FILTERDESIGN

- Ukeoppgavene skal leveres som selvstendige arbeider. Det forventes at alle har satt seg inn i instituttets krav til innleverte oppgaver:
  - Norsk versjon: `http://www.ifi.uio.no/studinf/skjemaer/erklaring.pdf`
  - Engelsk versjon: `http://www.ifi.uio.no/studinf/skjemaer/declaration.doc`
- Krav til godkjenning av innleverte oppgaver er beskrevet i filen:
  - `http://www.ifi.uio.no/inf3470/h07/kursmateriell/Oppgaver/KravTilGodkjenning.pdf`

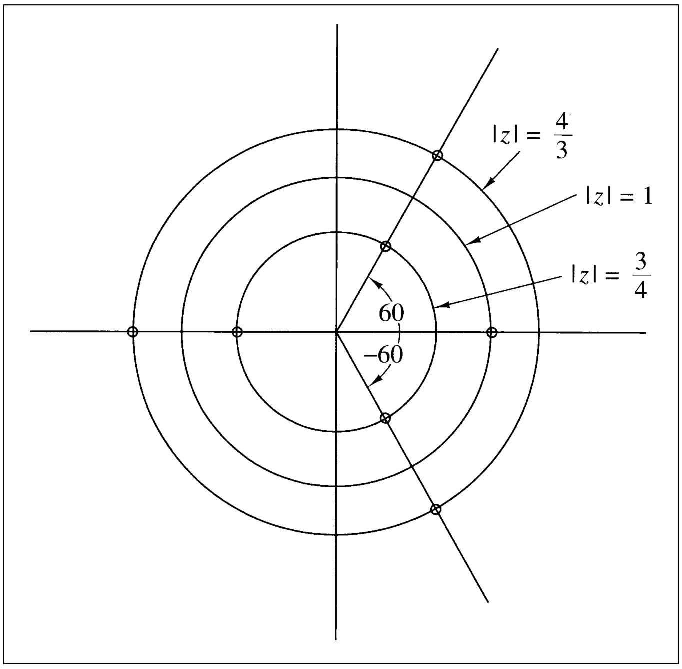
Denne uken er oppgavesettet todelt. Først er det oppgaver om filterdesign, deretter kommer fjorårets eksamen. Totalt er det mer enn 10 poeng på dette oppgavesettet. Det er likevel ikke mulig å oppnå mer enn 10 poeng denne uka.

Oppgave 1 — Vekt:1

Betrakt pol-nullpunktsplottet vist i figuren under.

a) Avgjør og begrunn om det representerer et FIR filter.

b) Avgjør og begrunn om systemet har lineær fase.



Oppgave 2 — Vekt:1.5

I denne oppgaven skal du designe et enkelt reelt diskret filter som slipper igjennom frekvensen $w = \pi/4$ uten demping og stopper frekvensen $w = \pi/2$.

a) Hvilke krav gir dette til filterets frekvensrespons, $H(w)$.

b) Bestem filterets systemfunksjon, $H(z)$.

c) Hva blir filterets impulsrespons, $h(n)$.

Oppgave 3 Vekt:2.5

Oppgave 2 Filter design

Anta at et en ønsker å finne en tilnærming til et ideellt lavpassfilter med følgende spesifikasjon:

$$|H_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & \text{for } |\omega| < \pi/2 \\ 0 & \text{for } \pi/2 \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

2-a

Filteret skal være et kausalt FIR-filter av lengde N (partall). For hvilke verdier av n må $h[n]$ da finnes?

2-b

Anta at filteret også skal ha lineær fase. Hvilke(n) type(r) filter kan brukes, type I, II, III eller IV?

Hva blir gruppetidsforsinkelsen til filteret?

2-c

Anta at en designer filteret ved å ta

$$h[n] = DFT^{-1}(H_d[k])$$

Hva blir $H_d[k]$ for $k = 0, \cdots, N-1$ når filteret skal være som over, dvs av lengde N (partall), kausalt og med lineær fase?

2-d

Lag en skisse over frekvensresponsen til filteret, $H(e^{j\omega})$, det vil si dens amplitude og fase. Angi ved hvilke frekvenser det blir størst feil i henholdsvis amplitude og fase i forhold til $H_d(e^{j\omega})$.

2-e

Anta så at en finner impulsresponsen ved formelen over, altså en N-punkts invers DFT av sampler av ønsket frekvensrespons. Hvilke egenskaper forventer du at $h[n]$ skal ha?

Hva blir $h[n]$?

Oppgave 4— Oppgave 10.8 fra boka Vekt:1

Oppgave 5— Oppgave 10.10 fra boka Vekt:1

Oppgave 6— Oppgave 10.12 fra boka Vekt:1

Oppgave 7— Oppgave 10.20 fra boka Vekt:1

EKSAMEN 2008

Oppgave Fourier-transformasjon **Vekt: 1**

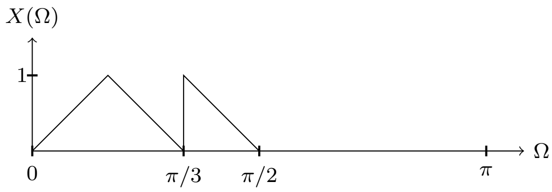
Fourier-transformasjonen til et signal $x[n]$ er gitt som

$$X(\Omega) = \frac{1}{2 - e^{-j\Omega}}.$$

Skisser magnituden til Fourier-transformasjonen til signalet.
Finn et uttrykk for fasen til Fourier-transformasjonen til signalet. (Det skal ikke plottes!)
Husk akser og benevning på plottet.

Oppgave Opp- og nedsampling **Vekt: 1**

Et signal $x[n]$ har Fourier transformasjon $X(\Omega)$ som gitt under



Signalet benyttes som inngangssignal på systemene I og II definert under:

I: $x[n] \rightarrow \boxed{\uparrow 3} \rightarrow w_1[n] \rightarrow \boxed{H_0(z)} \rightarrow z_1[n] \rightarrow \boxed{\downarrow 2} \rightarrow y_1[n]$

II: $x[n] \rightarrow \boxed{\downarrow 2} \rightarrow w_2[n] \rightarrow \boxed{\uparrow 3} \rightarrow z_2[n] \rightarrow \boxed{H_0(z)} \rightarrow y_2[n]$

"$\rightarrow \boxed{\downarrow M} \rightarrow$" betyr nedsampling med faktor M (beholde hvert Mte sampel) og "$\rightarrow \boxed{\uparrow N} \rightarrow$" betyr null-interpolering med faktor N (sette inn $N-1$ nuller mellom hvert sampel). $H_0(z)$ er et ideelt lavpassfilter med cut-off frekvens $w_c = \pi/3$ og forsterkning (gain) lik 2.

For begge systemer, skisser Fourier transformasjonen til signalene $w_1[n]$, $w_2[n]$, $z_1[n]$, $z_2[n]$, $y_1[n]$ og $y_2[n]$. Husk akser og benevning på alle plott.

Oppgave IIR-filtre **Vekt: 2**

Et kausalt IIR-filter med én, reell pol z_p har impulsrespons:

$$h[n] = \alpha^n u[n], \alpha > 0 \tag{1}$$

a) Gitt systemet med impulsrespons $h[n]$ gitt av (1), finn systemfunksjonen $H(z)$ med tilhørende ROC og pol.
b) Finn systemfunksjonen $H'(z)$ med tilhørende ROC, og tegn pol/nullpunkts plott for $\alpha = 0.5$, for systemet med impulsrespons

$$h'[n] = h[n]\cos(\pi n) \tag{2}$$

c) Finn frekvensresponsen $H'(\Omega)$ uttrykt ved $H(\Omega)$. Beskriv hva slags filtre $h[n]$ og $h'[n]$ er hvis $0.5 < \alpha < 1$.
d) La oss se på operasjonen i ligning (2) som et system $T\{\cdot\}$ slik at $h'[n] = T\{h[n]\}$. Vis at systemet $T\{\cdot\}$ ikke er LTI.

Oppgave Sampling **Vekt: 1.5**

Vi vet at for at et signal $x(t)$ skal kunne rekonstrueres perfekt fra en sampling $x[n] = x(nT_s) = x(\frac{n}{F_s})$ så må vi ha

$$F_s > 2F_{max} \tag{3}$$

der F_{max} er den høyeste frekvensen i signalet $x(t)$. Hvis ikke dette er tilfredsstilt, vil alle frekvenser $f > \frac{F_s}{2}$ aliases. Vi skal nå se på hva som skjer med frekvensen $\frac{F_s}{2}$.

a) Finn et uttrykk for $x[n]$ gitt $x(t) = \cos(2\pi 200t + \pi/2)$ og $F_s = 400$ Hz.
b) Finn uttrykk $x_1[n]$ og $x_2[n]$ gitt $x_1(t) = \cos(2\pi 200t + \pi/4)$, $x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(2\pi 200t)$ og $F_s = 400$ Hz.
c) Vis at for et signal $x(t) = A\cos(\pi F_s t + \phi)$, uansett valg av parametrene A, ϕ , så finnes det alltid et annet signal $w(t) = B\cos(\pi F_s t)$ slik at $x[n] = w[n]$ når samplingsraten er lik F_s. Beregn B som funksjon av A og ϕ.
Hint: Finn et generelt uttrykk for forholdet mellom $x[n]$ og $x[n+1]$, og bruk dette til å regne ut verdien for B fra de kjente verdiene A, ϕ.

Oppgave MA-filtre — Vekt: 2

Et MA-filter av orden $K-1$ er et kausalt FIR-filter med K koeffisienter, og en impulsrespons gitt ved :

$$h[n] = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} \delta[n-k] \tag{4}$$

a) Finn frekvensresponsen $H(\Omega)$ til MA-filteret av orden $K-1$.
b) Finn ved regning hvor mange nullpunkter et MA-filter av orden $K-1$ har, og hvilke frekvenser de nuller ut.
c) Hvilke ordner kan et MA-filter ha hvis det skal nulle ut frekvensen $\Omega = \frac{\pi}{P}$, der P er et heltall.
d) Vis at et MA-filter av orden $K-1$ kan implementeres som et FIR-filter med impulsrespons $h_{FIR}[n]$ i kaskade med et IIR-filter med impulsrespons $h_{IIR}[n]$ der

$$h_{FIR}[n] = \frac{1}{K}(\delta[n] - \delta[n-K]), \quad h_{IIR}[n] = u[n] \tag{5}$$

Formulas

Some basic relations:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \\
\cos\alpha &= \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \\
\sin\alpha &= \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \\
\sum_{n=0}^{N-1} a^n &= \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{otherwise} \end{cases} \\
ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Convolution:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = h[n] * x[n]$$

The Discrete time Fourier transform (DTFT):

$$\begin{aligned}
\text{Analysis:} \qquad X(\Omega) &= = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \\
\text{Syntesis:} \qquad x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega
\end{aligned}$$

The Discrete Fourier transform (DFT):

$$\begin{aligned}
\text{Analysis:} \qquad X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \\
\text{Syntesis:} \qquad x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1
\end{aligned}$$

The z-transform:

$$\text{Analyse:} \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Expectation and variance

$$\begin{aligned}
\text{Expectation:} \qquad E\{x(\zeta)\} &\equiv \mu_x = \begin{cases} \sum_k x_k p_k & x(\zeta) \text{ discrete} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)dx & x(\zeta) \text{ continuous} \end{cases} \\
\text{Varianse:} \qquad \mathrm{var}[x(\zeta)] &= \sigma_x^2 = \gamma_x^{(2)} = E\{[x(\zeta) - \mu_x]^2\}
\end{aligned}$$