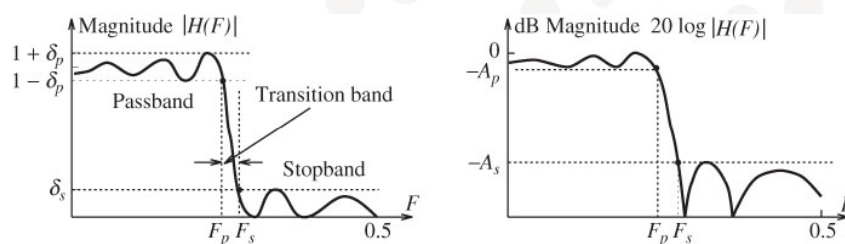




## IIR filterdesign

Sverre Holm

### Filterspesifikasjon



**FIGURE 9.1** The features of a typical lowpass digital filter. Up to the passband edge  $F_p$ , the gain is nearly unity, with small variations about unity measured by the passband ripple  $\delta_p$ . Past the stopband edge  $F_s$ , the gain is nearly zero, with a maximum variation measured by the stopband ripple  $\delta_s$ . On the decibel scale, unit gain corresponds to 0 dB. The *maximum* passband attenuation and *minimum* stopband attenuation are measured by  $A_p$ -dB and  $A_s$ -dB, respectively. These correspond to a *minimum* passband gain of  $-A_p$ -dB and a *maximum* stopband gain of  $-A_s$ -dB, respectively

## IIR kontra FIR

- IIR filtre er mer effektive enn FIR – færre koeffisienter for samme magnitudespesifikasjon
- Men bare FIR kan gi eksakt lineær fase
  - Lineær fase  $\Leftrightarrow$  symmetrisk  $h[n]$
  - $\Rightarrow$  Nullpunkter symmetrisk om  $|z|=1$
  - Lineær fase IIR?  $\Rightarrow$  Poler utenfor enhetssirkelen  $\Rightarrow$  ustabil
- IIR kan også bli ustabile pga avrunding i aritmetikken, det kan ikke FIR

UNIVERSITETET  
I OSLO

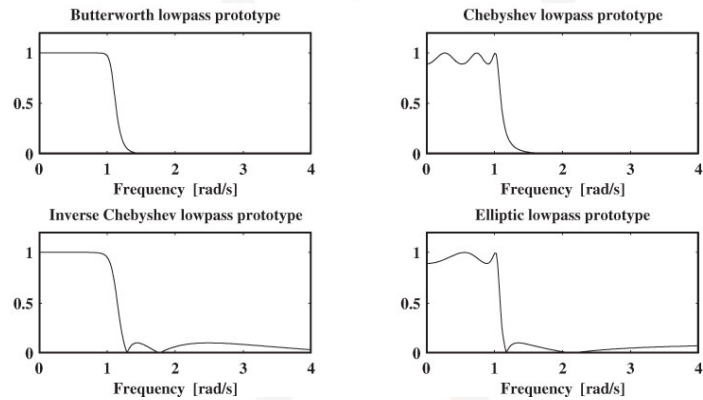
## IIR Designmetode

1. Analogt prototypfilter
  1. Start med analogt lavpass prototypfilter
  2. Konverteres til digitalt filter
  3. Konverteres eventuelt til digitalt høypass, båndpass, båndstopp
2. Direkte design

UNIVERSITETET  
I OSLO

## Standard analoge filtre (magnitude)

FIGURE A.15  
Classical analog  
lowpass prototypes



## Standard analoge filtre

- Butterworth filter
  - Ikke ripple i passbånd eller i stoppbånd, stor transisjonsbåndbredde
- Tshebysjef filter (Type I)
  - Ikke ripple i stoppbånd, midlere transisjonsbåndbredde
- Tshebysjef filter (Invers eller type II)
  - Ikke ripple i passbånd, midlere transisjonsbåndbredde
- Elliptisk filter
  - Gainripple i både pass- og stoppbånd, smalt transisjonsbånd
- Andre:
  - Bessel filter
    - Lite ripple i gruppeforsinkelsen, ikke gainripple i verken pass- eller stoppbånd, stor transisjonsbåndbredde
  - Linkwitz-Riley filter (=2 Butterworth etter hverandre)
    - Brukes i høyttalersystemer for deling mellom høyttalerelementer



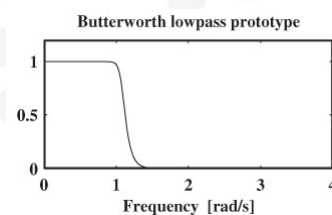
## Filterflanker

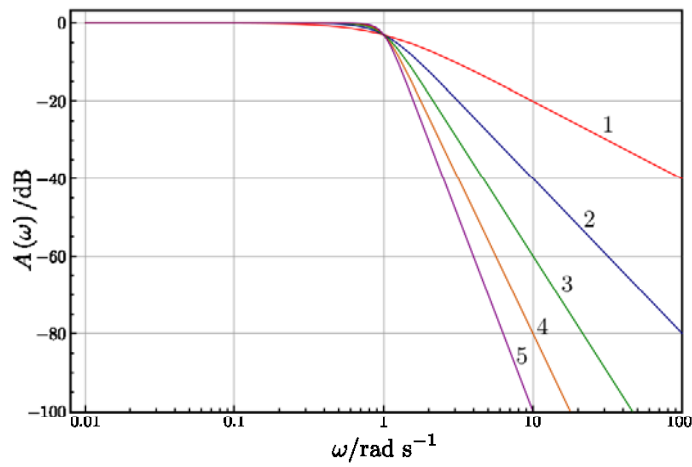
- **Dekade:** 10 x frekvens, f.eks. 100 Hz  $\rightarrow$  1 kHz er en dekade
- **Oktav:** 2 x frekvens (oktav=8  $\Leftrightarrow$  hvite pianotangenter), f.eks. 100 Hz  $\rightarrow$  200 Hz
  - 1. ordens filter: faller av med 6 dB pr oktav (20 dB pr dekade)
  - 2. ordens filter: responsen faller med 12 dB pr oktav (40 dB pr dekade)
  - 3. ordens: 18 dB, ...



## Butterworth filter

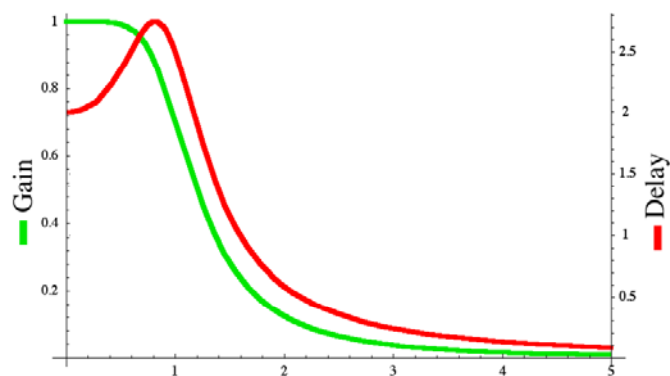
- Maximalt flatt (ingen ripple) i passbåndet, faller av mot 0 i stoppbåndet.
- Butterworth filtre faller monotont med  $\omega$ .
- Først beskrevet av britiske Stephen Butterworth i "On the Theory of Filter Amplifiers", Wireless Engineer, vol. 7, 1930, pp. 536-541.
- Nte ordens filter: alle deriverte til  $|H(j\omega)|^2$  opp til og med den  $2N-1$  deriverte er 0 ved  $\omega=0$ , dvs maksimalt flat.
- I dB: Faller av mot høye frekvenser med  $20n$  dB/dekade  $\Leftrightarrow$   $6n$  dB/oktav





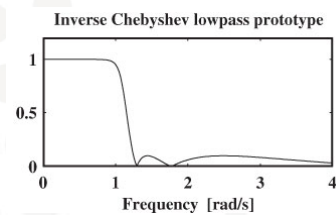
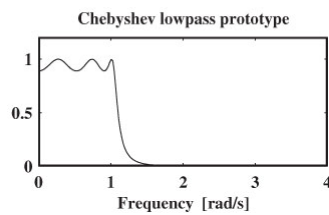
Plott av gain til Butterworth lavpass filtre av orden 1 til 5.  
Merk at de faller av med  $20n$  dB/dekade der  $n$  er filter orden.

### 3. ordens Butterworth, $\omega_p=1$

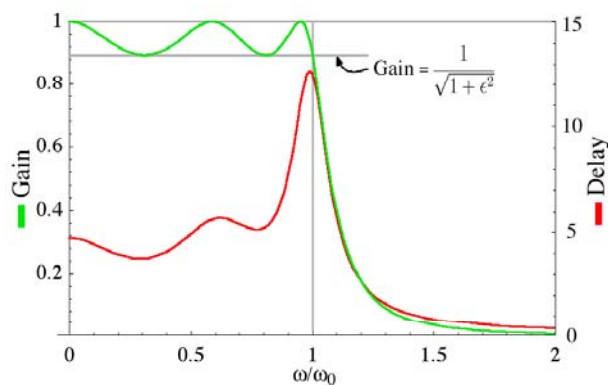


## Tsjebysjef filter

- Smalere transisjonsbånd og mer passbåndripple (type I) eller stoppbåndripple (type II) enn Butterworth
- Definert ved hjelp av Tsjebysjef polynomer
- Pafnutij Tsjebysjov(1821-1894), russisk matematiker
  - Пафну́тий Льво́вич Чебышёв
  - Chebyshev, Chebychev, Chebyshov, Tchebycheff, Tschebyscheff

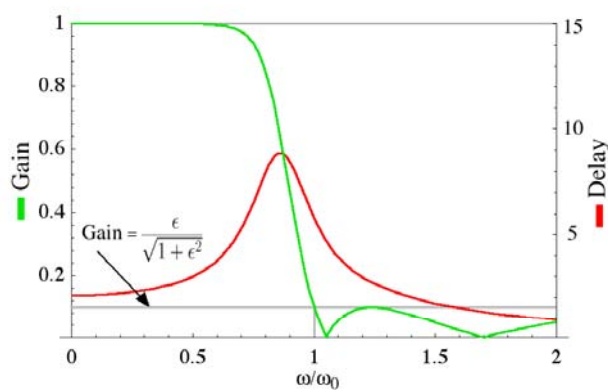


## 5. Ordens Tsjebysjef, type I ( $\epsilon=0.5$ )



- Ripple i magnitudo og i gruppeforsinkelse i passbåndet, men ikke i stoppbåndet

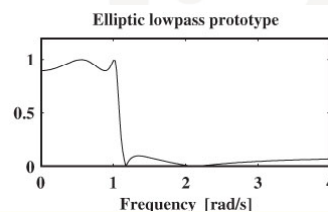
## 5. Ordens Tshebysjef, type II ( $\epsilon=0.1$ )



Ripple i magnitude i stoppbåndet, men ikke i passbåndet.

## Elliptisk filter (Cauer filter)

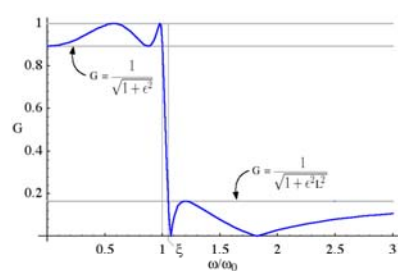
- Et elliptisk filter har samme ripple (equiripple) i både passbåndet og stoppbåndet.
- Mengden av ripple i hvert bånd kan justeres uavhengig
- Det mest effektive filtret siden intet annet filter av samme orden kan ha raskere transisjon mellom passbånd og stoppbånd for en gitt verdi for ripple
- Filter uttrykkes ved hjelp av Jacobi elliptiske funksjoner



## Cauer

- Wilhelm Cauer (24 juni 1900 – 22 april 1945): tysk matematiker og vitenskapsmann.
- Mest kjent for sitt arbeid med analyse og syntese av filtre. Hans arbeid var starten på nettverkssyntese.
- Før hans tid var design av filtre en kunst, som krevde spesialkunnskap og intuisjon.
- Cauer ga feltet et solid matematisk grunnlag og en teoretisk basis for rasjonell design av elektroniske filtre

## 4. Ordens elliptisk filter



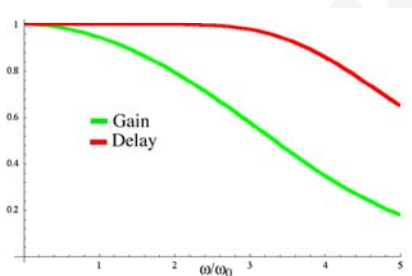
- 4. ordens elliptisk lavpass filter ( $\epsilon=0.5$ ,  $\xi=1.05$ )
- Viser også laveste gain i passbånd og maksimalt gain i stoppbånd
- Transisjonsbånd mellom normalisert frekvens 1 og  $\xi$



## Bessel filter

- Bessel filter: Maksimalt flat gruppeforsinkelse ( $\approx$  lineær fase).
- Analoge Bessel filtre har nesten konstant gruppeforsinkelse over hele passbåndet.
- Det filteret som best bevarer kurveformen til filtrerte signaler i passbåndet.
- Friedrich Bessel (1784–1846): Filterpolynomet uttrykkes ved hjelp av Bessel funksjoner

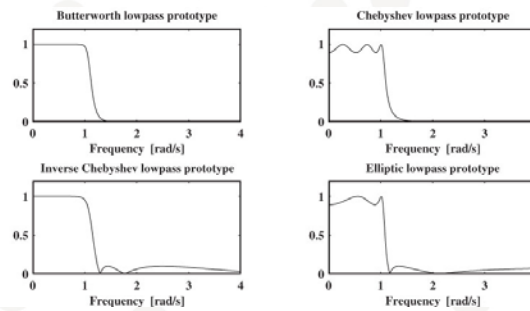
## 4. Order Bessel Filter



- Gain og gruppeforsinkelse for 4. ordens Bessel filter.
- Merk at transisjonen fra pass- til stoppbånd er langsommere enn for andre filtre
- Merk også at gruppeforsinkelsen er så og si konstant i passbåndet.
- Besselfiltrets gruppeforsinkelse har maksimal flathet ved  $\omega = 0$ .

## Sammenligning

- Butterworth: maksimalt flat amplitude
- Bessel: maksimalt flat gruppeforsinkelse
- Sammenlignet med Tsjebysjef eller et elliptisk filter, så faller Butterworth langsommere og krever derfor høyere orden for å oppnå en viss stoppbåndspesifikasjon.
- Men, Butterworth har flatere gruppeforsinkelse (nærmere lineær fase) i passbåndet enn Tsjebysjef eller elliptiske filtre.
- Tsjebysjef filtre er skarpere (smallere transisjonsbånd) enn Butterworth, men ikke så skarpe som elliptiske. Men de har færre ripler enn elliptiske.
- Elliptiske filtre er skarpere enn alle andre filtre, men de har også ripler over hele båndbredden.



## IIR Design: Transform mellom analog og digital

- Rett fram: sampling av impulsresponsen,  $h(t)$  til  $h_s[n]$   $\Leftrightarrow$  Impulsinvarians-metoden
- Konsekvens: aliasing for alle deler av frekvensresponsen som er over  $F=S/2$

## Impulsinvarians (kap 9.2)

- $S=1/t_s \Rightarrow h_s[n]=h(nt_s)$
- Laplace-transform:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt \approx H_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kt_s)\delta[t-kt_s]e^{-st} dt = t_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kt_s)e^{-skt_s}$$

- Z-transform:

$$H_d(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_s[k]z^{-k}$$

- $H_a(s) = t_s H_d(z) \Leftrightarrow z = e^{st} = e^{\sigma t_s} e^{j\Omega t_s}$

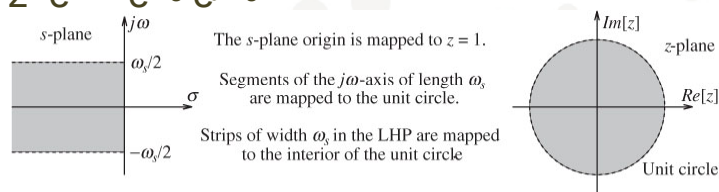
24. november 2009

22



## Impulsinvarians

- $z = e^{st} = e^{\sigma t_s} e^{j\Omega t_s}$



**FIGURE 9.2** Characteristics of the mapping  $z \Rightarrow \exp(st)$ . Each strip of width  $\omega_s$  in the left half of the  $s$ -plane is mapped to the interior of the unit circle in the  $z$ -plane. Each segment of the  $j\omega$ -axis in the  $s$ -plane of length  $\omega_s$  maps to the unit circle itself. Clearly, the mapping is not unique

- Frekvensaksen  $s=j\Omega$  transformeres til  $|z|=1$
- Stabilitet, kausalitet beholdes
- $\Omega=0 \Leftrightarrow \omega=0$  alltid: LP  $\Leftrightarrow$  LP
- Aliasing for alle frekvenser over  $S/2$



## Transform fra s-plan til z-plan

### 1. Impulsinvarians (kap 9.2)

- Impulsresponsen er en samlet versjon av den analog
- Aliasing siden  $\Omega = \Omega_s \Leftrightarrow \omega = \pi$

### 2. Bilineær transform (kap 9.6)

- La  $\Omega = 0$  bli transformert til  $\omega = 0$
- La  $\Omega = \infty$  bli transformert til  $\omega = \pi$
- Ikke-lineær transform for gå fra  $H(s)$  til  $H(z)$ :

$$s = \frac{2}{T_d} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

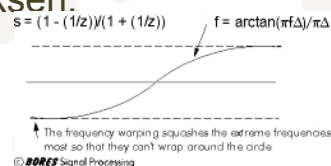


UNIVERSITETET  
I OSLO

## Bilineær transform

- Ingen aliasing, beholder stabilitet og kausalitet, men forvrenger frekvensaksen:

$$\Omega = \frac{2}{T_d} \tan(\omega/2)$$



- Best for lowpass, ettersom passbåndet da blir minst forvrengt
- Derfor designes først prototyp lavpassfiltre
  - For HP, BP etc: Start med analog LP => digital LP => digital HP etc

[http://www.bores.com/courses/intro/iir/5\\_warp.htm](http://www.bores.com/courses/intro/iir/5_warp.htm)



UNIVERSITETET  
I OSLO

## Matlab IIR Filterdesign

- Ordensestimat
- MATLAB programmer for å finne orden og analog båndgrense for IIR filter design med bilineær transform:

```
[N, Wn] = buttord(Wp, Ws, Rp, Rs);
```

```
[N, Wn] = cheb1ord(Wp, Ws, Rp, Rs);
```

```
[N, Wn] = cheb2ord(Wp, Ws, Rp, Rs);
```

```
[N, Wn] = ellipord(Wp, Ws, Rp, Rs);
```



UNIVERSITETET  
I OSLO

## Matlab IIR Filterdesign

- Filter Design
- MATLAB for bilineær filterdesign:
  - $[b, a] = \text{butter}(N, Wn)$
  - $[b, a] = \text{cheby1}(N, Rp, Wn)$
  - $[b, a] = \text{cheby2}(N, Rs, Wn)$
  - $[b, a] = \text{ellip}(N, Wn, Rp, Rs)$
- Trenger ikke tenke på bilineær transform
- Transferfunksjonen kan beregnes med  $\text{freqz}(b, a, w)$  der  $w$  er et sett av vinkelfrekvenser



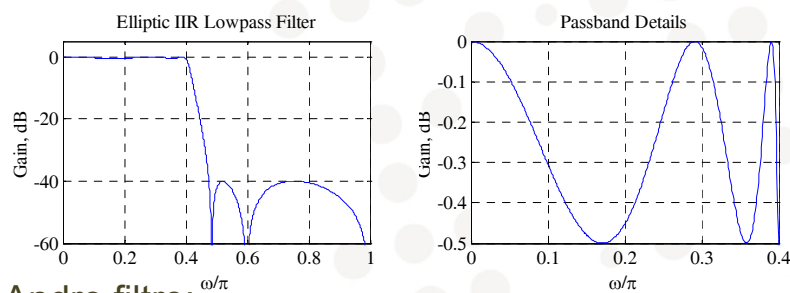
UNIVERSITETET  
I OSLO

## Matlab IIR Filterdesign

- Lag et elliptisk IIR lavpassfilter med
  - $F_p=0.8$  kHz,  $F_s=1$  kHz,  $F_{\text{sample}}=4$  kHz,  $\alpha_p = 0.5$  dB,  $\alpha_s=40$  dB
- Kodebiter:
  - `[N,Wn] = ellipord(0.8/(4/2), 1/(4/2), 0.5, 40);`
  - Resultat: N=5. orden
  - `[b, a] = ellip(N, 0.5, 40, Wn);`



## Matlab IIR Filterdesign



- Andre filtre:
  - `buttord(0.8/(4/2), 1/(4/2), 0.5, 40) ⇒ N=18`
  - `cheb1ord(0.8/(4/2), 1/(4/2), 0.5, 40) ⇒ N=8`
  - `cheb2ord(0.8/(4/2), 1/(4/2), 0.5, 40) ⇒ N=8`
  - `ellipord(0.8/(4/2), 1/(4/2), 0.5, 40) ⇒ N=5`
- `firpm([0.8 1],[1 0],[10^(0.5/20)-1 10^(-40/20),4]) ⇒ N=28`



## 9.8 Effekter av endelig ordlengde

- Koeffisienter blir avkortet
  - Som regel blir det en liten endring av frekvensrespons
  - Katastrofal feil: en pol innenfor  $|z|=1$  kan havne utenfor (bare IIR)
- Aritmetikken foregår med endelig presisjon
  - Filteret blir et ikke-lineært system
  - Kvantiseringsstøy og avrundingsstøy
  - Feil pga overstyring
- Limit cycles: Oscillasjoner på utgangen uten inngang
  - Bare i IIR da det trenger tilbakekobling
  - Fullskala oscillasjoner hvis overstyring folder rundt ( $x > x_{\max} \Rightarrow -x_{\max}$ ) i stedet for metning ( $x > x_{\max} \Rightarrow x_{\max}$ )
  - Små oscillasjoner hvis avrunding istedet for avkorting
  - <http://cnx.org/content/m11928/latest/>

24. november 2009

30

UNIVERSITETET  
I OSLO