OPPGAVER I TRIGONOMETRI, KOMPLEKSE TALL OG GEOMETRISKE REKKER

- Ukeoppgavene skal leveres som selvstendige arbeider. Det forventes at alle har satt seg inn i instituttets krav til innleverte oppgaver:
  - Norsk versjon: `http://www.mn.uio.no/ifi/studier/admin/obliger`
- Krav til godkjenning av innleverte oppgaver er beskrevet på hjemmesiden til INF3470:
  - `http://www.uio.no/studier/emner/matnat/ifi/INF3470/h12/oppgaver_krav.html`

Mål

Kurset INF3470 krever en viss grad av kunnskap om matematikk, både i form av kjennskap til teori og erfaring med bruk og praktisk regning. Oppgavene her oppsummerer en del av de viktigste punktene man bør kjenne til for at resten av teorien i kurset skal bli enklere å ta til seg.

Oppgave 1 Trigonometriske funksjoner Vekt:2

a) Plott følgende trigonometriske funksjoner under hverandre (med parallelle t-akser) for intervallet $-1 \leq t \leq 2.5$, slik at du får vist hvordan de forholder seg til hverandre mht. frekvens og faseskift.

1. $\cos(2\pi t)$
2. $\cos(2\pi t + \pi)$
3. $\cos(8\pi t)$
4. $\cos(4\pi t - \pi/3)$

b) Finn frekvens, faseskift og amplitude for cosinus-funksjonene i figur 1.

c) Bruk fasoraddisjon for å skrive følgende funksjoner på formen

$$A\cos(\omega t + \phi) \tag{1}$$

1. $\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \phi)$ $\boxed{2\cos\frac{\phi}{2}\cos(\omega t + \phi/2)}$
2. $4\cos(\omega t + \pi/2) + 1.5\cos(\omega t - \pi/3)$ $\boxed{\hat{A} = 2.8, \hat{\phi} = 1.3}$
3. $\cos(\omega t + 4\pi/3) + \cos(\omega t - 5\pi/3)$ $\boxed{\hat{A} = 0}$

Oppgave 2 Diskrete trigonometriske funksjoner Vekt:2

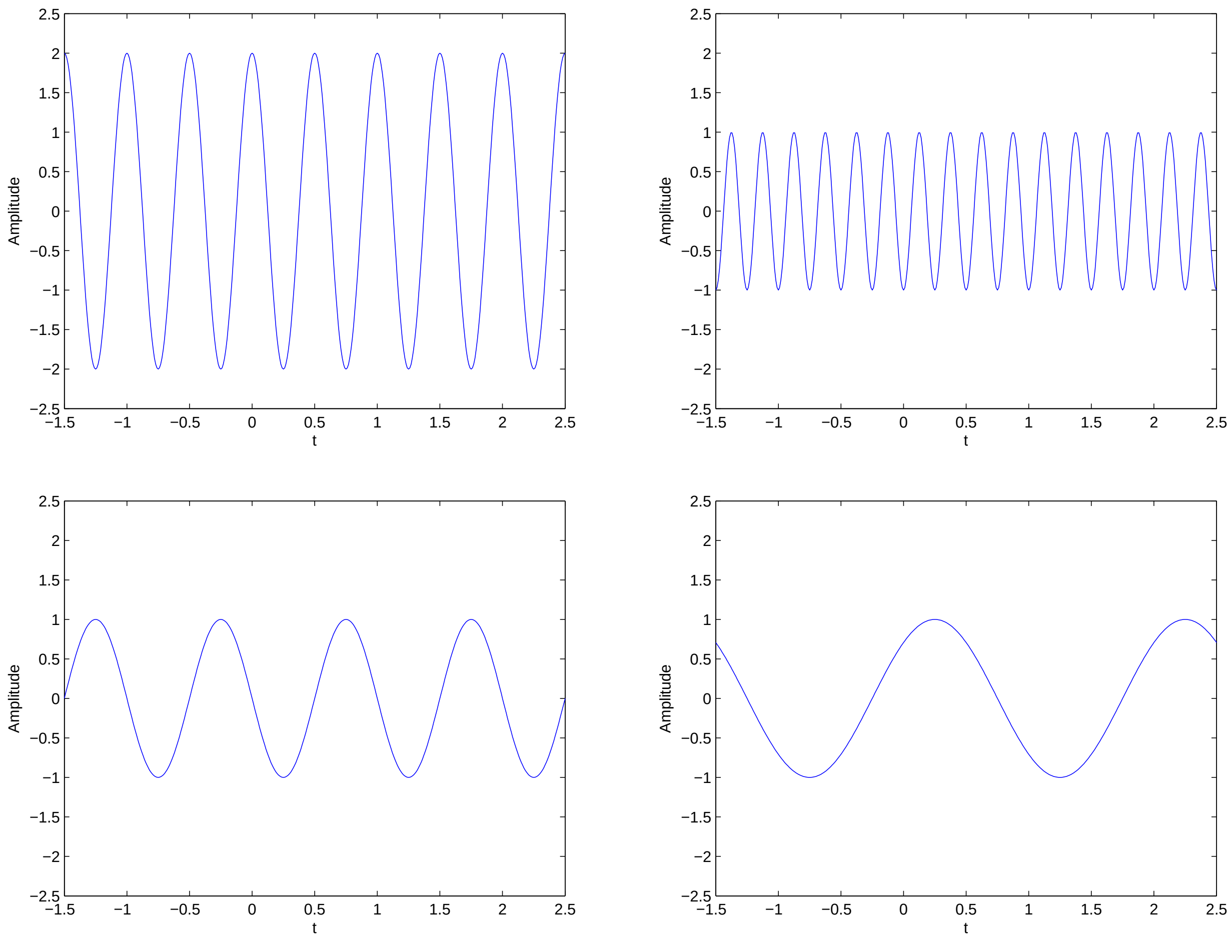
a) Hvilke av de følgende *diskrete* funksjonene er periodiske, og hva er periodene deres (dvs. N)?

1. $\cos(0.5n + \pi/2)$ $\boxed{\text{Ikke periodisk}}$
2. $\cos(\pi n + \pi/2)$ $\boxed{\text{Periodisk}}$
3. $\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi n\right)$ $\boxed{\text{Ikke periodisk}}$

b) Angi den cosinus-funksjonen i diskret tid som vi får ved å ta 5 sampler per halve periode av en cosinus i kontinuerlig tid. $\boxed{\cos(\pi/5\ n)}$

c) Angi den cosinus-funksjonen i diskret tid som vi får ved å ta sampler med avstand 1 sekunder av en cosinus i kontinuerlig tid med vinkelfrekvens 1. $\boxed{\cos n}$

d) *Deloppgaven er fjernet.* **e)** *Deloppgaven er fjernet.*



Figur 1: Finn frekvens, faseskift og amplitude for cosinus-funksjonene i figur.

Oppgave 3 Regning med komplekse tall Vekt:1

a) Gjør følgende utregninger:

1. $|3+j4|$ $\boxed{5}$
2. $\frac{1}{3+j4}$ til kartesisk form $\boxed{\frac{3}{25}-j\frac{4}{25}}$
3. $\frac{1+j2}{1+e^{j\pi/2}}$ til kartesisk form $\boxed{\frac{3}{2}+\frac{j}{2}}$
4. $(-1)^n + e^{j\pi n}$, hvor n er et heltall $\boxed{2\cdot(-1)^n}$

b) Vis at

$$(\cos(\theta)+j\sin(\theta))^n = (\cos(\theta n)+j\sin(\theta n)) \quad \boxed{\text{Ref. til de Moivres formel}} \tag{2}$$

Oppgave 4 Komplekse tall og det komplekse tallplanet Vekt:1

Gitt et komplekst tall på *kartesisk form* $z = a + jb$. Vi kaller $a = \mathfrak{Re}\{z\}$ for *realdelen* til z og $b = \mathfrak{Im}\{z\}$ for *imaginærdelen* til z. $j = \sqrt{-1}$ er den såkalte *imaginære enheten*. (Merk at den imaginære enheten kalles ofte j i fysiske fag som dette, og i i matematiske fag som kompleks analyse.)

a) Et komplekst tall på kartesisk form kan representeres i det kartesiske koordinatsystemet som punktet (a,b). Et annet koordinatsystem er det polare, der de to koordinatene (r,θ) angir hhv. avstand fra origo og vinkel mot førsteaksen. Lag en skisse og bruk trigonometri for å finne (r,θ) fra (a,b). $\boxed{r=\sqrt{a^2+b^2}, \theta = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right)}$

b) En vanlig operasjon på komplekse tall er å *komplekskonjugere*: $z^* = (a+jb)^* = a - jb$. Dette tilsvarer å snu fortegnet på imaginærdelen. Hva slags geometrisk operasjon tilsvarer dette i det kartesiske koordinatsystemet? $\boxed{\cos\theta + j\sin -\theta}$

c) Gi en tolkning av $\left(e^{j\theta}\right)^k$ i koordinatsystemet. Skisser for $k = 1,2,3$ og valgfri θ. Hva må θ være for at $\left(e^{j\theta}\right)^k = 1$? $\boxed{\cos\theta k + j\sin\theta k}$

Oppgave 5 Regning med komplekse tall Vekt:2

a) Regn ut følgende for polar ($z = re^{j\theta}$) og/eller kartesisk ($z = a + jb$) form som angitt:

1. z^* på polar form $\boxed{re^{-j\theta}}$
2. zz^* på polar og kartesisk form (hva er dette det samme som?) $\boxed{a^2+b^2=r^2}$
3. z^k på polar form $\boxed{r^k e^{j\theta k}}$
4. $z + z^*$ på polar og kartesisk form $\boxed{2r\cos\phi}$
5. $z - z^*$ på polar og kartesisk form $\boxed{2jr\sin\phi}$
6. $\frac{1}{2}(z+z^*)$ på polar og kartesisk form $\boxed{r\cos\theta}$
7. $\frac{1}{2j}(z-z^*)$ på polar og kartesisk form $\boxed{r\sin\theta}$
8. z^{-1} på polar og kartesisk form (**Merk:** oppgaven er å finne c og d slik at $c + jd = \frac{1}{a+jb}$, samt s og ϕ slik at $se^{j\phi} = \frac{1}{re^{j\theta}}$.)
   $\boxed{\frac{a-jb}{a^2+b^2}, \frac{1}{r}e^{-j\phi}}$
9. Bruk punktene over for å finne et uttrykk for $\cos(\theta)$ og $\sin(\theta)$ ved komplekse eksponentialer.
   $\boxed{\cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}, \sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}}$

10. Hva er mengden av alle punkter som kan beskrives med det komplekse eksponentialet $z = e^{j\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi$?
    $\boxed{\text{Enhetssirkelen i det komplekse talplanet}}$

11. Hva er forskjellen på z^{-1} og z^*? $\boxed{\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}}$

b) Skriv følgende tall som komplekse tall på polar form (k er et vilkårlig heltall):

1. 1 $\boxed{1e^{j\cdot 2\pi k}}$
2. -1 $\boxed{1e^{j(\pi + n\cdot 2\pi)}}$
3. $(-1)^k$ $\boxed{1e^{jk\pi}}$
4. j^k $\boxed{1e^{jk\pi/2}}$

Oppgave 6 Geometriske rekker Vekt:2

a) Beregn verdien til følgende endelige geometriske rekker:

1. $\sum_{k=0}^{100} 23^k$ $\boxed{\frac{1-23^{101}}{1-23} = 1.56 \cdot 10^{136}}$
2. $\sum_{k=5}^{19} (4.5)^k$ $\boxed{\frac{4.5^5 - 4.5^{20}}{1-4.5} = 3.31 \cdot 10^{12}.}$

b) Bestem hvilke av de følgende uendelige geometriske rekkene som konvergerer, og beregn verdien til disse:

1. $\sum_{k=0}^{\infty} 1^k$ $\boxed{\text{Konvergerer ikke}}$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{a}\right)^k, a > 4$ $\boxed{\text{Konvergens for } a > 4}$
3. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k}$ $\boxed{\text{Konvergerer ikke}}$
4. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|}$ $\boxed{\text{Konvergerer}}$

c) Finn konvergensområdet til følgende uendelige geometriske rekker:

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k, x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 2}$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} (x^{-1})^k, x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\left|\frac{1}{x}\right| < 1 \Leftrightarrow x > 1 \text{ or } x < -1}$
3. $\sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k, z \in \mathbb{C}$ $\boxed{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} < 1}$
4. $\sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k, x \in \mathbb{R}$ $\boxed{-1 < x < 1}$
5. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{-k}, z \in \mathbb{C}$ $\boxed{|z| > 2}$