OPPGAVER TIL FORELESNINGSUKE NUMMER 1

- Ukeoppgavene skal leveres som selvstendige arbeider. Det forventes at alle har satt seg inn i instituttets krav til innleverte oppgaver:
  - Norsk versjon: `http://www.ifi.uio.no/studinf/skjemaer/erklaring.pdf`
  - Engelsk versjon: `http://www.ifi.uio.no/studinf/skjemaer/declaration.doc`
- Krav til godkjenning av innleverte oppgaver er beskrevet i filen:
  - `http://www.ifi.uio.no/inf3470/h07/kursmateriell/Oppgaver/KravTilGodkjenning.pdf`

1 Trigonometriske Funksjoner — Vekt: 1

a) Plott følgende trigonometriske funksjoner under hverandre (med parallelle t-akser) for intervallet $-1 \leq t \leq 2.5$, slik at du får vist hvordan de forholder seg til hverandre mht. frekvens og faseskift. (Bruk gjerne MATLAB.)

1. $\cos(2\pi t)$
2. $\cos(2\pi t + \pi)$
3. $\cos(8\pi t)$
4. $\cos(4\pi t - \pi/3)$

b) Finn frekvens, faseskift og amplitude for cosinus-funksjonene i figur 1.

2 Trigonometriske Funksjoner — Vekt: 1

a) Bruk fasoraddisjon for å skrive følgende funksjoner på formen

$$A\cos(\omega t + \phi) \tag{1}$$

1. $\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \phi)$
2. $4\cos(\omega t + \pi/2) + 1.5\cos(\omega t - \pi/3)$
3. $\cos(\omega t + 4\pi/3) + \cos(\omega t - 5\pi/3)$

NB: Bruk at vi vet at:

$$\sum_{n=1}^{N} A_n \cos(\omega t + \phi_n) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{2}$$

der man finner A og ϕ ved å beregne

$$Ae^{j\phi} = \sum_{n=1}^{N} A_n e^{j\phi_n} \tag{3}$$

3 Diskrete Trigonometriske Funksjoner Vekt: 2

a) Hvilke av de følgende diskrete funksjonene er periodiske (dvs. det finnes en N slik at $x[n] = x[n+N]$ **for alle** n), og hva er periodene deres (dvs. N)?

- $\cos(0.5n + \pi/2)$
- $\cos(\pi n + \pi/2)$
- $\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi n\right)$
- $\cos(2\pi n + \sqrt{2}\pi)$

Hint: Bruk at $\cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi)$ for alle θ.
b) Angi den cosinus-funksjonen i diskret tid som vi får ved å ta 5 sampler per halve periode av en cosinus i kontinuerlig tid med vinkelfrekvens 6π.
c) Angi den cosinus-funksjonen i diskret tid som vi får ved å ta sampler med avstand 0.5 sekunder av en cosinus i kontinuerlig tid med vinkelfrekvens 2π.
d) Angi den cosinus-funksjonen i diskret tid som vi får ved å ta sampler med avstand 0.5 sekunder av en cosinus i kontinuerlig tid med vinkelfrekvens 6π.
e) Skisser grafene til de to cosinusene med vinkelfrekvenser 2π og 6π i kontinuerlig tid i samme koordinatsystem. Bruk dette til å forklare sammenhengen mellom svarene i **c)** og **d)**.

4 Regning med komplekse tall Vekt: 1

a) Gjør følgende utregninger:

- $|3 + j4|$
- $\frac{1}{3+j4}$ til kartesisk form
- $\frac{1+j2}{1+e^{j\pi/2}}$ til kartesisk form
- $(-1)^n + e^{j\pi n}$

b) Vis at:

$$(\cos(\theta) + j\sin(\theta))^n = (\cos(\theta n) + j\sin(\theta n)) \tag{4}$$

5 Komplekse tall og det komplekse planet Vekt: 1

Gitt et komplekst tall på *kartesisk form* $z = a + jb$. Vi kaller $a = Re\{z\}$ for *realdelen* til z og $b = Im\{z\}$ for *imaginærdelen* til z. $j = \sqrt{-1}$ er den såkalte *imaginære enheten*. (Merk at den imaginære enheten kalles ofte j i fysiske fag som dette, og i i matematiske fag som kompleks analyse.)

- Et komplekst tall på kartesisk form kan representeres i det kartesiske koordinatsystemet som punktet (a, b). Et annet koordinatsystem er det polare, der de to koordinatene (r, θ) angir hhv. avstand fra origo og vinkel mot førsteaksen. Vi skriver et komplekst tall på polar form som $re^{j\theta}$. Lag en skisse og bruk trigonometri for å finne (r, θ) fra (a, b).

- En vanlig operasjon på komplekse tall er å *komplekskonjugere*: $z^* = (a+jb)^* = a-jb$. Dette tilsvarer å snu fortegnet på imaginærdelen. Hva slags geometrisk operasjon tilsvarer dette i det kartesiske koordinatsystemet? Vis hva $\left(e^{j\theta}\right)^*$, dvs. den komplekskonjugerte av et komplekst tall på polar form blir ved å bruke at $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$.

- Gi en tolkning av $\left(e^{j\theta}\right)^k$ i koordinatsystemet. Skisser for $k = 1, 2, 3$ og valgfri θ. Hva må θ være for at $\left(e^{j\theta}\right)^k = 1$?

6 Regning med komplekse tall **Vekt: 2**

Regn ut følgende for polar form ($z = re^{j\theta}$) og/eller kartesisk form ($z = a + jb$) som angitt:

- z^* på polar form
- zz^* på polar og kartesisk form (hva er dette det samme som?)
- z^k på polar form
- $z + z^*$ på polar og kartesisk form
- $z - z^*$ på polar og kartesisk form
- $\frac{1}{2}(z + z^*)$ på polar og kartesisk form
- $\frac{1}{2j}(z - z^*)$ på polar og kartesisk form
- z^{-1} på polar og kartesisk form (**Merk:** oppgaven er å finne c og d slik at $c + jd = \frac{1}{a+jb}$, samt s og ϕ slik at $se^{j\phi} = \frac{1}{re^{j\theta}}$.)
- Bruk punktene over for å finne et uttrykk for $\cos(\theta)$ og $\sin(\theta)$ ved komplekse eksponentialer.
- Hva er mengden av alle punkter som kan beskrives med det komplekse eksponentialet $z = e^{j\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi$?
- Hva er forskjellen på z^{-1} og z^*?

Skriv følgende tall som komplekse tall på polar form $z = re^{j\theta}$ (k er et vilkårlig heltall):

- 1
- -1
- $(-1)^k$
- j^k
- $\sqrt{k}(1)$

7 Geometriske rekker **Vekt: 2**

a) Beregn verdien til følgende endelige geometriske rekker:

- $\sum_{k=0}^{100} 23^k$
- $\sum_{k=5}^{19} (4.5)^k$

b) En uendelig geometrisk rekke

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k \tag{5}$$

konvergerer hvis $|a| < 1$. Bestem hvilke av de følgende uendelige geometriske rekkene som konvergerer, og beregn verdien til disse:

- $\sum_{k=0}^{\infty} 1^k$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{a}, a > 4$

- $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k}$
- $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|}$

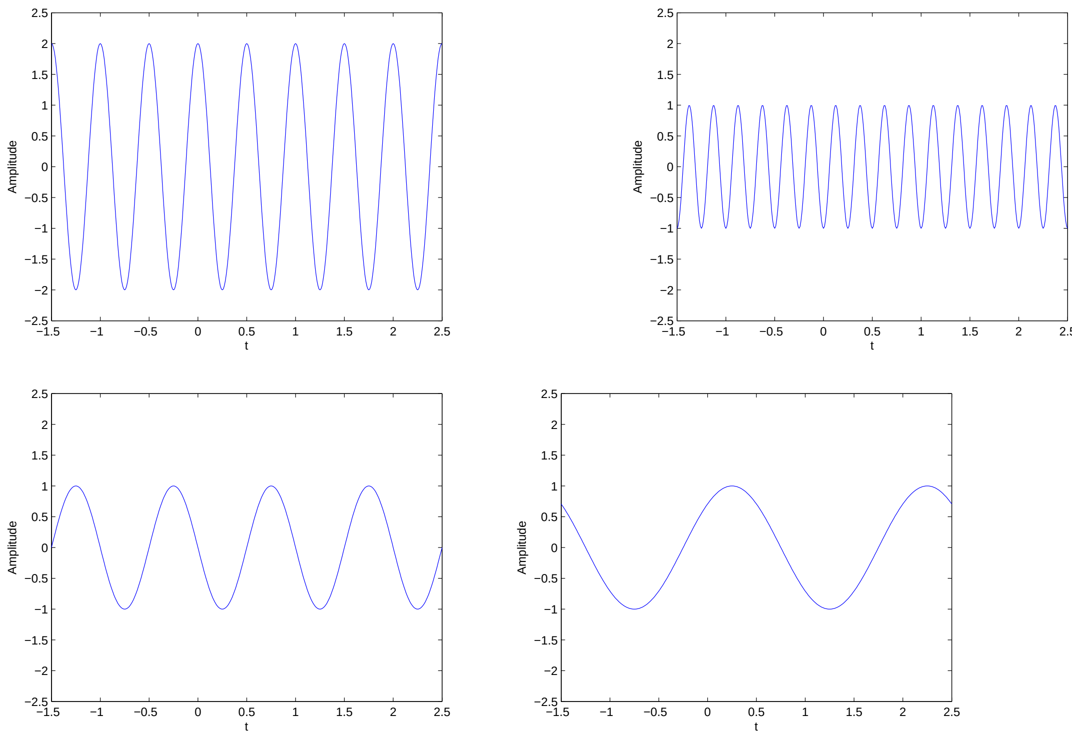
c) Finn konvergensområdet til følgende uendelige geometriske rekker:

- $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k, x \in \mathbb{R}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} (x^{-1})^k, x \in \mathbb{R}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k, z \in \mathbb{C}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k, x \in \mathbb{R}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{-k}, z \in \mathbb{C}$

Dette betyr: finn de verdier av x og z som gjør at rekken konvergerer. F.eks. så har vi at

$$\sum_{k=0}^{\infty} (3x)^k \tag{6}$$

konvergerer for $|3x| < 1 \Rightarrow |x| < 1/3$.



Figur 1: Finn frekvens, faseskift og amplitude til cosinus-funksjonene over.