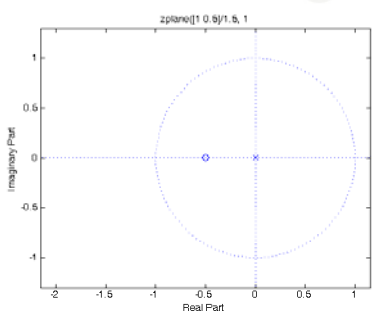
Reversert filter. Samme magnitudo. Minimum og maksimum fase

20. oktober 2009

15



Minimum fase, FIR filter, 2 koeffisienter



Minimum fase systemer har alle nullpunkter på eller innenfor enhets sirkelen

20. oktober 2009

16



Minimum fase filtre fra magnitudo

- Ofte er spesifikasjonen bare gitt for magnitudo (lav-, høy-pass etc): $H_p(F)$
- Ofte ønskelig med minst mulig forsinkelse
 - \Rightarrow minimum fase
- Anvendelse:
 - Filtre med minst mulig forsinkelse er ofte en fordel: påvirker signalet minst mulig (hørbarhet)
 - Bare minimum fase systemet blir stabilt og kausalt
 - Invers \Rightarrow poler \rightarrow nullpunkter og omvendt
 - Særlig viktig innen seismikk

20. oktober 2009

17

UNIVERSITETET
I OSLO

Eks 6.2: Finne minimum-fase filtret

- Finn minimum fase $H(z)$ når $H_p(\Omega)$ er gitt:
- $|H_p(\Omega)|^2 = (5+4\cos\Omega)/(17+8\cos\Omega)$
- Uttrykk med exp-funksjoner
 - $|H_p(\Omega)|^2 = (5+2\exp(j\Omega)+2\exp(-j\Omega)) / (17+4\exp(j\Omega)+4\exp(-j\Omega))$
- Uttrykk med $z=\exp(j\Omega)$:
 - $H(z)H(1/z) = (5+2z+2/z) / (17+4z+4/z)$
 - $= (2z^2+5z+2) / (4z^2+17z+4) = ((2z+1)(z+2)) / ((4z+1)(z+4))$
- Nullpunkt for $|z|<1 \Rightarrow (2z+1)$: min fase
- Pol for $|z|<1 \Rightarrow (4z+1)$: stabil
- $H(z) = (2z+1) / (4z+1) = \underline{0.5(z+0.5)/(z+0.25)}$

20. oktober 2009

18

UNIVERSITETET
I OSLO

Hvordan å finne minimum fase $H(z)$?

- Hvordan finne transferfunksjonen?
 - $|H_p(F)|^2 = H_p(F) H_p(-F) = H_p(z) H_p(1/z)|_{z=\exp(j2\pi F)}$
- Konjugert symmetri: for hver rot r_k er det en $1/r_k^*$.
- Plukk ut alle røtter som er innenfor enhetssirkelen for å finne minimum fase $H(z)$

20. oktober 2009

19

UNIVERSITETET
I OSLO

6.2 FIR filtre og lineær fase

- Anta et filter $h[n]=h[-n]$, symmetrisk (like) om 0:
 - \Rightarrow reell Fourier transform $H(j\Omega)$
 - Ingen faseforvrengning
- Anta så at vi ønsker oss et kausalt filter
 - Forsinker så det starter i $n=0$
 - En ren forsinkelse er en liten form for distorsjon
 - Forsinkelse: $h[n-M/2] \Leftrightarrow e^{-j\Omega M/2} H(j\Omega)$
 - Et ledd med lineær fase i Fouriertransformen
- Fordel nr 2 med slike filtre
 - Bare ca 50% av multiplikasjonene

20. oktober 2009

20

UNIVERSITETET
I OSLO

FIR lineær fase – poler/nullpunkter

- Ren forsinkelse endrer ikke nullpunkter
 - Kan diskutere en ikke-kausal, symmetrisk $h[n]$
- 1. Reell $h[n]$
 - $\Leftrightarrow H(z) = H^*(z)$: nullpunkt i $r \Rightarrow$ nullpunkt i r^*
- 2. $h[n] = h[-n]$
 - $\Leftrightarrow H(z) = H(1/z)$: nullpunkt i $r \Rightarrow$ nullpunkt i $1/r$
- 3. Altså $H(z) = H^*(z) = H^*(1/z) = H(1/z)$: reell
- 4. Med forsinkelse på α blir $H(F) = A(F)e^{i2\pi\alpha F}$ der $A(F)$ er reell

20. oktober 2009

21



Lineær fase FIR filtre

Nullpunkt i $r \Rightarrow$ nullpunkt i r^* , $1/r$, og $1/r^*$:

- Komplekse nullpunkt kommer 4 i slengen
- Reelle nullpunkt i par: r og $1/r$ (for $r \neq 1$)
- Nullpunkter på $|z|=1$ i par
- Nullpunkt i $z = \pm 1$ ($r = \pm 1$) kan være alene

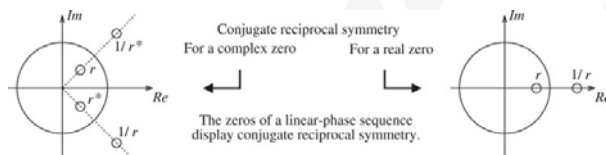


FIGURE 6.4 Illustrating conjugate reciprocal symmetry. Each zero not on the real axis and not on the unit circle forms part of a quadruple, being paired with its reciprocal and its conjugate. A zero on the real axis but not on the unit circle need not be conjugated and is paired with just its reciprocal. A zero on the unit circle (but not at $z = 1$ or $z = -1$) forms its own reciprocal and is paired with just its conjugate. A zero at $z = 1$ or $z = -1$ can occur singly, because it forms its own reciprocal and its own conjugate

20. oktober 200

22



Eks 6.4a

- Er $H(z)=1+2z^{-1}+2z^{-2}+z^{-3}$ et lineær fase filter?
- Ser at $h[n] = \{1, 2, 2, 1\}$
- Like symmetri, like lengde, symmetrisk om $n=2.5$

20. oktober 2009

23



Eks 6.4b

- $h[n]=\{1, 0, \underline{4.25}, 0, 1\}$. Poler og nullpunkter?
- Like symmetrisk om $n=0$
- $H(z) = z^2+4.25+z^{-2} = (z^4+4.25z^2+1)/z^2$
- Nullpunkter, løs 2. gradsligning: $z^2 = (-4.25 \pm (4.25^2 - 4)^{0.5})/2 = (-4.25 \pm 3.75)/2 = -0.25, -4$
 - Altså nullpunkter for $z = \pm j0.5$ og $\pm j2$
- Dobbel pol for $z=0$
- $H(z)=(z+j0.5)(z-j0.5)(z+j2)(z-j2)/z^2$

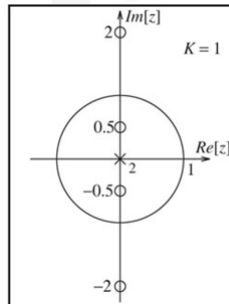
20. oktober 2009

24



Pol-nullpunktsploitt for eks 6.4b

- $H(z) = (z+j0.5)(z-j0.5)(z+j2)(z-j2)/z^2$



(a)

- Type 1: Like symmetri, odde lengde (=5), like antall nullpunkter (4)

20. oktober 2009

25

UNIVERSITETET
I OSLO

Like/odde antall koeffisienter

- Type 1: Filter med odde antall koeffisienter:
 - Like antall nullpunkt, 4-er grupper + 2-er grupper, ingen enslige nullpunkt i $z=\pm 1$
 - Tenk på at 2. grads ligning har 3 koeffisienter (odde antall) og 2 løsninger (like antall)
- Type 2: Filter med like antall koeffisienter:
 - Odde antall nullpunkt: 4-er grupper, 2-er grupper + *et til*.
 - *Det enslige nullpunktet må være i $z=-1$ da nullpunkt i $z=1$ krever asymmetri (se neste slide)*

20. oktober 2009

26

UNIVERSITETET
I OSLO

Odde symmetri i lineær fase filter

- Antisymmetrisk filter: $h[n] = -h[-n] \Rightarrow$ imaginær $H(F)$
 - $H(F) = jA(F)e^{j2\pi\alpha F}$ der $A(F)$ er reell
- Fasen består av konstant $e^{j\pi}$ som får et lineær fase tillegg pga forsinkelse med halve lengden
- Vil alltid ha nullpunkt i $z=1$ da $H(F)=0$ pga $\sum h[n]=0$
- Mye mindre viktig enn de to like symmetriske filtrene

20. oktober 2009

27

UNIVERSITETET
I OSLO

4 typer lineær fasefiltre

Type 1: Like symmetri, odde lengde:

$$\{0.25 \ 0.5 \ 0.25\}$$

Type 2: Like symmetri, like lengde:

$$\{0.5 \ 0.5\}$$

Type 3: Ulike symmetri, odde lengde:

$$\{-0.5 \ 0 \ 0.5\}$$

Type 4: Like symmetri, like lengde:

$$\{-0.5 \ 0.5\}$$

20. oktober 2009

28

UNIVERSITETET
I OSLO

Eks 6.5b

- Finn alle nullpunkter til en type 2 sekvens (av korteste mulige lengde) når det er kjent at det er et nullpunkt ved $z=0.5e^{j\pi/3}$ og et nullpunkt i $z=1$:
 - Komplekst nullpunkt speiles i 4:
 $z=0.5e^{+/-j\pi/3}$ og $z=2e^{+/-j\pi/3}$
- Type 2 er av like lengde, dvs at det må være et odde antall nullpunkter, hvorav ett av dem må være i $z=-1$
 - Dermed er nullpunktet i $z=1$ dobbelt
- Altså 7 nullpunkter: $z=0.5e^{+/-j\pi/3}$ og $z=2e^{+/-j\pi/3}$, dobbel i $z=1$, enkelt i $z=-1$

20. oktober 2009

29

UNIVERSITETET
I OSLO

Lineær fase filtre: Oppsummering

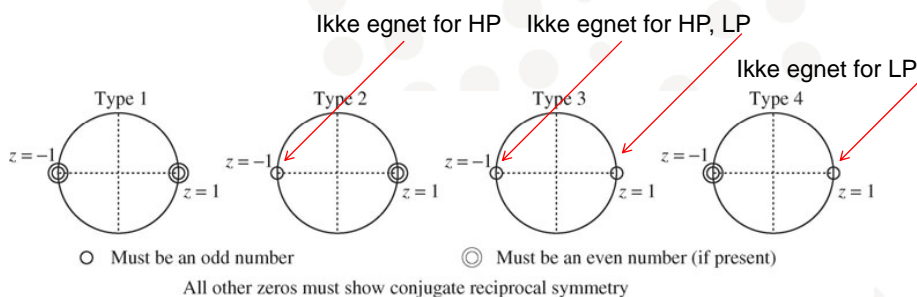


FIGURE 6.5 Identifying the sequence type from its zeros at $z = \pm 1$. Type 2 sequences *require* an odd number of zeros at $z = -1$, type 4 sequences *require* an odd number of zeros at $z = 1$, and type 3 sequences *require* an odd number of zeros at both $z = 1$ and $z = -1$. The number of zeros (if present) at the locations $z = \pm 1$ (other than the ones required) must be even. Naturally, any zeros elsewhere must satisfy conjugate reciprocal symmetry

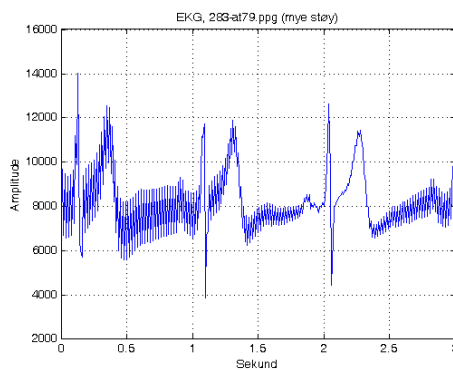
20. oktober 2009

30

UNIVERSITETET
I OSLO

Støyfiltrering på EKG-signal

- Matlab: [Aase.m](#) - Filtre bort 50 Hz fra EKG-signal



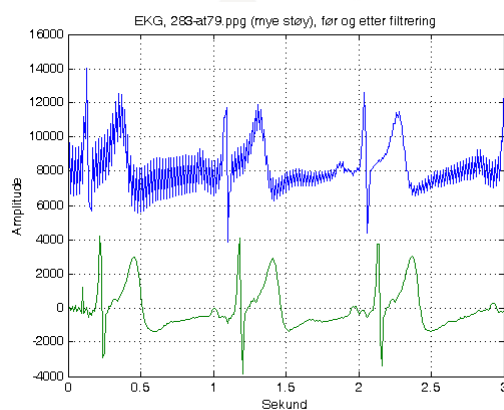
- Data fra Ottar Aase, Kardiologi, Ullevål Universitetssykehus

20. oktober 2009

31



EKG: Før og etter filtrering

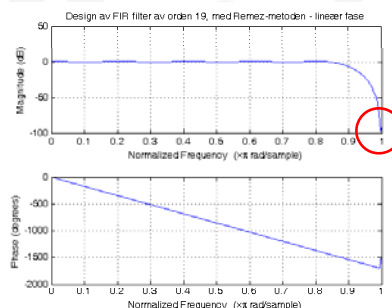
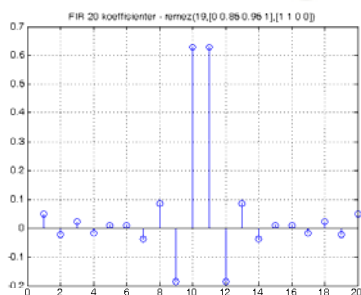


20. oktober 2009

32



EKG: Filter for støyfiltrering



Symmetrisk, like antall koeffisienter (N=20): type 2.
Alltid nullpunkt i $z=-1$, dvs $F=0.5$. Velegnet som lavpassfilter

20. oktober 2009

33



6.2.3 Midlingsfiltre

- Kausalt N-punkts midlingsfilter (moving average)
 - $y[n] = (x[n] + x[n-1] + \dots + x[n-(N-1)]) / N$
- Transfer funksjon:

$$H(F) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] e^{-j2\pi k F} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (e^{-j2\pi F})^k = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j2\pi N F}}{1 - e^{-j2\pi F}}$$

- Ikke sentrer summen og legg sammen til cosinuser!
- Trick, ta ut halve eksponensialfaktoren:

$$H(F) = \frac{1}{N} \left(\frac{e^{-j\pi N F}}{e^{-j\pi F}} \right) \cdot \left(\frac{e^{j\pi N F} - e^{-j\pi N F}}{e^{j\pi F} - e^{-j\pi F}} \right) = e^{-j\pi(N-1)F} \cdot \frac{\sin(\pi N F)}{N \sin(\pi F)}$$

20. oktober 2009

34



Midlingsfiltre

$$H(F) = e^{-j\pi(N-1)F} \cdot \frac{\sin(\pi NF)}{N \sin(\pi F)} \quad \text{Lineær fase + et ledd som er reelt}$$

- Siste ledd: Dirichlet kjerne, aliased sinc-funksjon
 - $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$
- Midlingsfilter, egenskaper:
 - $H(0) = 1$
 - Nullpunkter: $\sin(\pi NF)=0 \Leftrightarrow \pi NF=k\pi \Rightarrow F=k/N$
 - $N-1$ nullpunkter innenfor $0.5 < F \leq 0.5$
 - Egentlig N stk, men nullpunktet i $F=0$ kanselleres av en pol
 - $|H(0.5)|=0$ for N like – type 2 filter
 - $k=N/2 \Rightarrow F=(N/2 / N)=0.5$

20. oktober 2009

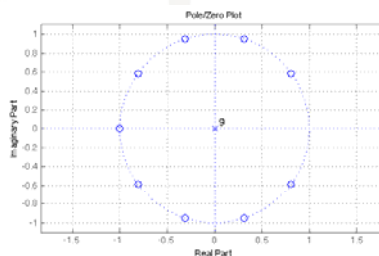
35



Nullpunkter og poler

$$H(F) = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j2\pi NF}}{1 - e^{-j2\pi F}} \Rightarrow H(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{N} \frac{z^N - 1}{z^{N-1}(z - 1)}$$

- N stk nullpunkter: $z^N=1$
 $\Rightarrow N$ stk jevnt spredt rundt enhetssirkelen, avstand $2\pi/N$ radianer
- Polen i $z=1$ kansellerer nullpunktet i $z=1$
- $N-1$ poler i $z=0$



N=10

20. oktober 2009

36



Eks 6.6b 3-punkts midling

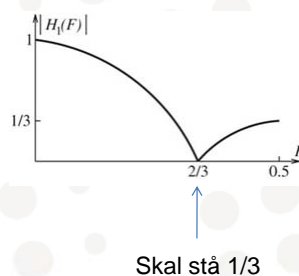
- $h[n]=\{1/3, \underline{1/3}, 1/3\}$
- $H(F) =$

$$[\exp(j2\pi F)+1+\exp(-j2\pi F)]/3 =$$

$$[1+2\cos(2\pi F)]/3$$

- Null: $\cos(2\pi F)=-0.5$
 $\Leftrightarrow 2\pi F=\pm 2\pi/3 \Leftrightarrow F=\pm 1/3$

- Midler alle frekvenser opp til og med $F \approx 1/3$



20. oktober 2009

37



En bedre 3-punkts midler

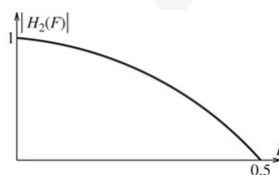
- $h[n]=\{1/4, \underline{1/2}, 1/4\}$
- $H(F) =$

$$[\exp(j2\pi F)+2+\exp(-j2\pi F)]/4$$

$$= [1+\cos(2\pi F)]/2$$

- Null: $\cos(2\pi F)=-1$
 $\Leftrightarrow 2\pi F=\pm\pi \Leftrightarrow F=\pm 0.5$

- Midler alle frekvenser opp til og med $F \approx 0.5$



20. oktober 2009

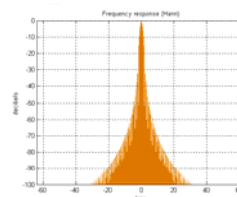
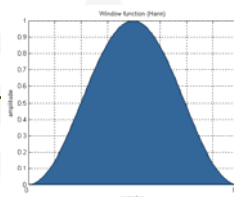
38



Hann eller Hanning vindu

- $h[n]=\{1/4, 1/2, 1/4\}$
- Generell formel: $w[n] = 0.5(1 + \cos(\frac{2\pi n}{N-1}))$
- Sett inn $N=3$ og $n=-1,0,1$
 $\Rightarrow \{0.5, 1, 0.5\}$ som normalisert så $\sum=1$ blir $h[n]$ over

- Julius Ferdinand von Hann (1839 -1921) was an Austrian meteorologist. He is seen as the father of modern meteorology.



- Wikipedia

20. oktober 2009

39

UNIVERSITETET
I OSLO

Subwoofer Array: Metallica 2009

- Vertical coverage: Ten boxes, which is a length of about six meters
 - provide a good directivity down to frequencies of about 45 to 50 Hz. We had to tweak the EQ a little around 30 to 35 Hz to get the stage really clear.
- Horizontal, the goal was to create something that had a perfect 360-degree coverage with no hot, or dead, spots. There were two points to be considered:
 - First, we had to keep the horizontal dimension of the array smaller than the reproduced wavelength in order to keep it omni-directional.
 - Second, we had to keep the individual sources closer together than one third of the shortest wavelength, in order to avoid creating destructive interference between the sources.
- [http://www.prosoundweb.com/article/how_t](http://www.prosoundweb.com/article/how_to_create_an_array_for_subwoofers_works/)
[he can array for subwoofers works/](http://www.prosoundweb.com/article/how_to_create_an_array_for_subwoofers_works/)



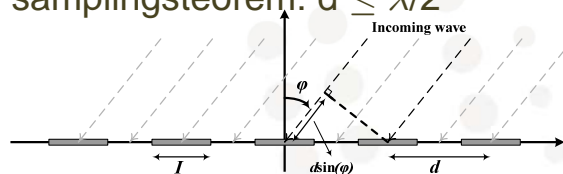
20. oktober 2009

40

UNIVERSITETET
I OSLO

Romlig signalbehandling

- Strålingsdiagram \Leftrightarrow Frekvensrespons for et filter
- Bølgelengde $\lambda = c/f$, lyd: $c \approx 340$ m/s
- Teori som gjelder ultralydavgivning, sonar, radar, mobiltelefonantenner, høyttalere, ...
- Summer alle elementer \Leftrightarrow Fourier transform:
 $W(u) = \sum e^{j2\pi mdu/\lambda}$, $u = \sin\phi$ er romlig frekvens
- Romlig samplingsteorem: $d \leq \lambda/2$



20. oktober 2009

41

Høyttalerarray

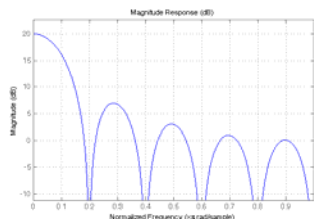
- 10 subwoofere over $D=6$ m $\Leftrightarrow d = D/10 = 0.6$ m
- Romlig samplingsteorem $d \leq \lambda/2 \Rightarrow \lambda \geq 1.2$ m
 - $f=283$ Hz, $\lambda=1.2$ m: MA-filter over $D/\lambda/2 = 10$ samples
 - $f=141$ Hz, $\lambda=2.4$ m: MA-filter over 5 samples
 - $F=70$ Hz, $\lambda=4.8$ m : MA-filter over 2-3 samples
 - $f=30$ Hz, $\lambda=11.3$ m. Arrayet er ca 0.5λ langt: rundstrålende

20. oktober 2009

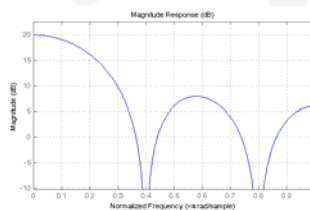
42

10 subwoofere over 6 meter

- 283 Hz:
fvtool(ones(10,1),1)



- 141 Hz:
fvtool(2*ones(5,1),1)



- $\sin\phi=0.2 \Rightarrow \phi \approx 11.5^\circ$
- $\sin\phi=0.4 \Rightarrow \phi \approx 23.6^\circ$
- Økning i nivå $20\log(10) = 20$ dB

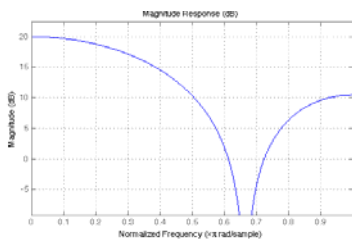
20. oktober 2009

43



10 subwoofere over 6 meter

- 85 Hz:
fvtool((10/3)*ones(3,1),1)



- $\sin\phi=0.66 \Rightarrow \phi \approx 41.3^\circ$

- Ved lavere frekvenser blir arrayet omtrent rundstrålende i vertikalretningen
- I horisontalretningen er arrayet alltid $< \lambda$ for høyeste frekvens \Rightarrow rundstrålende ved alle frekvenser

20. oktober 2009

44



Andre høye og smale antenner



20. oktober 2009

45



Eks 6.6d Differansefilter

- 2 punkts midlingsfilter med snudd fortegn
 $h[n]=\{1,-1\}$
- Type 4: asymmetrisk, like lengde
- $H(\Omega)=1-e^{j\Omega} = e^{-j\Omega/2}(e^{j\Omega/2}-e^{j\Omega/2}) = 2je^{-j\Omega/2}\sin(0.5\Omega)$
- Lineær fase: $\pi/2 - \Omega/2$
- Amplitude: 0 ved $\Omega=0$, øker til 2 ved $\Omega=\pi$
- Differensiering = høypassfilter: støyfølsomt
- Matlab: `fvtool([1 -1],1)`

20. oktober 2009

46



FIR Kamfiltre: $1-z^{-N}$ og $1-\alpha z^{-N}$

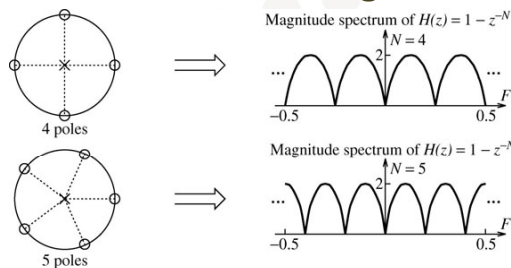
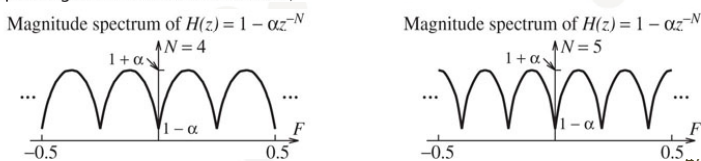


FIGURE 6.6 Pole-zero plot and frequency response of the comb filter $H(z) = 1 - z^{-N}$. The number of lobes in one period corresponds to the number of zeros. The dc gain is always zero, but the high-frequency gain (at $F = 0.5$) is zero only if the filter length is odd (corresponding to an even number of zeros)

FIGURE 6.7 Frequency response of the comb filter $H(z) = 1 - \alpha z^{-N}$



20. oktober 2009



FIR kamfiltre: $1+z^{-N}$ og $1+\alpha z^{-N}$

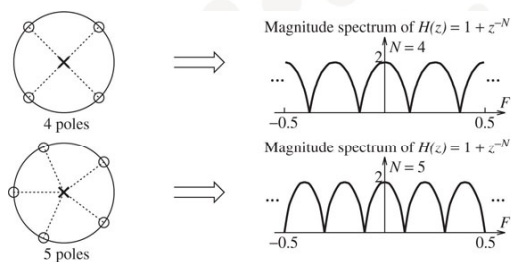
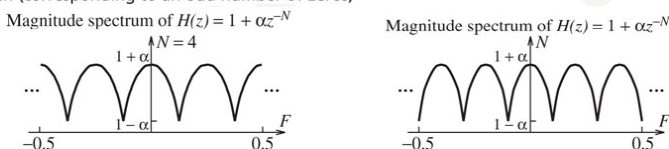


FIGURE 6.8 Pole-zero plot and frequency response of the comb filter $H(z) = 1 + z^{-N}$. The number of lobes in one period corresponds to the number of zeros. The dc gain is always equal to the peak gain. The high-frequency gain (at $F = 0.5$) is zero if the filter length is even (corresponding to an odd number of zeros)

FIGURE 6.9 Frequency response of the comb filter $H(z) = 1 + \alpha z^{-N}$



20. oktober 2009



6.3 IIR filtre: 1. ordens lav/høy-pass

- $y[n] = x[n] + \alpha y[n-1] \Rightarrow h[n] = \alpha^n u[n], |\alpha| < 1$

- $Y(z) = X(z) + \alpha z^{-1} Y(z)$

- $H(F) = 1 / (1 - \alpha e^{-j2\pi F})$

- $H(0) = (1 - \alpha)^{-1}, H(0.5) = (1 + \alpha)^{-1}$

- Lavpass: $0 < \alpha < 1$

- Høypass: $-1 < \alpha < 0$

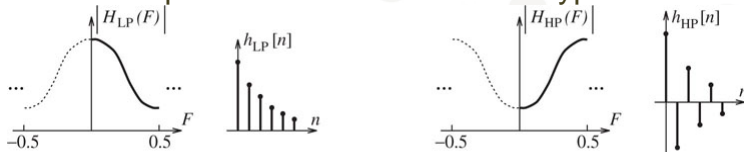
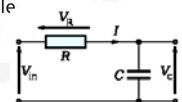


FIGURE 6.10 Spectrum and impulse response of first-order lowpass and highpass filters. The impulse response of both filters shows an exponential decay with sample values that keep getting smaller. The difference is that, for the highpass form, the samples alternate in sign

20. oktober 2009

Digital ekvivalent til analogt RC/CR filter

UNIVERSITETET
I OSLO

Filterbegreper

- Grensefrekvens, halv effekt, -3 dB

- Løs $|H_{LP}(F)|^2 = 0.5 |H_{LP}(0)|^2$: $F_{-3dB} = \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \left(\frac{4\alpha - 1 - \alpha^2}{2\alpha} \right)$

- Merk feil i boka!

- Impulsrespons, tidskonstant

- Når er $h[n]$ falt til $\epsilon\%$? $\alpha^n = \epsilon \Rightarrow \eta = \ln \epsilon$

- 1% $\Leftrightarrow 20 \log(0.01) = -40$ dB

- 0.1% $\Leftrightarrow 20 \log(.001) = -60$ dB

- Etterklangstid: $\tau_{-60 \text{ dB}} = \eta_{-60 \text{ dB}} / f_s$ karakteriserer impulsresponsen i et rom i akustikk

20. oktober 2009

50

UNIVERSITETET
I OSLO

Pol-nullpunktsplassering

1. Kompleks konjugerte par \Leftrightarrow reell $h[n]$
2. Kausalitet: Antall nullpunkt \leq antall poler
3. Poler/nullpunkter i origo påvirker ikke $|H(F)|$
4. Stabilitet: Alle poler for $|z| < 1$
 - Jo nærmere $|z|=1 \Rightarrow$ Jo større og smalere topp
 - **Passbånd:** poler nær $|z|=1$
 - Tommelfingerregel: Båndbredde $\Delta\Omega \leq 0.2 \Rightarrow R \approx 1-0.5\Delta\Omega$
5. Minimum fase: Nullpunkter kan være overalt, men bare $|z| \leq 1$ gir minimum fase
 - Nullpunkter på $|z|=1$ gir nullpunkter i $|H(F)|$
 - **Stoppbånd:** nullpunkter nær $|z|=1$
6. **Transisjonsbånd:** pol og null nær hverandre
7. Pol-null interaksjon: jo nærmere hverandre jo mer

20. oktober 2009

Kan bare designe enkle filtre med disse reglene

51

UNIVERSITETET
I OSLO

2. ordens IIR: Notch & resonator

$$H(z) = K \frac{(z - R_z e^{j\Omega_z})(z - R_z e^{-j\Omega_z})}{(z - R_p e^{j\Omega_p})(z - R_p e^{-j\Omega_p})}$$

- Samme frekvens for poler/nuller: $\Omega_0 = \Omega_p = \Omega_z$
- Stabilitet og kausalitet: $R_p < 1$

Minimum fase: $R_z < 1$:

- $R_z > R_p$: Minimum ved Ω_0 :
Notchfilter
 - Også for $R_p=0 \Rightarrow$ FIR
- $R_z < R_p$: Max i Ω_0 : Resonator
 - Også for $R_z=0$

Ikke minimum fase:

- $R_z=1$: Notch: $H(F_0)=0$
- $1 < R_z < 1/R_p$: Svakere notch
- $R_z=1/R_p$: Allpass
- $R_z > 1/R_p$: Resonator i Ω_0

20. oktober 2009

52

UNIVERSITETET
I OSLO

1/3-octave equalizer



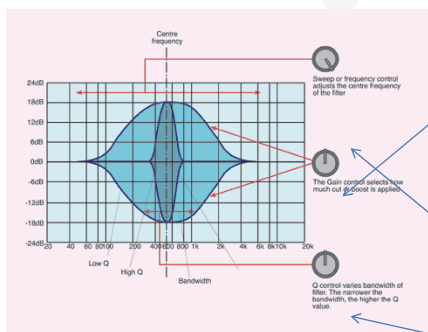
- 31-band Behringer 1/3-octave graphic equalizer with LEDs that show signal presence per frequency band

Shelving/parametric EQ

- The equaliser section from the Audient ASP8024 Mixing console.
- The upper section has high and low shelving EQ
- The lower section has fully parametric EQ.



Equalizers



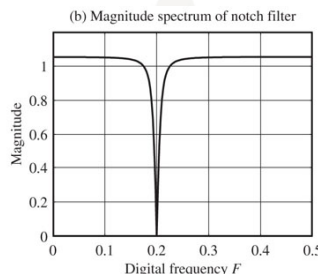
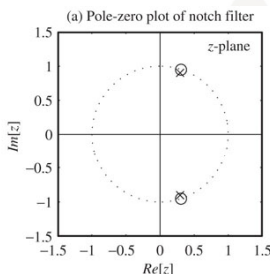
- Graphic equalizer:
 - one *gain control* per center frequency spaced by octaves, 1/3-octaves
- Parametric:
 - may also vary *center frequency*
 - Option: may also vary *Q-factor (bandwidth)*



Eks 6.7b: 2. ordens notch

- Sentrert om 60 Hz, stoppbånd (båndbredde) 5 Hz, $f_s=300$ Hz
 - Nettstøy (USA) – eller dempe bassresonans i rom
 - $\Omega_0=2\pi \cdot 60/300 = 2\pi/5$, $\Delta\Omega=2\pi \cdot 5/300=\pi/30$,
 $R \approx 1-\Delta\Omega/2 = 0.9476$

FIGURE E.6.7B Frequency response of the bandstop filter for Example 6.7(b)



20. oktober 2009

56



Eks 6.8: Digital resonator

- Resonans: 50 Hz, $f_s=300$ Hz, båndbredde 6 Hz
 - $\Omega_0=2\pi \cdot 50/300 = \pi/3$, $\Delta\Omega=2\pi 6/300=0.04\pi$,
 $R \approx 1-\Delta\Omega/2 = 0.9372$
- Nullpunktspær i 0, poler nær enhetssirkelen ved resonansen

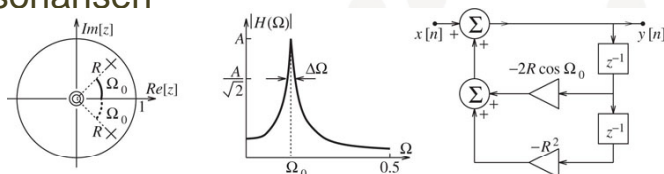


FIGURE 6.11 A second-order digital resonator. The conjugate poles closer to the unit circle ensure a sharper peak. The zeros at the origin are not a requirement and may be removed or even moved elsewhere in order to change the shape of the response. A realization requires two delay elements.

20. oktober 2009

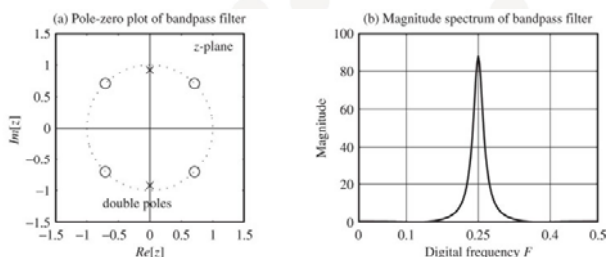
57



Eks 6.7a: 2. ordens båndpass

- Sentrert om 100 Hz, passbånd 10 Hz, stoppbåndsgrenser 50 Hz og 150 Hz, $f_s=400$ Hz
 - $\Omega_0=2\pi \cdot 100/400 = \pi/2$, stoppbånd $\pi/4, 3\pi/4$,
 - $\Delta\Omega=\pi/20$, $R \approx 1-\Delta\Omega/2 = 0.9215$

FIGURE E.6.7A Frequency response of the bandpass filter for Example 6.7(a)



20. oktober 2009

58



6.4 Allpassfiltre

$$H_A(F) = \frac{A + Be^{j2\pi F}}{B + Ae^{j2\pi F}}$$

- To unike koeffisienter, egentlig bare én: B/A
- $H_A(0) = (A+B)/(B+A) = 1$, $H_A(0.5) = (A-B)/(B-A) = -1$
 - Altså $|H_A(0)| = |H_A(0.5)| = 1$
 - Gjelder alle frekvenser: Allpass
- Brukes for å modifisere fasen
 - Kan gjøre et ikke-minimum fase system om til minimum fase
 - Kan brukes til å approksimere ikke-heltallige forsinkelser

20. oktober 2009

59

UNIVERSITETET
I OSLO

Analyse av enkelt allpassfilter

$$H(z) = \frac{A + Bz}{B + Az} = \frac{1 + \alpha z}{z + \alpha}, \alpha = B/A, |\alpha| < 1$$

$$H(F) = \frac{1 + \alpha e^{j2\pi F}}{\alpha + e^{j2\pi F}} = \frac{e^{-j\pi F} + \alpha e^{j\pi F}}{\alpha e^{-j\pi F} + e^{j\pi F}}$$

- Teller og nevner = kompleks konjugerte \Rightarrow samme tallverdi
- Fasen til $H(F)$ er 2 x fasen til telleren
- Telleren:

$$\cos(\pi F) - j \sin(\pi F) + \alpha \cos(\pi F) + j \alpha \sin(\pi F) = (1 + \alpha) \cos(\pi F) - j(1 - \alpha) \sin(\pi F)$$

$$\angle H(F) = -2 \tan^{-1} [\text{Im}(\text{teller}) / \text{Re}(\text{teller})] = -2 \tan^{-1} \left[\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \tan(\pi F) \right]$$

$$t_p(F) = -\frac{\angle H(F)}{2\pi F} = \frac{1}{\pi F} \tan^{-1} \left[\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \tan(\pi F) \right] \approx \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, F \ll 1$$

- For $\alpha < 1$ blir forsinkelsen $t_p < 1$: ikke-heltallig forsinkelse (lav F)

20. oktober 2009

60

UNIVERSITETET
I OSLO

Allpassfiltre, generelt

$$H_{AP}(z) = \frac{C_N + C_{N-1}z^{-1} + \dots + C_1z^{N-1} + z^{-N}}{1 + C_1z^{-1} + \dots + C_{N-1}z^{N-1} + C_Nz^{-N}}$$

Hvordan kjenne igjen et allpass filter?

1. Koeffisientene i teller og nevner er like, men i omvendt rekkefølge
2. Hver pol har et konjugert resiprokt nullpunkt
3. Differanselikning for høyre og venstre side er speilvendte av hverandre

20. oktober 2009

61

UNIVERSITETET
I OSLO

Lydeffekter

- [Shortcut to musikkeffekter.ppt.lnk](#)
- Se også kapittel 7.9 Digital Audio Effects

20. oktober 2009

62

UNIVERSITETET
I OSLO