



Temaer

1. Sampling og rekonstruksjon
2. Finne spektret til samplet signal
3. Gjenvinning med forskjellige interpolasjoner
4. Nullinnsetting og spektrumskompresjon
5. Digital økning eller senking av samplingsrate
6. Kvantisering og kvantiseringsfeil
7. Design av anti-aliasing og anti-imaging filtre
8. Forstå endel lydeffekter
9. Delta-sigma

27. oktober 2009

2

7.1 Ideell sampling

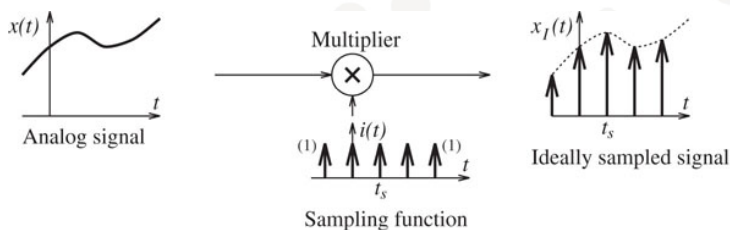


FIGURE 7.1 The ideal sampling operation. An analog signal multiplied by a periodic impulse train (the ideal sampling function) results in a train of impulses whose strengths match the values of the analog signal at the sampling instants

27. oktober 2009

3



Spektra ved ideell sampling

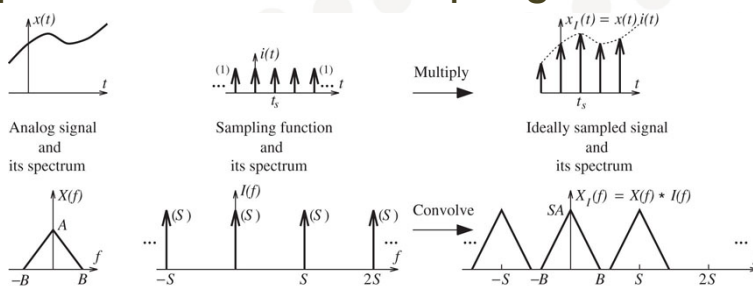


FIGURE 7.2 Spectra of the signals for ideal sampling. The spectrum $X(f)$ of the analog signal is assumed to be bandlimited to B . The spectrum of the impulse sampling function is also a periodic impulse train with equal strengths. Multiplication of the analog signal and the ideal sampling function results in the convolution of their respective spectra. The spectrum of the sampled signal thus consists of replicas of $X(f)$ at multiples of the sampling rate S

- Multiplikasjon i tidsdomenet \Leftrightarrow Konvolusjon i frekvensdomenet
- Konvolusjon med impulser \Leftrightarrow forskjøvede kopier \Rightarrow periodisk

27. oktober 2009

4



Sampling i tid og frekvens: formler

- Sampling \Leftrightarrow multiplikasjon med impulstog

$$x_I(t) = x(t)i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nt_s)$$

- Fourier transformen til impulstog:

- Analog signalbehandling, Appendiks A5.6
- Et nytt impulstog, $S=1/t_s$:

$$I(f) = S \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kS)$$

- Spektrum av samplet signal:

$$X_I(f) = X(f) * S \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kS) = S \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kS)$$

- Dvs $X(f)$ og kopier av den med avstand S

27. oktober 2009

5

UNIVERSITETET
I OSLO

Over-, undersampling, kritisk sampling

- Båndbredde B vs. samplingsfrekvens S
- Replikaer av originalt spektrum, kan overlappe

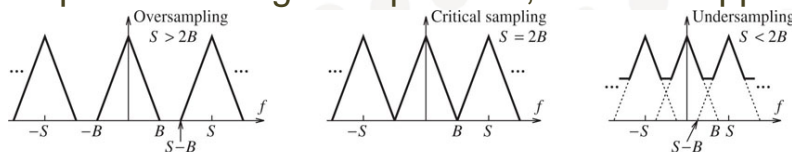


FIGURE 7.3 Spectrum of an ideally sampled signal for three choices of the sampling frequency S . The spectrum $X(f)$ of the analog signal is bandlimited to B . If $S > 2B$ (oversampling), the periodic spectrum of the sampled signal shows non-overlapping replicas of $X(f)$. If $S = 2B$ (critical sampling), the replicas touch at the origin. If $S < 2B$ (undersampling), the replicas overlap and one period of the periodic spectrum no longer matches $X(f)$. The critical case $S = 2B$ forms the transition between oversampling and undersampling

- Samplingsteoremet: $S \geq 2B$: Taper ikke info
 - $S=2B$: Nyquist rate, $t_N=1/2B$: Nyquist intervallet

27. oktober 2009

6

UNIVERSITETET
I OSLO

Sinuser og periodiske signaler

- Sinus med frekvens f_0 :
 - Høyeste (=eneste) frekvens $B=f_0 \Leftrightarrow$ sampling: $S \geq 2f_0$
- Minst to samples pr periode
 - NB! Farlig med akkurat to pr periode: kan treffe nullgjennomganger: unngå kritisk sampling
- Oversamplet, $S > 2f_0$: Impulser ved $\pm f_0$
- Undersamplet, $S < 2f_0$: Impulser ved $\pm f_a$, $|f_a| < S/2$
 - Finner f_a ved å trekke et helt antall S fra f_0 : $f_a = f_0 - N \cdot S$ der N er slik at $|f_a| < S/2$: Alltid: $f_a \leq f_0$
 - Denne formelen er litt uvanlig, må itereres. Som regel er N liten så det kan gjøres enkelt.

27. oktober 2009

7



Aliasing for samplet sinus

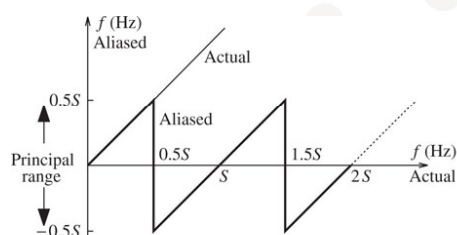


FIGURE 7.4 Relation between the actual and aliased frequency. There is a unique correspondence between the actual and aliased frequency only if $f < 0.5S$. If the actual frequency exceeds $0.5S$, it gets aliased to a lower frequency between $-0.5S$ and $0.5S$. The frequency $0.5S$ at which the aliased frequency flips (changes sign) is called the folding frequency

- $f_0 = S/2 + \epsilon$: sprang på S
- $f_0 = f_a + NS$: flertydighet

27. oktober 2009

8



Aliasing - eksempler

Sinus på $f_0=100$ Hz

1. $S=300$ Hz:
 - Ingen aliasing
2. $S=80$ Hz $< 2f_0$:
 - $f_a=f_0-N\cdot S=100-N\cdot 80=20$ ($N=1$)
3. $S=60$ Hz $< 2f_0$:
 - $f_a=f_0-N\cdot S=100-N\cdot 60=-20$ ($N=2$) [$N=1 \rightarrow 40 > S/2$]
 - Nå blir opprinnelige positive frekvenser aliaset til negative og omvendt, dvs fase reversering.

27. oktober 2009

9

UNIVERSITETET
I OSLO

Aliasing - eksempler

- Sum av sinuser:
- $8\cos(2\pi t) + 6\cos(8\pi t) + 4\cos(22\pi t) + 6\sin(32\pi t) + \cos(58\pi t) + \sin(66\pi t)$
 - Fundamental ($f_0=1$) + 4., 11., 16., 29. og 33. harmoniske
 - Korrekt samplet ved $S>66$ Hz
- Sampling ved $S=10$ Hz:
 - Frekvenser: $f_0=1$, $f_{0,4}=4 < S/2$
 - Alle andre, dvs $f_{0,n}=11, 16, 29$ og 33 blir aliaset
 - $11 \rightarrow 11-1\cdot S = 1$; $16 \rightarrow 16-2\cdot 10 = -4$
 - $29 \rightarrow 29-3\cdot S = -1$; $33 \rightarrow 33-3\cdot 10 = 3$

27. oktober 2009

10

UNIVERSITETET
I OSLO

Samplingskop: utnyttelse av aliasing

- Anta periodisk signal – gjentar seg: kan måle mange ganger
- Båndbegrenset
- Får en strukket versjon av signalet ved å samle litt senere for hver periode
 - Samme prinsipp: 3D avbildning av hjertet med ultralyd gatet mot EKG: endel av bildet i hver periode



Gruppens akustikk-lab: <http://www.ifi.uio.no/research/centres/sfa/laboratory.html>

27. oktober 2009

11



Samplingskop

- Signal: $1 + \cos(2\pi f_0 t)$: $f_0 = 100$ MHz
 - Nyquistsampling $S > 200$ MHz,
 - Her $S = 98$ MHz som aliaser til $100 - 98 = 2$ MHz
- Lavpassfiltrering \rightarrow signalet er flyttet til 2 MHz
- Tidsstrekking med $\alpha = f_0 / f_a = 100 / 2 = 50$

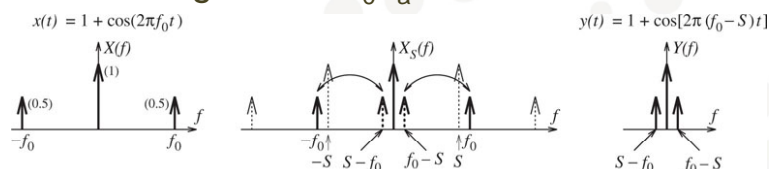


FIGURE 7.5 The principle of the sampling oscilloscope. A high-frequency sinusoid is sampled at a rate far less than the Nyquist rate. The spectrum of the sampled signal corresponds to a much lower frequency and the signal can be displayed on a conventional oscilloscope

27. oktobe

12



Båndpass-sampling

- Nyquist: $S > 2B$ der B er båndbredden.
- Lavpass: $B = f_H$ – ut fra høyeste frekvens
- Båndpass: bare energi mellom f_L og f_H , $B = f_H - f_L$
 - Kan bruke lavere samplingsrate
- Vanlig ved smalbåndssignaler med informasjon sentrert om en høy frekvens:
 - kommunikasjon
 - radar
 - ultralydinstrumenter

27. oktober 2009

13

UNIVERSITETET
I OSLO

Eksempel: båndpass-sampling

- Båndpass fra $f_L = 4$ kHz til $f_H = 6$ kHz, $B = 2$ kHz
 - Hvis vi er heldig kan man sample med $S = 2B = 4$ kHz
 - Lavpass-sampling $S > 12$ kHz
 - Besparelse: 1/3 antall samples
- Ikke alle samplingsrater $S > 2B$ er like bra
 - S må være slik at både f_H og f_L kommer på samme side i spektret etter sampling

27. oktober 2009

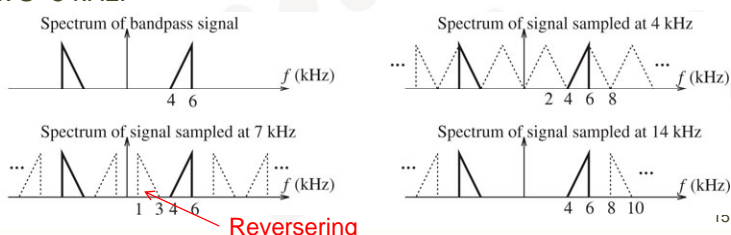
14

UNIVERSITETET
I OSLO

Eksempel: båndpass-sampling

- Betingelse for å bevare all informasjon. La $N = \text{int}(f_H/B)$, $k=1,2,\dots,N$
 - Minste samplingsfrekvens $2f_H/k$
 - Høyeste samplingsfrekvens: $2f_L/(k-1)$
- Eks: $f_L=4$ kHz, $f_H=6$ kHz $\Rightarrow B=2$ kHz, $N=6/2=3$
 - $k=1$: $12 \leq S$: Lavpass-sampling
 - $k=2$: $6 \leq S \leq 8$: fase reversering; $k=3$: $4 \leq S \leq 4$, dvs $S=4$ kHz
 - Forsøk $S=5$ kHz!

FIGURE E.7.4 Spectra of bandpass signal and its sampled versions for Example 7.4



27. oktober 2009

Reversering

15



Sampling/gjenvinning: 0-te ordens hold

- Praktiske A/D-D/A-omformere må samle over et endelig tidsintervall: Her holdes verdien et helt sampleintervall

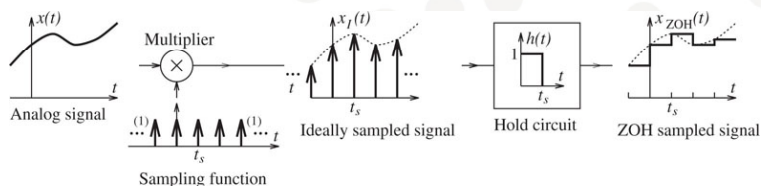


FIGURE 7.8 Zero-order-hold sampling is equivalent to ideal sampling followed by a hold operation. Multiplying an analog signal by a periodic-impulse train (the ideal sampling function) results in a train of impulses whose strengths match the values of the analog signal at the sampling instants. The hold operation (convolution of the impulses with a rectangular pulse) produces a staircase approximation of the analog signal

- Ekvivalent med sampling fulgt av filter
- Viktigere ved gjenvinning med D/A enn ved sampling med A/D

27. oktober 2009

16



0-te ordens hold

- Respons til hold-filteret,
 - $h(t) = \text{rect}[t-0.5t_s/t_s]$, dvs 1 for $|t| < t_s$
- Dette filteret er analogt og må analyseres med kontinuerlig Fourier transform (App. 5, tabell A.6)
- Minner litt om N-punkts midlingsfilter:

$$H(F) = e^{-j\pi(N-1)F} \cdot \frac{\sin(\pi NF)}{N \sin(\pi F)}$$

- Frekvensrespons:

$$H(f) = t_s \text{sinc}(ft_s) e^{-j\pi ft_s} = \frac{1}{S} \text{sinc}(f/S) e^{-j\pi ft_s}, \text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$$

27. oktober 2009

17



0-te ordens hold \Leftrightarrow filter

$$H(f) = t_s \text{sinc}(ft_s) e^{-j\pi ft_s} = \frac{1}{S} \text{sinc}(f/S) e^{-j\pi ft_s}, \text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$$

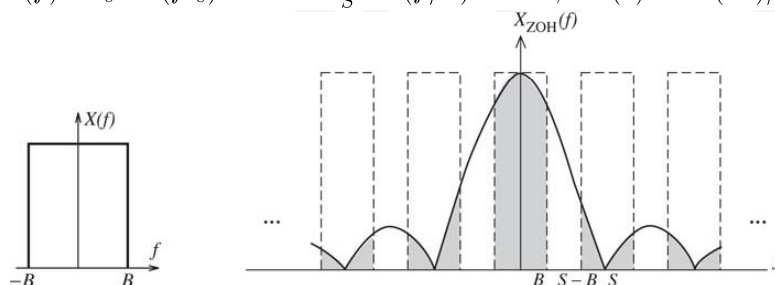


FIGURE 7.9 Illustrating the spectrum of a zero-order-hold sampled signal. The spectrum of the analog signal is $X(f)$. The spectrum of the ideally sampled signal (images of $X(f)$) is multiplied by the spectrum of the hold system (a sinc with a main lobe and sidelobes) to produce the spectrum of the ZOH signal (shown shaded). Note how the sinc shape results in distortion of the images

27. oktober 2009

18



0-te ordens hold: sinc-forvrengning

- Må motforvrengne for å oppheve sinc-funksjonen
 - Ideelt lavpass for å gjenvinne analogt signal fra samplene
 - Fulgt av kompensasjonsfilter

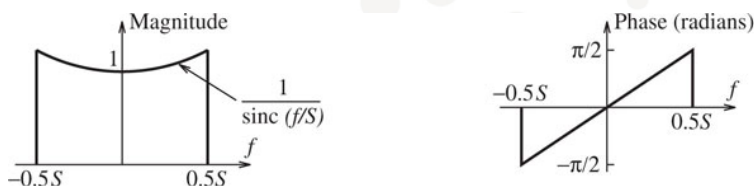


FIGURE 7.10 Spectrum of a filter that compensates for sinc distortion. To undo its effects, the filter gain is chosen as the reciprocal of the sinc (in the principal range). The filter is chosen to have linear phase

27. oktober 2009

19

UNIVERSITETET
I OSLO

0-te ordens hold: motforvrengning (eks)

- Hvor mange dB er maks kompensasjon i et system som er samplet ved Nyquist-raten (worst-case)?

$$H(f) = t_s \text{sinc}(ft_s) e^{-j\pi ft_s} = \frac{1}{S} \text{sinc}(f/S) e^{-j\pi ft_s}, \text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

- $\text{sinc}(0)=1$
- $\text{sinc}(f_{\max}/S) = \text{sinc}(0.5) = \frac{\sin(\pi/2)}{(\pi/2)} = \frac{2}{\pi}$
- I dB: $20\log[(2/\pi)/1] \approx \underline{\underline{-3.9 \text{ dB}}}$

27. oktober 2009

20

UNIVERSITETET
I OSLO

7.2 Sampling – gjenvinning

- Hvordan skal man fylle inn mellom samplene – interpolasjon?

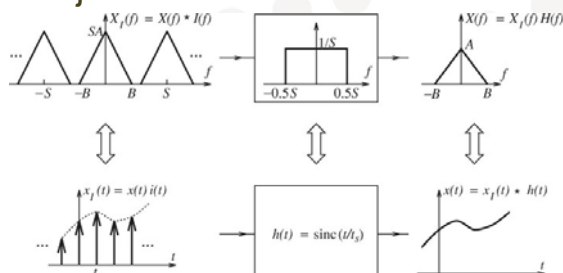


FIGURE 7.11 Recovery of an analog signal from its sampled version. Ideal recovery uses an ideal lowpass filter that extracts the central period of the periodic spectrum of the sampled signal. The equivalent operation in the time domain corresponds to the convolution of the sampled signal with the impulse response of the ideal filter. If the sampling rate exceeds the Nyquist rate, the central period contains just the spectrum of the original signal, and we recover the original signal

27. oktober 2009

21



Interpolasjonsfilter

- Ideelt lavpassfilter - "Mursteinsfilter"
 - Analogt filter: $H(f)=1$ for $|f|<S/2 \Leftrightarrow h(t)=\text{sinc}(t/t_s)$
- Analog konvolusjon: $x(t)=x_I(t) * h(t)$:

$$x(t) = \int_{\tau} x_I(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{\tau} \sum_n x[n]\delta(\tau - nt_s)h(t - \tau)d\tau$$

- Ser ut som en tids-diskret konvolusjon:

$$x(t) = \sum_n x[n]h(t - nt_s) = \sum_n x[n]\text{sinc}\left(\frac{t-nt_s}{t_s}\right)$$

- Forflyttede versjoner av sinc-funksjoner over all tid

27. oktober 2009

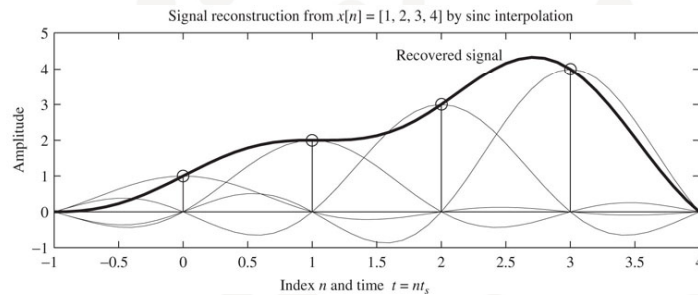
22



Sinc interpolasjon

$$x(t) = \sum_n x[n]h(t - nt_s) = \sum_n x[n]\text{sinc}\left(\frac{t-nt_s}{t_s}\right)$$

FIGURE 7.12 Ideal recovery of an analog signal by sinc interpolation. The recovered signal is the sum of sinc functions centered at the sampling instants. The zeros of these sinc functions occur at multiples of the sampling interval



- Merk:
 - I et sampletidspunkt, $t=nt_s$: bare bidrag fra en sample
 - Må kjenne alle samples, $-\infty < n < \infty$, for gjenvinning
 - Sinc er den korrekte interpolasjon, alle andre interpolatorer må måles mot den

27. oktober 2009

23

UNIVERSITETET
I OSLO

Tilnærminger til sinc-interpolasjon

- Krav:
 - Må treffe eksakt i sampletidspunktene, $t=nt_s$
 - $h_i(t)=1$, $t=0$ og $h_i(t)=0$ for $t=nt_s$
- Må unngå at den er ∞ lang
- $h_i(t)$ må være absolutt integrerbar så den ikke blir ∞ mellom sampletidspunkter

27. oktober 2009

24

UNIVERSITETET
I OSLO

0. eller 1. ordens hold

- Trinn-interpolasjon (0-te ordens hold), allerede analysert:

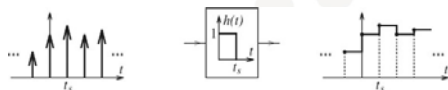


FIGURE 7.13 Step interpolation is just a zero-order-hold operation on an ideally sampled signal. It produces a staircase approximation of the original analog signal

- Lineær interpolasjon: trenger en sample inn i fremtiden

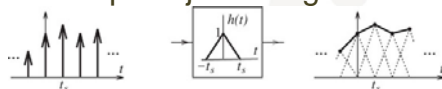


FIGURE 7.14 Linear interpolation is equivalent to using tri functions centered at the sampling instants of an ideally sampled signal to produce a piecewise linear approximation of the original analog signal

- Generelt: $g(t)\text{sinc}(t/t_s)$ der $g(t)$ er en vindusfunksjon
 - $g(1)=1$ og $g(t) \rightarrow 0$ for store $|t|$

27. oktober 2009

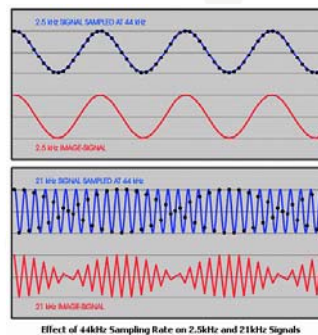
25

The Analoguer - A Remedy for Digitalitis

- Hvilket problem forsøkes løst her og er det egentlig et problem?

- Sitat:

- "The major anomaly of the CD is introduced by the relatively low sampling frequency of 44 kHz. Although this sampling frequency allows us to record signals up to 22 kHz the upper frequencies are not very well presented.
- Figure 1 compares the sampling of a 2.5 kHz and of a 21 kHz waveform. After sampling of the original signals I connected the consecutive measurement-points by straight lines.?
- The image-signal of the 1 kHz signals thus constructed equals the original signal pretty well.
- The image of the 21 kHz signal, however, continuously varies in amplitude; it "wobbles". This phenomenon can be seen with all the higher frequencies above 15 kHz and is an inherent property of the system.
- ... the continuously varying amplitudes in combination with non-linearities of our reproduction system and our ears introduce lower frequency by-products that might well be discernible."



Effect of 44kHz Sampling Rate on 2.5kHz and 21kHz Signals

27. oktober 2009

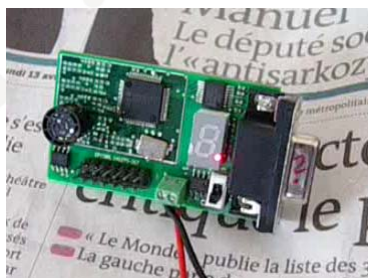
http://www.headwize.com/projects/showfile.php?file=meier4_prj.htm

26

7.3 Samplerate-konvertering

- Ultralyd kommunikasjonssystem for kombinasjon med RFID

- Signal $40 \text{ kHz} \pm 2 - 4 \text{ kHz} \Leftrightarrow B = 4 - 8 \text{ kHz}$
 - Anti-aliasing filter \Leftrightarrow transducers båndpasskarakteristikk
 - $f_s \approx 17.7 \text{ kHz}$: Båndpass sampling
- Desimerer med 8
 - $f_{s2} = 17.7/8 \approx 2.2 \text{ kHz}$
- Videre prosessering for deteksjon og demodulasjon
- S. Holm, "Hybrid ultrasound-RFID indoor positioning: Combining the best of both worlds," IEEE Int. Conf. RFID, Orlando, FL, April, 2009.



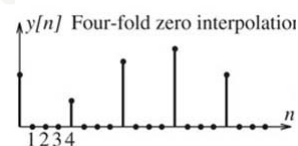
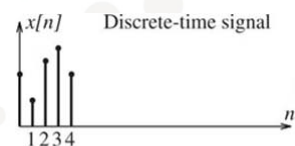
27. oktober 2009

27

UNIVERSITETET
I OSLO

Samplerate-konvertering

- Behov for å konvertere uten å gå om analogt domene
- Oppsampler ved å sette inn 0-er:
 - $y[n] = x \uparrow [n/N] \neq 0$ for $n = kN$
 - Signalet strekkes i tid



$$Y_p(F) = \sum y[n] e^{-j2\pi nF} = \sum y[kN] e^{-j2\pi knF} = \sum x[n] e^{-j2\pi knF} = X_p(NF)$$

- Altså skaleres spektret (komprimeres)
- Lenger i tid \Leftrightarrow kortere i frekvens

27. oktober 2009

28

UNIVERSITETET
I OSLO

Spektrumskompresjon

- Kompresjon av spektret ved oppsamling

$$Y_p(F) = X_p(NF)$$

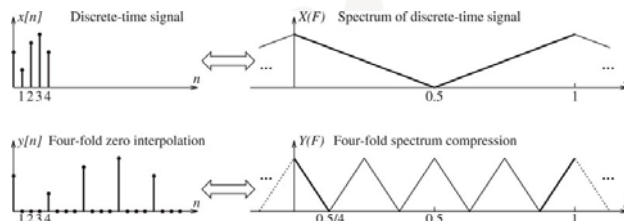


FIGURE 7.16 Zero interpolation of a signal leads to spectrum compression. Zero interpolation of the signal $x[n]$ by a factor of 4 results in the interpolated signal $y[n]$. The spectrum $Y(F)$ shows four-fold compression compared to the spectrum $X(F)$.

27. oktober 2009

29

UNIVERSITETET
I OSLO

Spektrumsstrekking

- Ved nedsampling strekkes spektret
- Desimert signal $y[n]=x[nM]$ – komprimeres i tid
- Nedsampling med faktor M

$$Y_p(F) = (1/M)X_p(F/M)$$

- Må ha med $1/M$ for å bevare energien
- Må først sørge for båndbegrensning til $|F| < 0.5/M$

27. oktober 2009

30

UNIVERSITETET
I OSLO

Oppsampling

- Sett inn N-1 nuller mellom samplene
- \Rightarrow strukket spektrum, men også replikaer som må filtreres bort (\Leftrightarrow (N-1)/N av energien fjernes)
- Anti-imaging filter med kutt ved 0.5/N, Gain N



FIGURE 7.17 Sampling rate increase by an integer factor N requires zero interpolation followed by lowpass filtering. Zero interpolation results in N -fold compression of the spectrum. The central period contains N compressed images. All but one is filtered out by the anti-imaging filter with cutoff frequency $F_c = 0.5/N$. This produces a signal sampled at N times the original rate

27. oktober 2009

31



Oppsampling

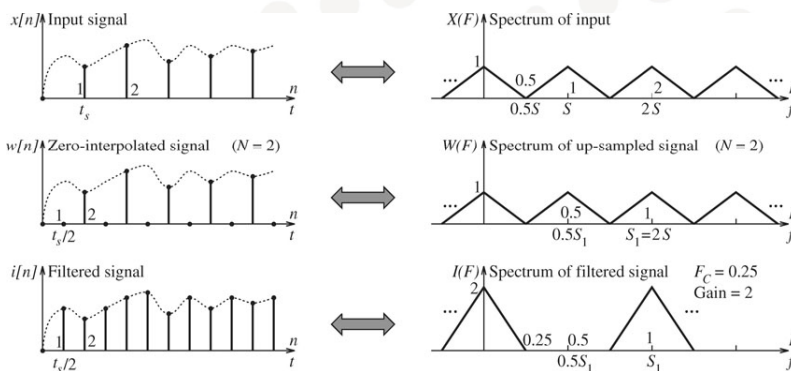


FIGURE 7.18 Spectra of signals when increasing the sampling rate by two. The original spectrum has one image per period. Zero interpolation produces two compressed images per period. A lowpass filter with a cutoff frequency of $F_c = 0.25$ and a gain of 2 eliminates one image. Filtering of the spurious image in the spectrum is equivalent to replacing the zeros in the zero-interpolated signal by actual values of the original signal. The signal $i[n]$ is thus sampled at twice the original rate

27. oktobe.

32



Nedsampling

- Digital lavpass, kutt ved $=0.5/M$
- Kast $M-1$ samples mellom hver sample

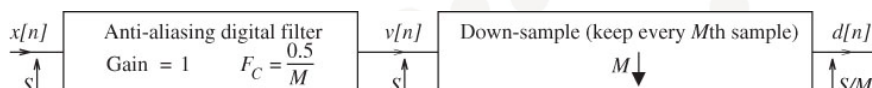


FIGURE 7.19 Sampling rate reduction by an integer factor M requires a lowpass filter followed by decimation (down-sampling). The lowpass filter bandlimits the signal to $F = 0.5/M$. Decimation by M stretches the spectrum and produces a signal sampled at $1/M$ times the original rate

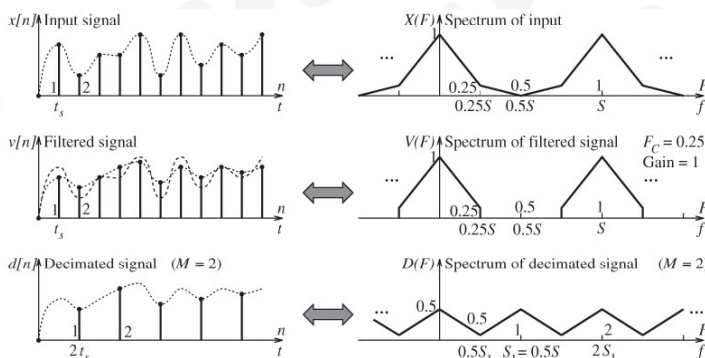
27. oktober 2009

33



Nedsampling

FIGURE 7.20 The spectra of various signals during sampling rate reduction by two. A lowpass filter with a cutoff frequency of $F_c = 0.25$ bandlimits the spectrum. Decimation by 2 stretches the spectrum. The signal $d[n]$ is thus sampled at half the original rate



27. oktober 2009

34



Opp/ned-sampling

- M/N
- Husk! Alltid oppsample først, her med M
- Så nedsample med N
- De to lavpassfilterne slås sammen til ett:
 - Gain $1/N$
 - Cut-off: den minste av $0.5/M$ og $0.5/N$

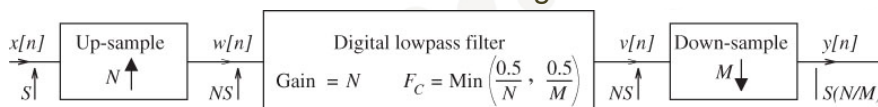


FIGURE 7.21 Illustrating a sampling-rate change by M/N . The first step is up-sampling by N . The second step is lowpass filtering using a gain of N and a cutoff frequency that is the smaller of $0.5/M$ and $0.5/N$. The final step is down-sampling by M

27. oktober 2009

35



7.4 Kvantisering

- Uniform kvantisering: trinnene er like
 - B bits $\Rightarrow L=2^B$ trinn; I praksis vanlig med $B=8, 12, 16, 24$
- Avrunding, avkorting (trunkering), fortegns-avkorting

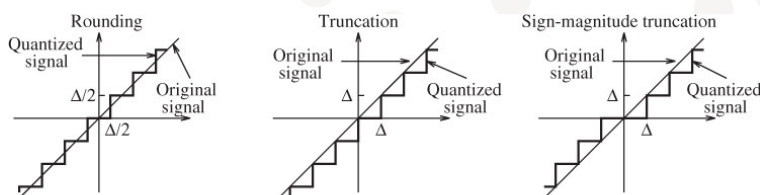


FIGURE 7.22 Various ways of quantizing a signal. The quantized value is chosen as the nearest quantization level when rounding or the next lower level when truncating. In sign-magnitude truncation, the absolute value (magnitude) is truncated and the actual sign is restored afterwards

27. oktober 2009

36



Kvantisering

- Hva skjer hvis inngangsverdi er over maks-verdien?
- Klipping
 - Metning eller nulling

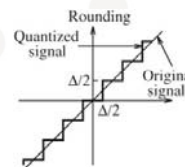
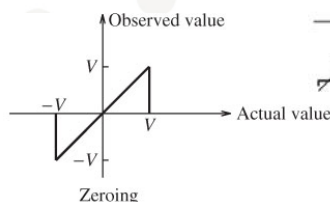
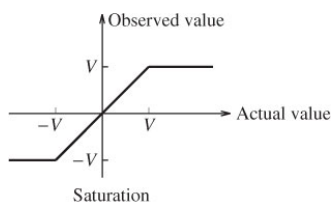


FIGURE 7.23 Two overflow characteristics. In saturation, values outside the full-scale range are set to the full-scale value itself. In zeroing, values outside the full-scale range are set to zero

- Demo: kvantisering.m

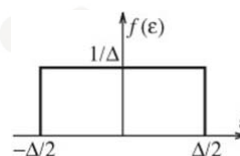
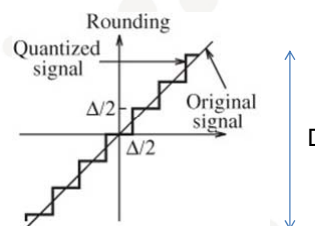
27. oktober 2009

37



Kvantiseringsfeil - kvantiseringsstøy

- Feil $\varepsilon = x[n] - x_Q[n]$
- Maks dynamikk $D = x_{\max} - x_{\min}$
- Kvantiseringsstrinn $\Delta = D/L = D/2^B$
- Dynamikk $\approx D/\Delta = 2^B$
 - dB: $20\log(2^B) = 20\log 2 \cdot B = 6 \cdot B$
 - CD 16 bit \Rightarrow 96 dB dynamikk
 - Litt cirka
- Feil, statistisk: $-\Delta/2 < \varepsilon < \Delta/2$
- Hvis B er stor nok er feilen uniformt fordelt i intervallet



27. oktober 2009

38



Kvantiseringsfeilen

- Effekt i kvantiseringsstøyen
- pdf: $f(\epsilon) = 1/\Delta$ for $|\epsilon| < \Delta/2$
- Støyeffekt = variansen:

$$P_N = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon^2 f(\epsilon) d\epsilon = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \epsilon^2 d\epsilon = \frac{\Delta^2}{12}$$

- $\Delta = D/L = D/2^B$:
- $10\log(P_N) = 10\log(D^2/12L^2) = 20\log D - 20\log L - 10.8$

27. oktober 2009

39



Signal-støy forhold, B-bits kvantisering

- Signal til støy forhold: $SNR = P_S/P_N$:

$$SNR = 10\log(P_S/P_N) = 10\log(P_S) + 20\log(L) - 20\log(D) + 10.8$$

- Uttrykt ved antall bit, $20\log(L) = 20\log(2^B) = 6B$:

$$SNR = 10\log(P_S/P_N) = 10\log(P_S) + 6B - 20\log(D) + 10.8$$

- $SNR \propto 6B$: 6 dB økning i SNR og dynamikk pr bit
- For stor D \Rightarrow faller SNR, dvs hvis maks nivå sjelden overskrides faller SNR
- Avveining mellom mer kvantiseringsstøy eller flere feil pga metning av A/D-omformer

27. oktober 2009

40



Kvantiseringseffekter, eks 7.9a

- Nivå mellom $\pm 2V$, Hvor mange bit trengs for å få $< 5mV$ rms kvantiseringsfeil?
 - $D=4 V$
 - $\sigma = \Delta/12^{0.5}$ og $\Delta = D/2^B \Leftrightarrow 2^B = D/\Delta$
 - $2^B = D/\Delta = D/(\sigma \cdot 12^{0.5}) = 4/(0.005 \cdot 12^{0.5}) \approx 231$
 - $B = \log_2(231) \approx 7.85$, dvs $B=8$ bit

27. oktober 2009

41

UNIVERSITETET
I OSLO

Kvantisering av sinus

- $x(t) = A \cos(\cdot)$
- Effekt, $P_S = \text{rms-verdi} = A^2/2$
- Spiss-til-spissverdi: $D = 2A$

$$SNR = 10 \log(P_S) + 6B - 20 \log(D) + 10.8$$

$$SNR = 10 \log(A^2/2) + 6B - 20 \log(2A) + 10.8$$

$$SNR = 20 \log(A) - 3 + 6B - 20 \log(A) - 6 + 10.8 = 6B + 1.8$$

- Eksakt resultat: $SNR = 6B + 1.76$ dB

27. oktober 2009

42

UNIVERSITETET
I OSLO

7.5 Digital prosessering av analoge signaler

- Anti-aliasing filter, sampler (0-te ordens hold), kvantisering, koder:

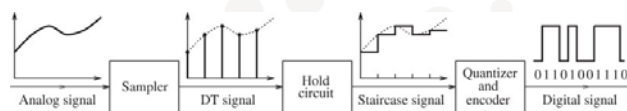


FIGURE 7.25 Block diagram of a system for analog-to-digital conversion. The sampler produces a discrete signal. The hold circuit yields the staircase approximation. The quantizer and encoder yield the digital signal as a stream of zeros and ones

- Så digital prosessering
- Dekoder, hold, analogt (anti-imaging) filter: $\sim \text{sinc}$:

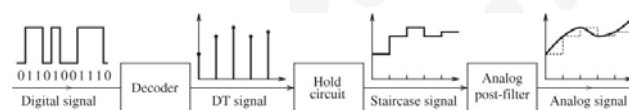


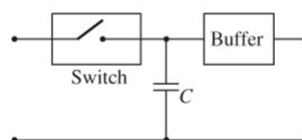
FIGURE 7.26 Block diagram of a system for analog-to-digital conversion. The decoder converts the digital bit stream to a discrete signal. The hold circuit yields a staircase approximation. The analog post-filter helps round out the edges to yield the smoothed analog signal

27. oktober 2009

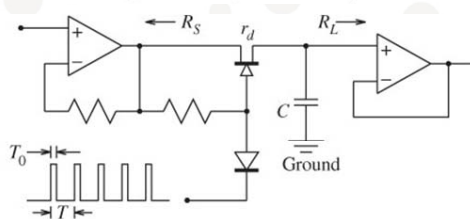
43

Praktisk A/D

- Klokke \rightarrow Svitsj
 - Kondensator C lades hurtig
 - Utlades langsomt gjennom buffer-forsterker
- Parametre som påvirker ytelse:
 - Tid for å sample $>$ en impuls
 - Tid for å bytte fra hold til sampling
 - Fall i Cs spenning i løpet av måletiden
 - Konverteringstid



Block diagram of sample-and-hold system



Implementation using an FET as a switch

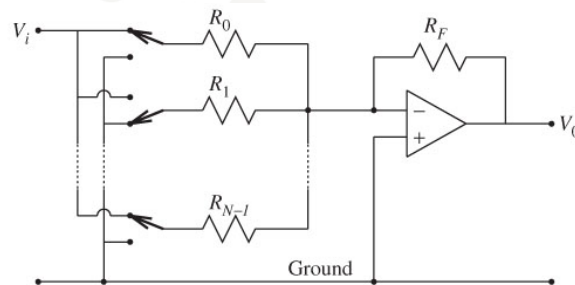
27. oktober 2009

44

Praktisk D/A

- Summasjonsforsterker: $V_O = -V_i (R_F/R_i)$
- R_i varieres ved å svitsje inn og ut motstander R_0 ... R_{N-1} avhengig av hvilket bit som er satt

FIGURE 7.28 A
system for
digital-to-analog
conversion



27. oktober 2009

45

Anti-aliasing filter

- Analogt filter
- Båndbegrensning av input signal: bare $f < S/2$
 - I praksis kan man ikke lage ideelle mursteinsfiltre
 - Bli derfor noe aliasing
- Mulig kriterium: energi over $S/2$ skal være mindre enn kvantiseringsstøyen
 - Kan avlede filterkrav av dette
- Kan og sette S litt høyere enn ideell verdi

27. oktober 2009

46

Rekonstruksjonsfilter

- Analogt filter
- Ta ut sentrale delen av spektret, $|f| < S/2$
- Evt. Korrigere for 0-te ordens hold i D/A
- Oversampling (eks 4x)
 - Kan virke bortkastet
 - Gjør kravet til analogt filter mye lettere
 - Lenger avstand mellom repeterte spektra \Leftrightarrow glattere trinn



FIGURE 7.29 Staircase reconstruction of a signal at low (left) and high (right) sampling rates. Higher sampling rates produce a much better approximation to the underlying signal and allow the use of a simpler post-filter to smooth out the edges

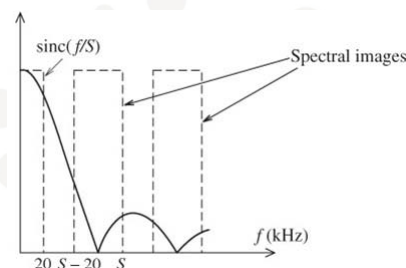
27. oktober 2009

47

UNIVERSITETET
I OSLO

Eks 7.12 Rekonstruksjonsfilter

- CD med $f_s=44.1$ kHz
 - Signal mellom 0 og 20 kHz
 - Maks passbåndsdemping: 0.5 dB
 - Stoppbåndsdemping >60 dB for $f > S - 20$ kHz
- D/A, rett-fram sampling, $S=44.1$ kHz:
 - $S-20 = 44.1-20 = 22.1$ kHz
 - Transisjonsbånd: 20-22.1 kHz \Rightarrow 80. ordens analogt Butterworth
- D/A, 4x oversampling, $S=176.4$ kHz:
 - $S-20=176.4-20 = 156.4$ kHz
 - Transisjonsbånd: 20-156.4 kHz \Rightarrow 4. ordens Butterworth
 - Enorm reduksjon i kompleksitet
 - Tidlige CD-spillere (4x + 2. eller 3. ordens Bessel \approx lineær fase))



27. oktober 2009

48

UNIVERSITETET
I OSLO

7.11 Multirate signalbehandling og Δ - Σ

- Fordel å redusere samplingsrate internt i DSP-er
 - Eks: ultralydmottaker for å få færre operasjoner
- Fordel å øke samplingsrate før rekonstruksjon
 - Eks: 4 x oversampling i CD-spiller
 - for å få enklere analog filter
 - Enklere kompensasjon for 0-te ordens hold

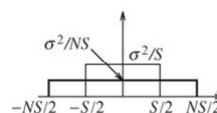
27. oktober 2009

49



Kvantisering og oversampling

- Oversampling av analogt signal:
 - Enklere anti-aliasing filter
 - Færre bit i A/D-konverter da kvantiseringsstøy spres over et større frekvensbånd
- Kvantiseringsstøy ~hvit hvis nok bit brukes
 - Hvit \Leftrightarrow Jevnt spredt over alle frekvenser $-S/2 < f < S/2$
 - Varians $P = \sigma^2 = \Delta^2/12$
 - Spektraltetthet: $P_{ee}(f) = \sigma^2/S$
- Ved oversampling med N
 - Spektraltetthet: $P_{ee}(f) = \sigma^2/NS$



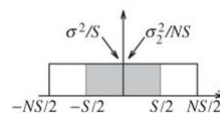
27. oktober 2009

50



Oversamplingfaktor vs antall bit

- Mål: kvantiseringsstøy i båndet $-S/2$... $S/2$ skal være det samme som før
- σ_2^2 skyldes bruk av $B_2 = B - \Delta B$ bit
- $\sigma^2/S = \sigma_2^2/NS \Leftrightarrow \sigma^2 = \sigma_2^2/N$
 - $\sigma^2 = D^2/(12 \cdot 2^{2B})$
 - $\sigma_2^2/N = D^2/(12 \cdot N \cdot 2^{2(B - \Delta B)})$
- Altså: $N = 2^{2\Delta B}$ eller $\Delta B = 0.5 \log_2 N$
 - $N=2$: dobling av rate \Rightarrow sparer halv bit
 - $N=4$: \Rightarrow 1 bit



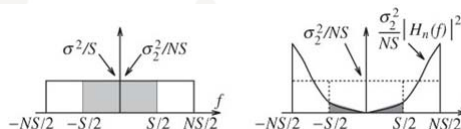
27. oktober 2009

51

Oversampling og støyforming

- Forming av spektret til kvantiseringsstøyen
- Vanlig støyformer er sinus-formet for $|f| < S/2$:

$$H_{NS}(f) = |2 \sin(\pi f) / NS|^p$$



- Kan vise besparelse på $\Delta B = (p+0.5) \log_2 N - 0.5 \log_2 (\pi^{2p} / (2p+1))$ bit
- Eks: $N=4, p=1$: $\Delta B \approx 2$ bit

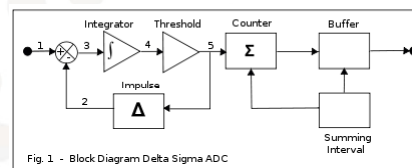
27. oktober 2009

52

1-bits sampling (Sigma-delta) i CD

- CD: må ha besparelse på $\Delta B = 16 - 1 = 15$ bit
 - 1-bits A/D er bare en fortegnedetektor
- Hva skal til?
 - $N = 64$, dvs $44.1 \cdot 16 \text{ kHz} = 2.8224 \text{ MHz}$
 - $p = 3$. ordens støyforming
 - $\Delta B = (0.5 + 3) \cdot 6 - 3.55 = 17.5 \text{ bit} (> 15)$

- Sigma = integrator
- Delta = differanse



- III: Wikimedia commons

27. oktober 2009

53

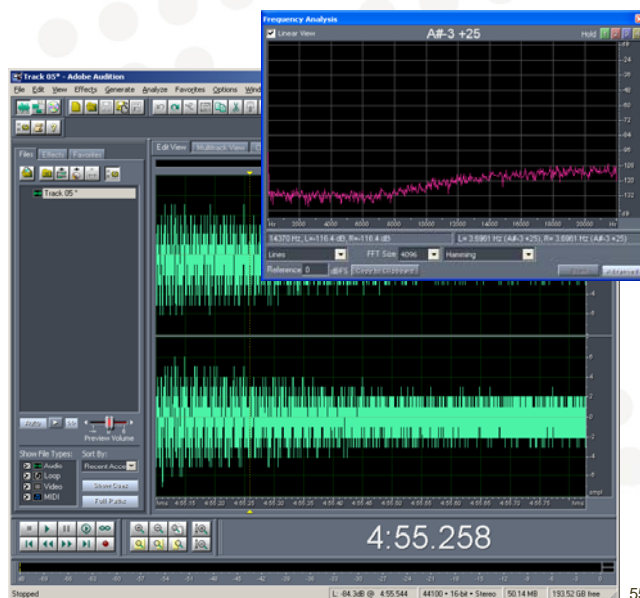
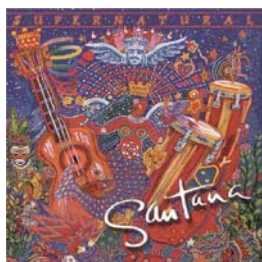
Dårlige CD-plater: Dither

- Tidlige CD-plater: avrundingsproblem.
- Ikke som avrundning i kassa på Rimi
- => hørbar forringelse i de svake partiene.
 - Eks: pianotoner som dør ut
- Paradoks: må legge til kontrollert støy, dither, ved produksjon av CD-en.
 - Støyforming så dens energi er mest i diskanten

54

Dither

- Santana: Smooth, 1999
- Slutten av låten
- Maks +/- 3
- Trekant-fordeling
- Støyforming

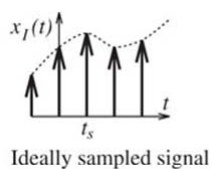


ifi

UNIVERSITETET
I OSLO

Analog vs digital

- Hva vil dere svare til en slik påstand?
 - "Digital lyd (CD) er klinisk og oppstykket – analog lyd (vinyl) er organisk"



27. oktober 2009

56

ifi

UNIVERSITETET
I OSLO