

UiO : **University of Oslo**

Uke 12: FIR-filter design

Jo Inge Buskenes

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

INF3470/4470, høst 2012



Dagens temaer

Repetisjon

Design av digitale filtre

Design av FIR filtre

Tema

Repetisjon

Ideelle filtre

Vanlige vinduer og frekvenstransformasjoner

Ideelle filtre

FIGURE 10.1
Spectrum of an ideal lowpass filter

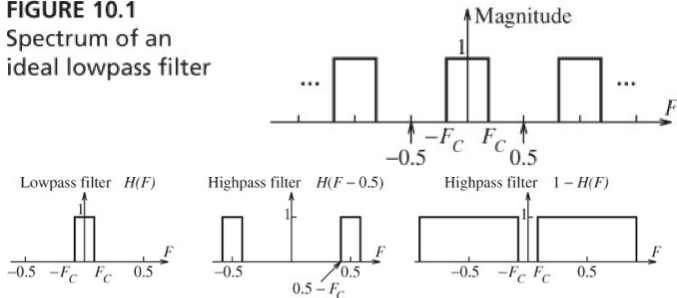


FIGURE 10.2 Two lowpass-to-highpass transformations. The first transformation shifts the lowpass spectrum $H(F)$ to $H(F - 0.5)$. The second transformation subtracts the lowpass spectrum $H(F)$ from unity.

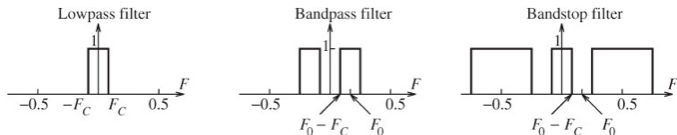


FIGURE 10.3 Transforming a lowpass filter to a bandpass or bandstop filter. The bandstop transformation shifts the lowpass spectrum $H(F)$ by F_0 and $-F_0$. The bandstop filter is found by subtracting the bandpass spectrum from unity

Frekvens transformasjon

- ▶ Mulig å transformere et digitalt lavpassfilter til båndpass-, båndstopp- og høypassfilter.
- ▶ Den enkleste (?) transformasjonen: Lavpass til høypass og vv.
 $H_{hp}(\Omega) = H_{lp}(\Omega - \pi)$, i.e.
 $h_{hp}[n] = (e^{j\pi})^n h_{lp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n]$.
- ▶ I de aller fleste tilfeller trenger man kun å betrakte lavpass filterdesign.
- ▶ Lavpass prototype kan så bli transformert til annen type (høypass-, båndpass- eller båndstoppfilter).

Lavpass- and høypassfiltre

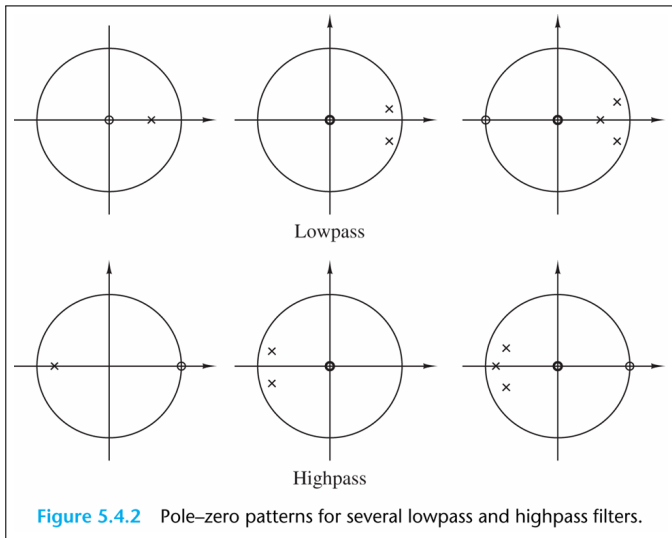


Figure 5.4.2 Pole-zero patterns for several lowpass and highpass filters.

Lavpass- and høypassfiltre ...

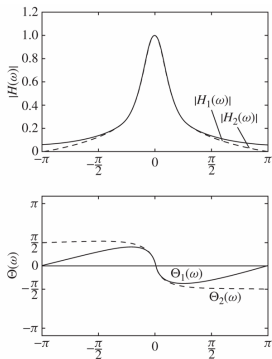


Figure 5.4.3 Magnitude and phase response of (1) a single-pole filter and (2) a one-pole, one-zero filter; $H_1(z) = (1 - a)/(1 - az^{-1})$, $H_2(z) = [(1 - a)/2][(1 + z^{-1})/(1 - az^{-1})]$ and $a = 0.9$.

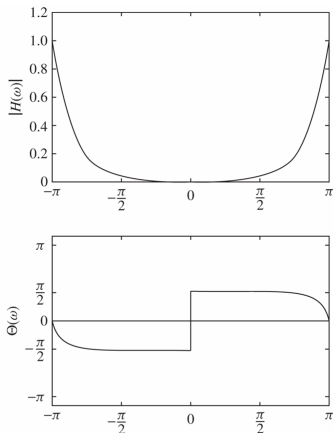


Figure 5.4.4 Magnitude and phase response of a simple highpass filter; $H(z) = [(1 - a)/2][(1 - z^{-1})/(1 + az^{-1})]$ with $a = 0.9$.

Trunkering og vinduer

- ▶ Rektangulært vindu; $W_D(F)$ kalles **Dirichlet kjerne**
- ▶ Trekantet vindu; $W_F(F) = \frac{1}{M} W_D^2(F)$ kalles **Fejer kjerne**

FIGURE 10.4 The Dirichlet kernel is the spectrum of a rectangular window

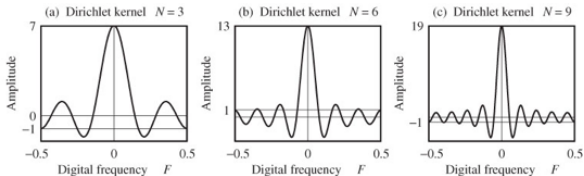
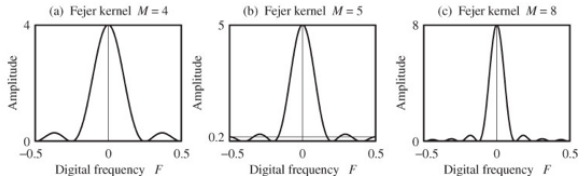


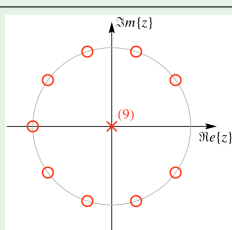
FIGURE 10.5 The Fejer kernel is the spectrum of a triangular window



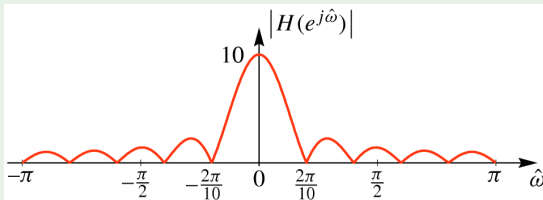
Example (Responsen til et rektangulært vindu)

- L -punkts glidende sum filter:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{L-1} x[n-k], \quad H(z) = \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} = \frac{z^L - 1}{z^{L-1}(z - 1)}$$

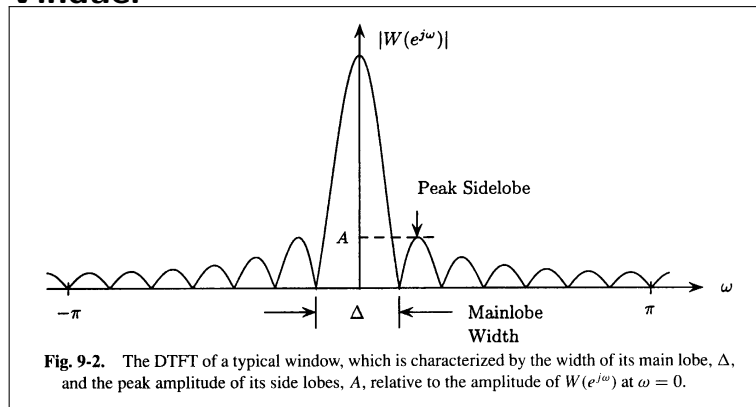


McClellan, Schafer and Yoder, *Signal Processing First*, ISBN 0-13-065562-7.
Pearson Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ 07458. © 2003



McClellan, Schafer and Yoder, *Signal Processing First*, ISBN 0-13-065562-7.
Pearson Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ 07458. © 2003

Vinduer



Noen vanlige lineær fase FIR vinduer

Table 9-1 Some Common Windows

Rectangular	$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
Hanning ¹	$w(n) = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) & 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
Hamming	$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) & 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
Blackman	$w(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) & 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

¹In the literature, this window is also called a Hann window or a von Hann window.

Noen vanlige lineær fase FIR vinduer ...

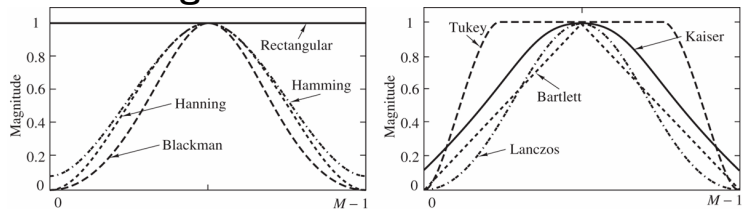


Figure 10.2.3 Shapes of several window functions.

Window	Side-Lobe Amplitude (dB)	Transition Width (Δf)	Stopband Attenuation (dB)
Rectangular	-13	$0.9/N$	-21
Hanning	-31	$3.1/N$	-44
Hamming	-41	$3.3/N$	-53
Blackman	-57	$5.5/N$	-74

Respos til noen lineær fase FIR vinduer

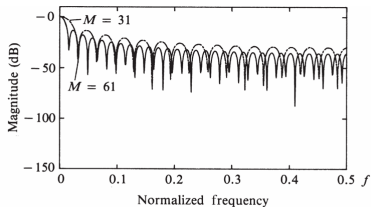


Figure 10.2.2 Frequency response for rectangular window of lengths (a) $M = 31$, (b) $M = 61$.

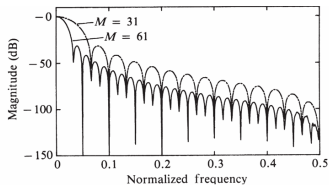


Figure 10.2.4 Frequency responses of Hanning window for (a) $M = 31$ and (b) $M = 61$.

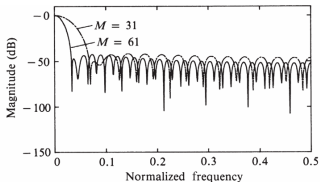


Figure 10.2.5 Frequency responses for Hamming window for (a) $M = 31$ and (b) $M = 61$.

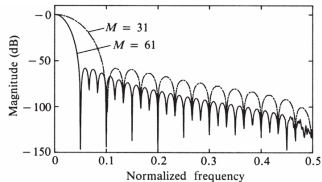


Figure 10.2.6 Frequency responses for Blackman window for (a) $M = 31$ and (b) $M = 61$.

Tema

Design av digitale filtre

- Generelle betraktninger

- Standard tilnærmelser og spesifikasjon

- Lineær fase FIR filtre

Digital filterdesign

- ▶ I digital filterdesign ønsker vi å finne en transferfunksjon $H(z)$ som riktigst mulig gjengir en ønsket frekvensrespons.
- ▶ Vanligvis spesifiseres frekvensrespons fra magnituderesponsen, men noen ganger også etter faseresponsen.
- ▶ I dette kurset skal vi kun spesifisere filtre ut fra magnituderesponser.

Valg av filtertype

- ▶ Den $H(z)$ som approksimerer frekvensresponsen spesifikasjonen skal være kausal.
- ▶ For IIR digital filterdesign er (IIR) transferfunksjonene en reel rasjonell funksjon av z^{-1} :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{M-1} z^{-M-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}$$

- ▶ $H(z)$ må være stabil og av minste mulig orden N for å redusere beregningsbyrden/kompleksiteten.
- ▶ For FIR digital filterdesign er (FIR) transferfunksjonen et polynom i z^{-1} med reelle koeffisienter:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] z^{-n}$$

- ▶ Hvis lineær fase, må filterkoeffisientene tilfredsstille kravet:
 $h[n] = \pm h[M-1-n], \quad n = 0, 1, \dots, M-1.$

▶ Fordeler, FIR filtre:

1. Kan ha eksakt lineær fase
2. Filterstrukturer er alltid stabile for kvantiserte koeffisienter
3. Design metoder er generelt lineære.
4. Kan bli realisert effektivt i HW.
5. Start transient har endelig lengde.

▶ Ulemper, FIR filtre:

Lengden til et FIR filter vil, i de fleste tilfeller, være betydelig lengre enn lengden til et tilsvarende IIR filter som oppfyller de samme spesifikasjonene. FIR filteret har dermed større beregningsbyrde/kompleksitet.

Standard tilnærmelser

- ▶ Den vanligste tilnærmelsen for IIR filterdesign er:
 1. Konvertering av digital filterspesifikasjon til en analog prototype lavpass filterspesifikasjon.
 2. Bestemmelse av analog lavpass transferfunksjon $H_a(s)$.
 3. Transformasjon av $H_a(s)$ til ønsket digital transferfunksjon $G(z)$
- ▶ Den overnevnte tilnærmelsen er foretrukket fordi:
 1. Approksimasjon av av analog transferfunksjon er veletablert og velegnet.
 2. Ofte fås lukkede uttrykk for den analoge approksimasjonen.
 3. Store tabeller for analog filterdesign tilgjengelig.
 4. I mange tilfeller søkes digital simulering av et analogt system.
- ▶ Alternativ metode: Optimalisering vha datamaskiner.

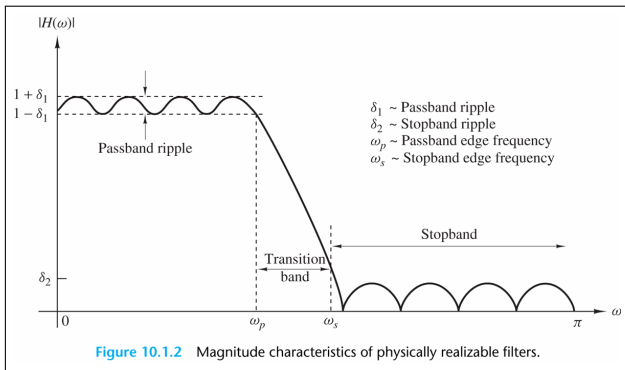
IIR filtre vil ikke bli dekket i denne forelesningen!

Standard tilnærmelser ...

- ▶ FIR filterdesign er basert på direkte approksimasjoner av spesifisert magnituderrespons.
 - ▶ Ofte med ekstra krav om lineær fase.
- ▶ Design av $M - 1$ 'te ordens FIR filter gjøres ved
 - ▶ enten å finne en M -lengde impulsrespons $\{h[n]\}$
 - ▶ eller M sampler av frekvensresponsen $H(e^{j\Omega})$.
- ▶ De tre vanligste tilnærmelsene er
 1. Vindusbasert design.
 2. Frekvenssamplingmetode.
 3. Datamaskin basert optimalisering

Digital filterspesifikasjon — lavpassfilter

- ▶ Når vi skal approksimere det ideelle filteret må vi finne et greit kompromiss mellom
 - ▶ nivå av ripple (viggling??) i passbånd og stoppbånd, og
 - ▶ bredden på transisjonsbåndet.



Digital filterspesifikasjon — lavpassfilter

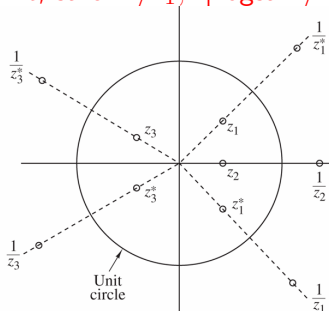
- ▶ Lavpassfilter:
 - ▶ Passbånd gitt ved $0 \leq |\Omega| \leq \Omega_p$.
 - ▶ Stoppbånd gitt ved $\Omega_s \leq |\Omega| \leq \Omega_p$.
 - ▶ Transisjonsbånd gitt ved $\Omega_p \leq |\Omega| \leq \Omega_s$.
 - ▶ Ripple:
 - passbånd: $1 - \delta_1 \leq |H(\Omega)| \leq 1 + \delta_1$ for $|\Omega| \leq \Omega_p$
 - stoppbånd: $|H(\Omega)| \leq \delta_2$ for $\Omega_s \leq |\Omega| \leq \pi$.
 - ▶ Båndbredde: Bredde på passbåndet.
- ▶ Gibbs fenomen: Dekkes senere!

Repetisjon: Systemer med lineær fase

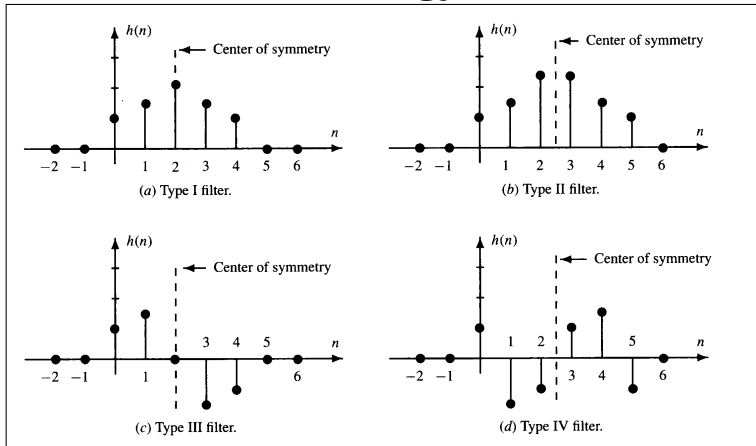
- ▶ Et LTI system har **lineær fase** hvis $H(\Omega) = |H(\Omega)|e^{-j\alpha\Omega}$.
- ▶ Et LTI system har **generalisert lineær fase** hvis $H(\Omega) = A(\Omega)e^{-j(\alpha\Omega-\beta)}$, hvor $A(\Omega)$ er en funksjon med reelle verdier for Ω og $\beta \in \mathbb{R}$.
- ▶ Hvis et system skal både være kausalt og ha lineær fase, så må det være FIR!
- ▶ Et tilstrekkelig krav om (generalisert) lineær fase for et reelt FIR filter er at $h[n]$ er
 - ▶ Symmetrisk: $h[n] = h[M-1-n]$, $n = 0, 1, \dots, M-1$.
Da er $\alpha = (M-1)/2$ og $\beta = 0 \vee \pi$.
 - ▶ eller Anti-symmetrisk:
 $h[n] = -h[M-1-n]$, $n = 0, 1, \dots, M-1$.
Da er $\alpha = (M-1)/2$ og $\beta = \pi/2 \vee 3\pi/2$.

Repetisjon: Nullpunkt plassering for FIR filtre

- ▶ Hvis $h[n]$ er symmetrisk/anti-symmetrisk, så gjelder
 - ▶ $h[n] = \pm h[M-1-n]$, $n = 0, 1, \dots, M-1$
 - ▶ $z^{-(M-1)} H(z^{-1}) = \pm H(z)$.
 - ▶ Hvis z_0 rot, så er $1/z_0$ også rot (resiprok par).
- ▶ Hvis $h[n]$ reell, så gjelder
 - ▶ $H(z) = H^*(z^*)$
 - ▶ Hvis z_1 kompleks rot, så er z_1^* også rot (kompleks konjugerte røtter)
- ▶ Lineær fase reellt FIR-filter:
 - Hvis z_1 nullpunkt, så er $1/z_1, z_1^*$ også $1/z_1^*$ nullpunkt.



Lineær fase filtre deles gjerne i fire klasser ...



Lineær fase filtre

Linear phase filter type	Filter order	Symmetry of Coefficients	$H(f=0)$	$H(f=1)$ (Nyquist)
Type I	Even	$h[n] = h[M-1-n], n = 0..M-1$	No rest.	No rest.
Type II	Odd	$h[n] = h[M-1-n], n = 0..M-1$	No rest.	$H(1) = 0$
Type III	Even	$h[n] = -h[M-1-n], n = 0..M-1$	$H(0) = 0$	$H(1) = 0$
Type IV	Odd	$h[n] = -h[M-1-n], n = 0..M-1$	$H(0) = 0$	No rest.

- ▶ Gruffeporsinkelsen er konstant over frekvensbåndet.
 - ▶ For et $M-1$ -ordens filter (lengde M), er forsinkelsen $(M-1)/2$.
- ▶ Matlab: funksjonene *fir1*, *fir2*, *firls*, *firpm*, *fircls*, *fircls1* og *firrcos* lager Type I and II lineær fase FIR filtre som default.
 - ▶ Både *firls* og *firpm* lager Type III and IV gitt 'hilbert' eller 'differentiator' flagg.
 - ▶ Ikke mulig å lage ulike orden (odd) Type II høypass og båndstopp filtre!

Tema

Design av FIR filtre

- Vindusdesign metoden

- Gibbs effekt

- Design spesifikt

- Frekvenssamplingmetoden

- Ekvirippel filtre

Lineær fase FIR filtre ved bruk av vinduer

- ▶ Velg et ideelt filter, $h_d[n]$, og trunker det med et vindu $w[n]$.
 - ▶ $h[n] = h_d[n]w[n]$.
 - ▶ $w[n]$ endelig lengde vindu, symmetrisk om midtpunktet.
 - ▶ $H(\Omega) = H_d(\Omega) \otimes W(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\nu) W(\Omega - \nu) d\nu$.
- ▶ Hvor godt $H(\Omega)$ approksimerer $H_d(\Omega)$ bestemmes av
 1. Bredden på hovedloben til $W(\Omega)$.
 2. Maksimal sidelobenivå til $W(\Omega)$.
- ▶ Pro: Enkel
- ▶ Con: Mangler presis kontroll på Ω_p og Ω_s .

Example (Avkortet (trunkert) ideelt lavpassfilter)

- ▶ Betrakt ideelt lavpassfilter med kutfrekvens Ω_0 [rad/s].

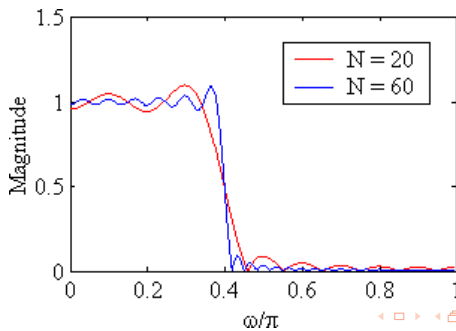
$$h_I[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_I(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_0}^{\Omega_0} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{\Omega_0}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\Omega_0}{\pi} n\right)$$

- ▶ Filteret er ikke implementerbart siden impulsresponsen er uendelig og ikke-kausal.
- ▶ Benytt et rektangulært vindu for å finne et lineært fase FIR filter:

$$b = 0.4 * \text{sinc}(0.4 * (-25:25));$$
- ▶ Fra Parseval's teorem; I integrert minste kvadraters forstand så er dette det beste 51-lengde filtret til å approksimere det ideelle lavpassfilteret.
- ▶ For å plote opp filterets frekvensrespons: `fvtool(b,1)` .
- ▶ Den observerte ringingen (eller rippelet) kalles "Gibbs effekt/fenomen".

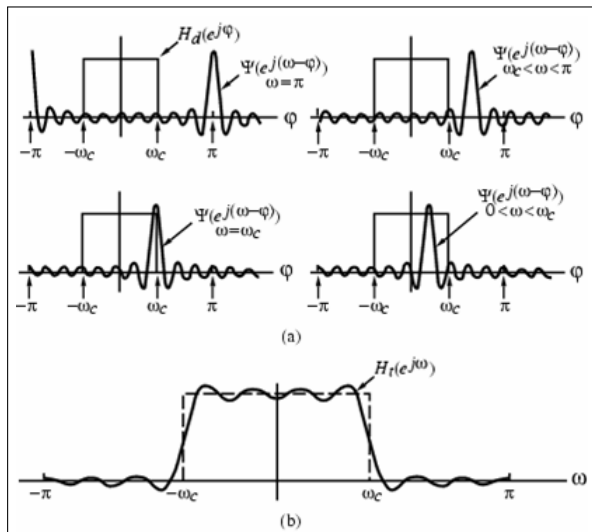
Gibbs effekt

- ▶ Oscillerende oppførsel i magnituderesponsen til kausale FIR filtre funnet ved trunkering av filterkoeffisientene til et ideelt filter.
- ▶ Med økende lengde av filteret vil antall “topper” (ripples) i passbånd og stoppbånd øke og bredden til “toppene” vil minske tilsvarende.
- ▶ Høyden på den største toppen forblir uendret uavhengig av filterets lengde (gitt samme vektingsfunksjon)!



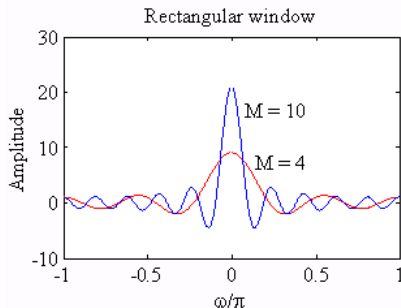
Gibbs effekt ...

- ▶ Fra $h_t[n] = h[n]w[n]$.
- ▶ og $H_t(\Omega) = H_d(\Omega) \circledast \Psi(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\phi) \Psi(\Omega - \phi) d\phi$.



Gibbs effekt ...

- ▶ Rectangulært vindu: $w_R[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq |n| \leq M-1 \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$
- ▶ Oscillerende oppførsel i $H_t(\Omega)$ som følge av at
 1. $h_d[n]$ er uendelig lang og ikke absolutt summerbar og derfor ustabil, og
 2. rektangulært vindu har en skarp "transisjon til null".
- ▶ Effekten kan forklares ved å se på DTFT'en $\Psi_R(\Omega)$ til $w_R[n]$:



Gibbs effekt ...

- ▶ Hovedloben til $\Psi_R(\Omega)$ er karakterisert av bredden $4\pi/(2M - 1)$ som definerer første nullpunkt på begge sider av $\Omega = 0$.
- ▶ Med økende M , vil hovedlobebredden minske som ønsket.
- ▶ Arealet under sidelobene vil forbli konstant selv om bredden til hver sidelobe minsker med økende M .
- ▶ Ringingen i $H_t(\Omega)$ rundt diskontinuiteten vil opptre mer konsentrert, men amplituden vil ikke påvirkes av økende M .
- ▶ Gibbs fenomen kan bli redusert ved enten
 1. bruke et vindu med “myke” ender, eller
 2. påse at transisjonen i magnitudespesifikasjonen mellom passbånd og stoppbånd er glatt.

Noen lineær fase FIR vinduer

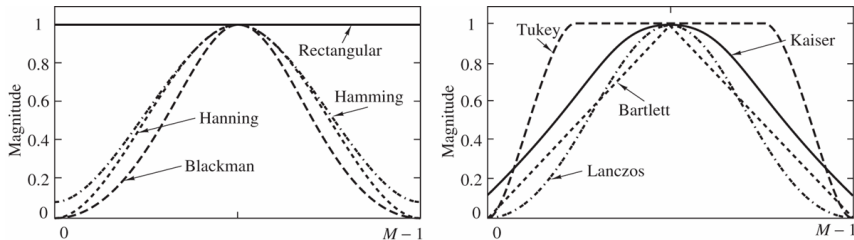


Figure 10.2.3 Shapes of several window functions.

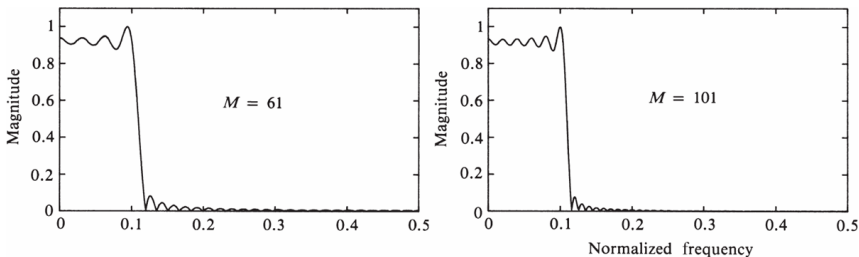


Figure 10.2.7 Lowpass filter designed with a rectangular window: (a) $M = 61$ and (b) $M = 101$.

Responen til noen lineær fase FIR vinduer

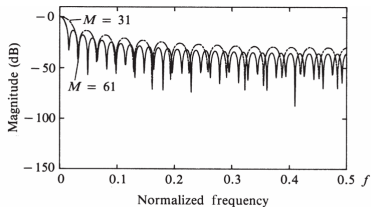


Figure 10.2.2 Frequency response for rectangular window of lengths (a) $M = 31$, (b) $M = 61$.

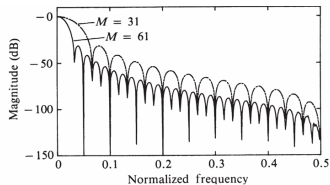


Figure 10.2.4 Frequency responses of Hanning window for (a) $M = 31$ and (b) $M = 61$.

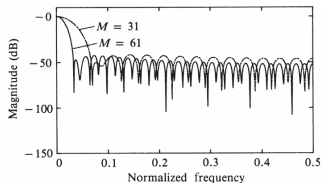


Figure 10.2.5 Frequency responses for Hamming window for (a) $M = 31$ and (b) $M = 61$.

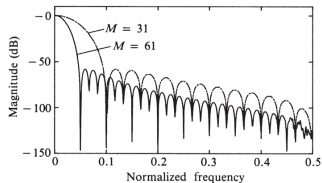


Figure 10.2.6 Frequency responses for Blackman window for (a) $M = 31$ and (b) $M = 61$.

Filtere designet med vindusmetoden

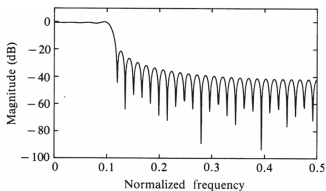


Figure 10.2.8 Lowpass FIR filter designed with rectangular window ($M = 61$).

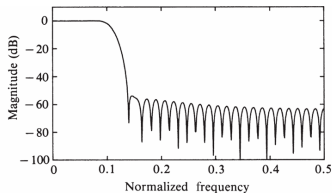


Figure 10.2.9 Lowpass FIR filter designed with Hamming window ($M = 61$).

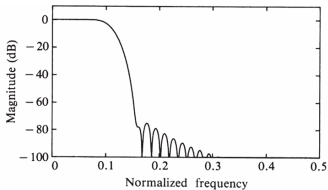


Figure 10.2.10 Lowpass FIR filter designed with Blackman window ($M = 61$).

Vindusmetoden, oppsummert

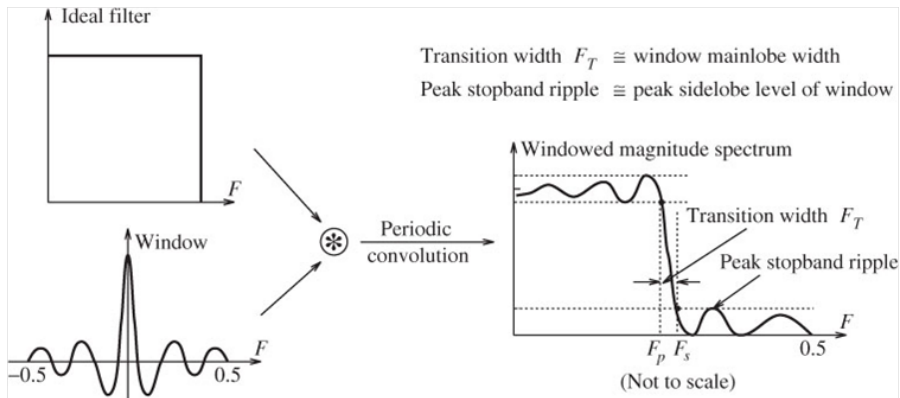
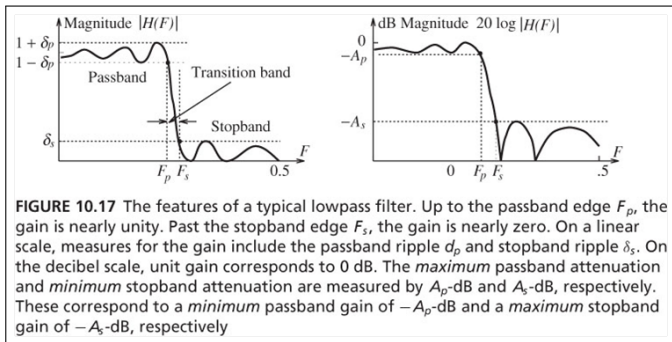


FIGURE 10.18 The spectrum of a windowed ideal filter. Multiplying the impulse response of an ideal filter by a window function results in the convolution of their respective spectra, as shown. The spectrum of a typical window function shows a main lobe and sidelobes and leads to overshoot and oscillations in the spectrum of the windowed filter. To reduce the overshoot and oscillations, we choose windows whose spectra have small or positive sidelobes

Pass- og stoppbånd rippel og transisjonsbånd



- ▶ Passbånddemping (attenuation): $A_p(\text{dB}) = -10 \log \left(\frac{1-\delta_p}{1+\delta_p} \right)$
- ▶ Stoppbånddemping (attenuation):

$$A_s(\text{dB}) = -10 \log \left(\frac{\delta_s}{1+\delta_p} \right) \approx -20 \log \delta_s, \quad \delta_p \ll 1$$

- ▶ Rippel-parametre: $\delta_p = \frac{10^{A_p/20} - 1}{10^{A_p/20} + 1}$, og

$$\delta_s = (1 + \delta_p) \times 10^{-A_s/20} \approx 10^{-A_s/20}, \quad \delta_p \ll 1$$

Vindus-spekter karakteristikk

- ▶ Pass- og stoppbånd rippel er ikke konstante
- ▶ Stoppbånd nivå (filter) typisk mindre enn PSL til vindu
- ▶ PSL, peak passbånd rippel & passbånd demping \approx uavhengig av N
- ▶ Bredde transisjonsbånd \approx gitt av hovedlobe-bredde vindu;
 $F_{WS} \approx C/N$, der C en konstant for hver vindu.

Vinduskarakteristikk

TABLE 10.4 ►
Characteristics of
the Windowed
Spectrum

Window	Peak Ripple $\delta_p = \delta_s$	Passband Attenuation A_{WP} (dB)	Peak Sidelobe Attenuation A_{WS} (dB)	Transition Width $F_{WS} \approx C/N$
Boxcar	0.0897	1.5618	21.7	$C = 0.92$
Cosine	0.0207	0.36	33.8	$C = 2.1$
Riemann	0.0120	0.2087	38.5	$C = 2.5$
von Hann (Hanning)	0.0063	0.1103	44	$C = 3.21$
Hamming	0.0022	0.0384	53	$C = 3.47$
Blackman	$(1.71)10^{-4}$	$(2.97)10^{-3}$	75.3	$C = 5.71$
Dolph ($R = 40$ dB)	0.0036	0.0620	49	$C = 3.16$
Dolph ($R = 50$ dB)	$(9.54)10^{-4}$	0.0166	60.4	$C = 3.88$
Dolph ($R = 60$ dB)	$(2.50)10^{-4}$	0.0043	72	$C = 4.6$
Harris (0)	$(8.55)10^{-4}$	0.0148	61.4	$C = 5.36$
Harris (1)	$(1.41)10^{-4}$	$(2.44)10^{-3}$	77	$C = 7.45$
Harris (2)	$(1.18)10^{-4}$	$(2.06)10^{-3}$	78.5	$C = 5.6$
Harris (3)	$(8.97)10^{-5}$	$(1.56)10^{-3}$	81	$C = 5.6$
Harris (4)	$(9.24)10^{-5}$	$(1.61)10^{-3}$	81	$C = 5.6$
Harris (5)	$(9.96)10^{-6}$	$(1.73)10^{-4}$	100	$C = 7.75$
Harris (6)	$(1.94)10^{-6}$	$(3.38)10^{-5}$	114	$C = 7.96$
Harris (7)	$(5.26)10^{-6}$	$(9.15)10^{-5}$	106	$C = 7.85$

Kunsten å velge vindu for filterdesign

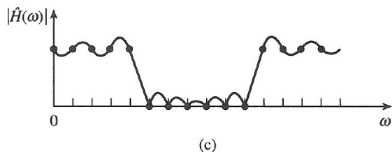
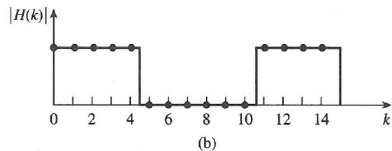
Recipe for Window-Based FIR Filter Design

- Normalize the analog design frequencies by the sampling frequency S .
- Obtain the band edges F_p and F_s of the lowpass prototype.
- Choose the lowpass prototype cutoff as $F_C = 0.5(F_p + F_s)$.
- Choose a window (from Table 10.4) that satisfies $A_{WS} \geq A_s$ and $A_{WP} \leq A_p$.
- Compute the window length N from $F_T = F_s - F_p = F_{WS} = \frac{C}{N}$ (with C as in Table 10.4).
- Compute the prototype impulse response $h[n] = 2F_C \text{sinc}[2nF_C]$, $|n| \leq 0.5(N-1)$.
- Window $h[n]$ and apply spectral transformations (if needed) to convert to required filter type.

Minimum-Length Design: Adjust N and/or F_C until the design specifications are just met.

Frekvenssamplingsmetoden

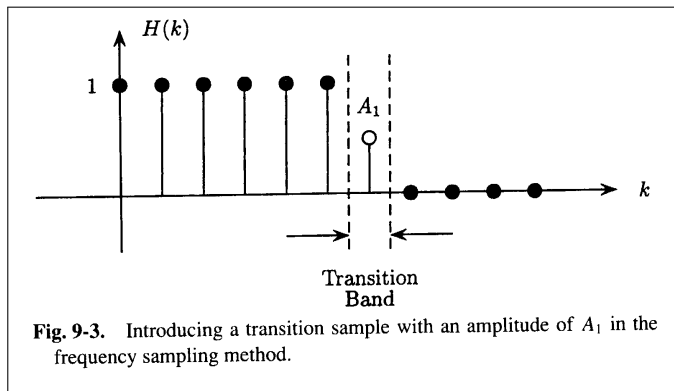
- ▶ Start med frekvensresponsen (DTFT'en) til ønsket filter.
- ▶ Betrakt den som DFT'en til filteret of punktprøv (sample) denne og få $H(k)$.
- ▶ Bruk IDFT (IFFT) for å finne filterkoeffisientene.



Lineær fase FIR filtre ved bruk av frekvenssamplingsmetoden

- ▶ Ønsket respons, $H_d(\Omega)$ er samplet uniformt for $\Omega_k = \frac{2\pi}{M}(k + \alpha)$, $M/2$ punkter (symmetri!!!) mellom 0 og π .
- ▶ Fra $H_d(\Omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h_d[n]e^{-j\omega n}$ får vi
 - ▶ $h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_d(\Omega_k)e^{j\Omega_k n}$,
 - ▶ $y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + \dots + b_{M-1}x[n-M+1]$
 $= \sum_{k=0}^{M-1} b_kx[n-k] \quad n = 0, 1, \dots, M-1.$
- ▶ OK på frekvenssamplene, men ingen kontroll mellom!
- ▶ Introduksjon av transisjonsampel (ett eller flere) forbedrer løsningen!

Lineær fase FIR filtre ved bruk av frekvenssamplingsmetoden



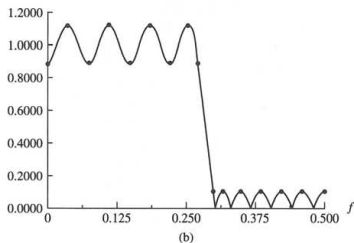
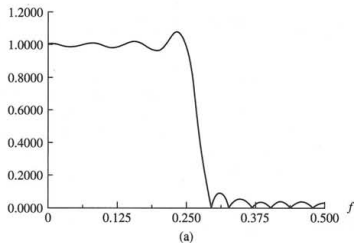
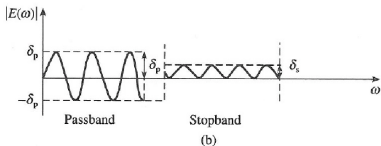
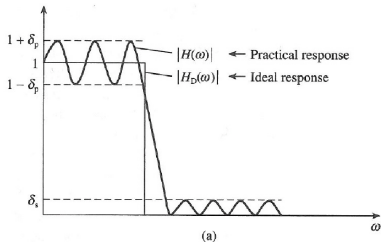
Ekviripple lineær fase FIR filtre

- ▶ Motivasjon og tilnærming:
 - ▶ Forskjellig krav på δ_1 (passbånd) and δ_2 (stoppbånd).
 - ▶ Introduser uniform ringing (ripple).
- ▶ Ønsket amplituderespons: H_{dr} .
- ▶ Vektet feil:

$$E(\Omega) \triangleq W(\Omega)[H_{dr}(\Omega) - H_r(\Omega)], \quad \Omega \in \mathcal{S} \triangleq [0, \Omega_p] \cup [\Omega_s, \pi].$$
- ▶ Vektingsfunksjon $W(\Omega) = \begin{cases} \delta_2/\delta_1 & \text{i passbånd} \\ 1 & \text{i stoppbånd.} \end{cases}$
- ▶ Minimax optimalisering (min. av maks. abs. verdi)

$$\min_{\text{coeff}} [\max_{\omega \in \mathcal{S}} |E(\Omega)|].$$
- ▶ Effektiv algoritme: *Parks-McClellan algorithm* (bruker “the Remez-exchange routine”).
- ▶ Kaisers formel est. filterordenen; $N = \frac{-10 \log(\delta_p \delta_s) - 13}{14.6 \Delta f}$, hvor Δf er bredde transisjonsbånd og δ_p og δ_s er rippel i passbånd og stoppbånd.

Ekviripple lineær fase FIR filtre ...



Ekviripple lineær fase FIR filtre ...

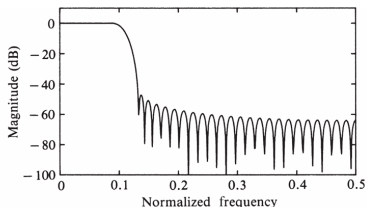


Figure 10.2.11 Lowpass FIR filter designed with $\alpha = 4$ Kaiser window ($M = 61$).

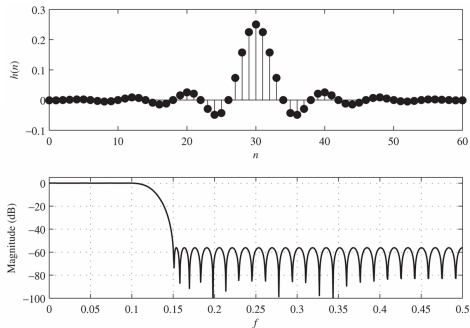


Figure 10.2.17 Impulse response and frequency response of $M = 61$ FIR filter in Example 10.2.3.

Ekviripple lineær fase FIR filtre ...

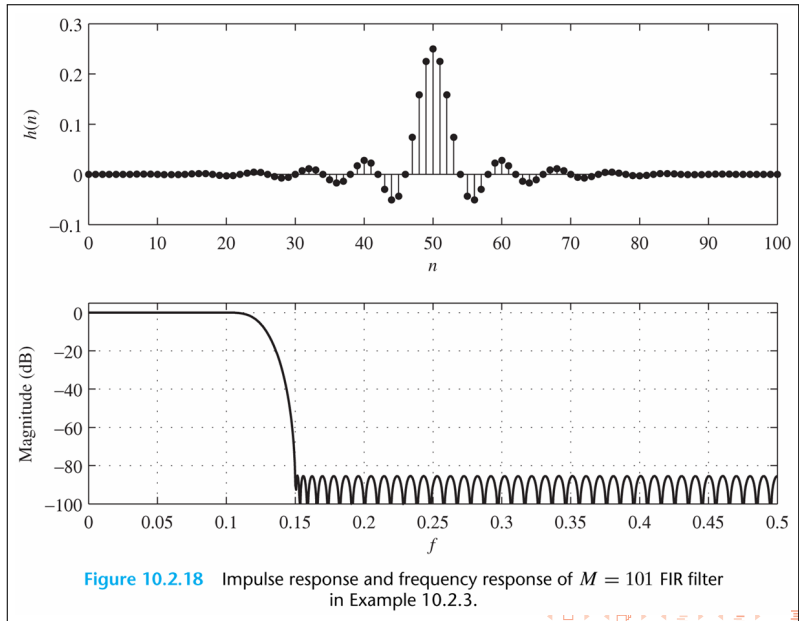


Figure 10.2.18 Impulse response and frequency response of $M = 101$ FIR filter in Example 10.2.3.