



inf

INF3470 Digital signalbehandling  
Tidsdomene analyse (kap 3 – del 1)  
Sverre Holm



UNIVERSITETET  
I OSLO

# Mål for kapittel 3: Systemer

1. Forstå linearitet, superposisjon, tidsinvarians og kausalitet
2. Vite hvordan å identifisere LTI (lineære tidsinvariante) systemer
3. Forstå terminologi og klassifisering av digitale filtre
4. Vite hvordan å sette opp en realisering av filtre
5. Vite at en differanseligning har to responser, en fra initialbetingelser og en fra input

# Mål for kapittel 3: Systemer

6. Vite hvordan å finne impulsresponsen til et LTI system fra differanseligningen
7. Vite hvordan å konvertere mellom differanse-ligningen for et system og impulsresponsen
8. Vite hvordan å finne konvolusjon mellom sekvenser av endelig lengde
9. Vite hvordan å bruke definisjonen til å finne konvolusjon
10. Forstå egenskapene til konvolusjon og vite hvordan å bruke dem for å løse problemer

# Mål for kapittel 3: Systemer

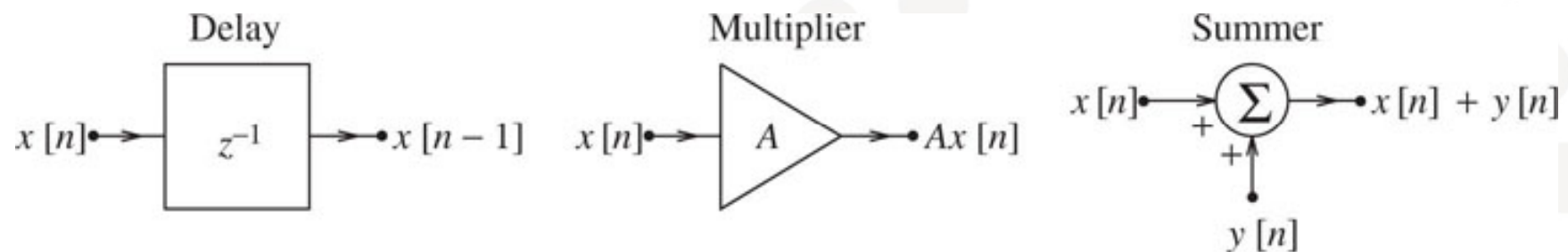
11. Vite hvordan å finne impulsresponsen til systemer i kaskade og i parallell
12. Forstå stabilitetsbegrepet
13. Vite hvordan å bestemme stabilitet fra differanseligning og impulserespons
14. *Forstå periodisk konvolusjon og hvordan å finne den for to signaler*
15. *Vite hvordan å finne krysskorrelasjon og autokorrelasjon*
16. *Forstå sammenhengen mellom konvolusjon og transform-metoder*

# 3.1 Tids-diskrete systemer

- Differanselikning,
  - Samme rolle som differensiallikning i analog signalbehandling
- $y[n] = \alpha y[n-1] + \beta x[n]$ 
  - Inn  $x[n]$ , ut  $y[n]$
  - $\alpha, \beta$  koeffisienter
- Lineære, tidsinvariante (LTI) systemer
  - Viktigste klasse systemer/filtre
  - Konstante koeffisienter

# Operatorer

- Operator  $O(x[n]) = y[n]$ 
  - Addisjon
  - Multiplikasjon med konstant
  - Forsinkelse  $z^{-m}$
  - Alle tre:  $O\{\cdot\} = 4z^{-3} + 6$
- Andre:
  - $O\{\cdot\} = x^2$
  - $O\{\cdot\} = C\{\cdot\} + D$  (legge til konstant)



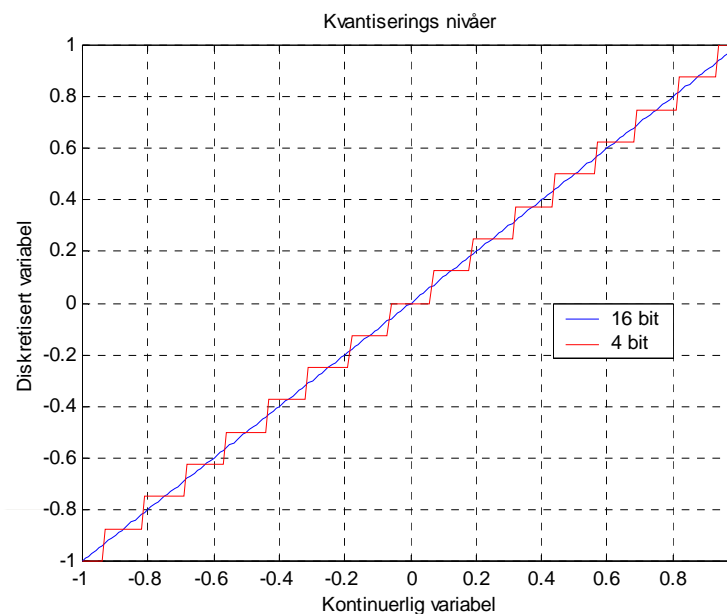
**FIGURE 3.1** The building blocks for digital filter realization include delay elements (that can be cascaded), scalar multipliers, and summers

# Linearitet og superposisjon

- Formell notasjon:
  - Additiv:  $O\{x_1[n] + x_2[n]\} = O\{x_1[n]\} + O\{x_2[n]\}$
  - Homogen eller skalerbar:  $O\{Kx[n]\} = K \cdot O\{x[n]\}$
  - Superposisjon: de to sammen  $\Leftrightarrow$  linearitet:  
 $O\{Ax_1[n] + Bx_2[n]\} = A \cdot O\{x_1[n]\} + B \cdot O\{x_2[n]\}$
- Alle filtre (FIR, IIR) er lineære
- Mange interessante effekter er det ikke:
  - Gitarvring, ultralyd i kroppsvev, forsterkere/høytalere som spiller for høyt, ...

# Linearitet

- Er kvantisering en lineær operasjon?
  - $\approx$  lineær ved mange nok bit
  
- Er mpeg-koding av lyd en lineær operasjon?





# Tidsinvarians

- Utgangen  $y[n]$  er bare avhengig av hva man putter inn,  $x[n]$  – og ikke når man gjør det.
- Formell notasjon:
  - $O\{x[n]\}=y[n] \Rightarrow O\{x[n-n_0]\}=y[n-n_0]$
- Alle filtre (FIR, IIR) er tidsinvariante
- Mange interessante effekter er det ikke:
  - Lydeffekter som flanging, phasing, chorus
- De kan likevel tolkes ved hjelp av filterteori
  - Tidsinvariante over kort tid

# LTI

- LTI = Lineær og tidsinvariant
  - Mer generelt: skift-invariant (også romlige signaler og systemer)
- Forutsetning for beskrivelse med impulsrespons og frekvensrespons (via Fourier-transform)
- **Veldig viktig begrep å forstå!**
- Sjekk av en operator  $O\{\cdot\}$ :
  - Linearitet:
    - $O\{Ax_1[n] + Bx_2[n]\} = A \cdot O\{x_1[n]\} + B \cdot O\{x_2[n]\}$
  - Tidsinvariant:
    - $O\{x[n]\} = y[n] \Rightarrow O\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0]$

## 3.2 Digitale filtre

- N-te ordens differanselikning:
  - $y[n] + A_1 y[n-1] + \dots + A_N y[n-N]$   
 $= B_0 x[n] + B_1 x[n-1] + \dots + B_M x[n-M]$
  - Orden N (utgangsledd med maks forsinkelse)
  - Konstante koeffisienter  $\Leftrightarrow$  LTI
- Initial-betingelse 0:
  - $y[-1] = \dots = y_N[-N] = 0 \Rightarrow$  relaxed
- Input  $\delta[n] \Rightarrow$  Impuls-respons  $h[n]$ 
  - Superposisjon: respons til et vilkårlig signal finnes via  $h[n]$ , siden signal kan dekomponeres i impulser:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k]$$

- Leder til konvolusjon

3. september 2012

12

# Ikke-rekursivt filter– FIR filter

- Generelt:  $y[n] + A_1 y[n-1] + \dots + A_N y[n-N]$   
 $= B_0 x[n] + B_1 x[n-1] + \dots + B_M x[n-M]$
- Ikke-rekursivt filter:  $y[n] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] + \dots + B_M x[n-M]$ 
  - Orden M
  - Utgangen dannes fra forsinkede inngangsverdier
  - Kobler ikke tilbake: ikke-rekursivt
  - Kalles også Moving Average (MA)
    - Hvis alle  $B_m = 1/(M+1)$  blir det middelværdi
  - Vil vise etter hvert at  $h[n] = [B_0, \dots, B_M]$  og at  $h[n]$  dermed er endelig:  $\Rightarrow$  Finite Impulse Response Filter

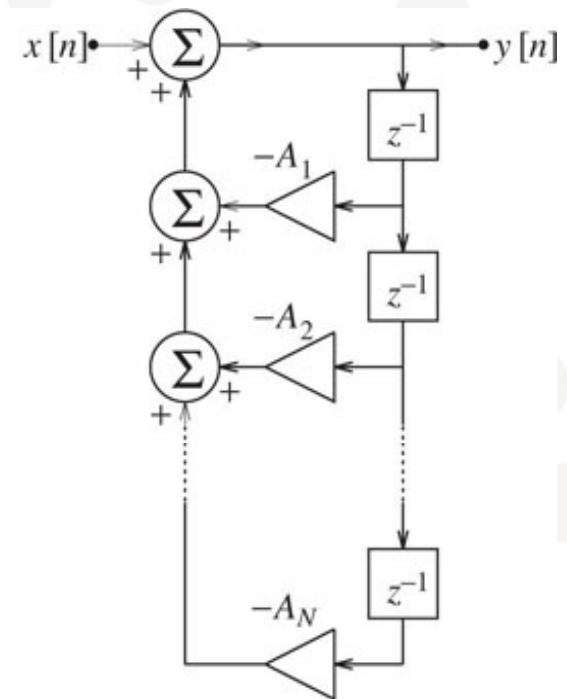
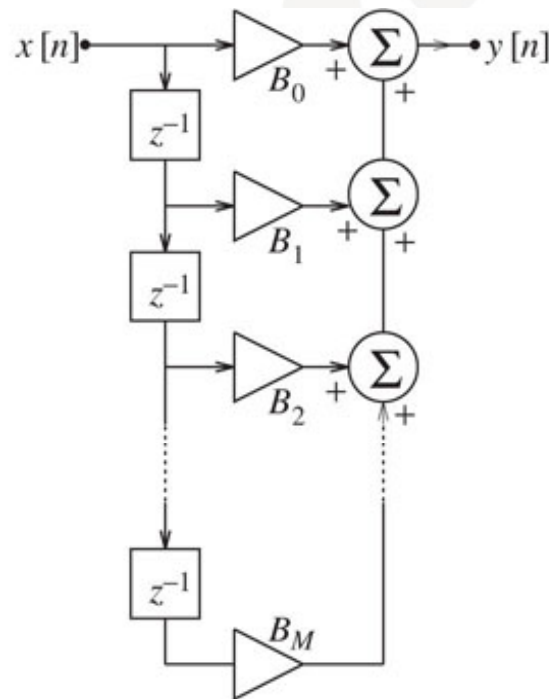
# Rekursivt filter – IIR filter

- Generelt:  $y[n] + A_1 y[n-1] + \dots + A_N y[n-N]$   
 $= B_0 x[n] + B_1 x[n-1] + \dots + B_M x[n-M]$
- Rekursivt filter:  $y[n] + A_1 y[n-1] + \dots + A_N y[n-N] = B_0 x[n]$ 
  - Orden N
  - Kobler tilbake: rekursjon, kalles også Autoregressivt (AR)
  - Skal se at  $h[n]$  blir  $\infty$  lang: Infinite Impulse Response Filter
- Det mest generelle filteret har også MA-del i tillegg til AR:  
ARMA (autoregressive – moving average)
  - Utgangen avhenger av tidligere utgangsverdier,  $y$ , og også tidligere verdier av inngangen,  $x$

# Digitale filtre: realisering

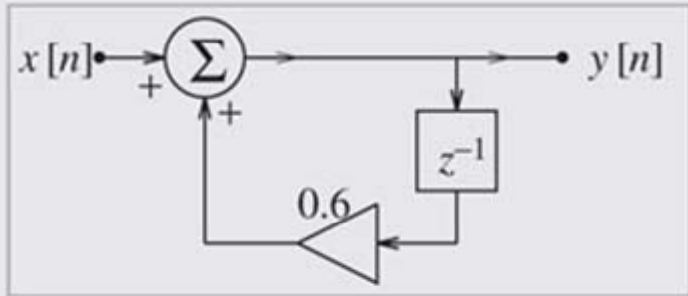
- Multiplikasjon (gain), forsinkelse, summering

**FIGURE 3.2** The realization of a nonrecursive digital filter (left) shows only feed-forward paths. The realization of a recursive digital filter (right) includes feedback paths

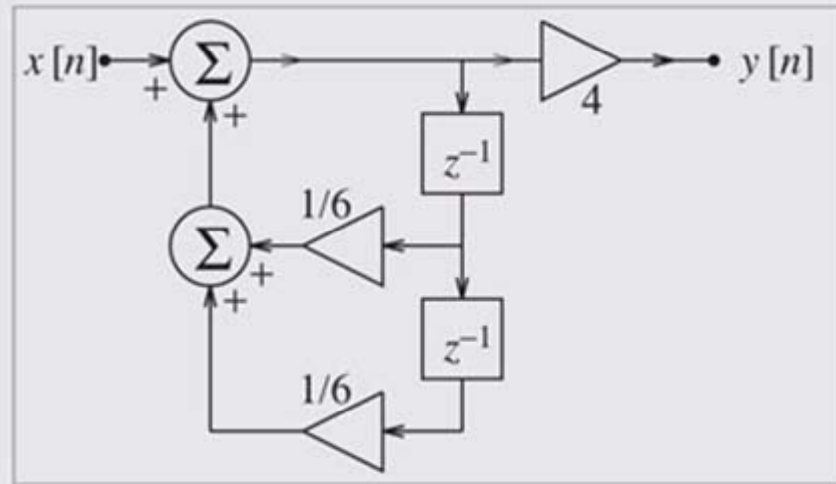


# Drill 3.6

Sketch the realizations of the following systems  
**(a)**  $y[n] - 0.6y[n - 1] = x[n]$       **(b)**  $y[n] - \frac{1}{6}y[n - 1] - \frac{1}{6}y[n - 2] = 4x[n]$



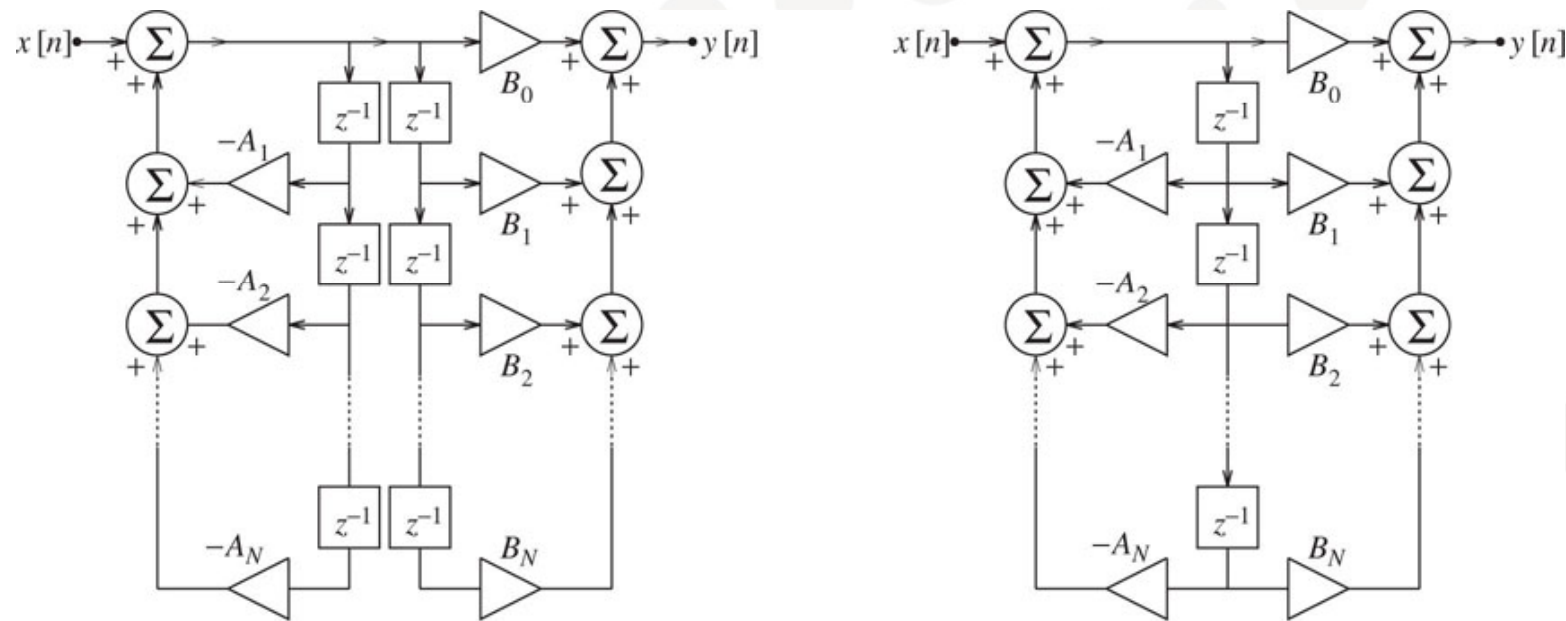
**Answer:**



# Filterrealisering – generell form

$$y[n] + A_1 y[n-1] + \dots + A_N y[n-N] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] + \dots + B_M x[n-M]$$

- Ekvivalente (pga linearitet)



**FIGURE 3.3** The direct (direct form I) realization of an  $N$ th-order difference equation (left) requires  $2N$  delay elements. The canonical (direct form II) realization the same difference equation requires only  $N$  delay elements



## 3.3 Respons: ikke-rekursive filtre (FIR)

- $y[n] = B_0x[n] + B_1x[n-1] + \dots + B_Mx[n-M]$ 
  - Veiet sum av forsinkede input samples
- Eks  $y[n] = 2x[n] - 3x[n-2]$ 
  - Hva er  $B_0, B_1, B_2$ ?
  - Input  $x[n] = 0.5^n u[n]$ . Hva er  $y[1]$  og  $y[2]$ ?

# Respons: Rekursive filtre (IIR)

$$y[n] + A_1 y[n-1] + \dots + A_N y[n-N] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] + \dots + B_M x[n-M]$$

- Skriver om så utgangen blir:

$$y[n] = -A_1 y[n-1] - \dots - A_N y[n-N] + B_0 x[n] + B_1 x[n-1] + \dots + B_M x[n-M]$$

- Initialbetingelser for å finne  $y[n]$ :  $y[n-1], \dots, y[n-N]$

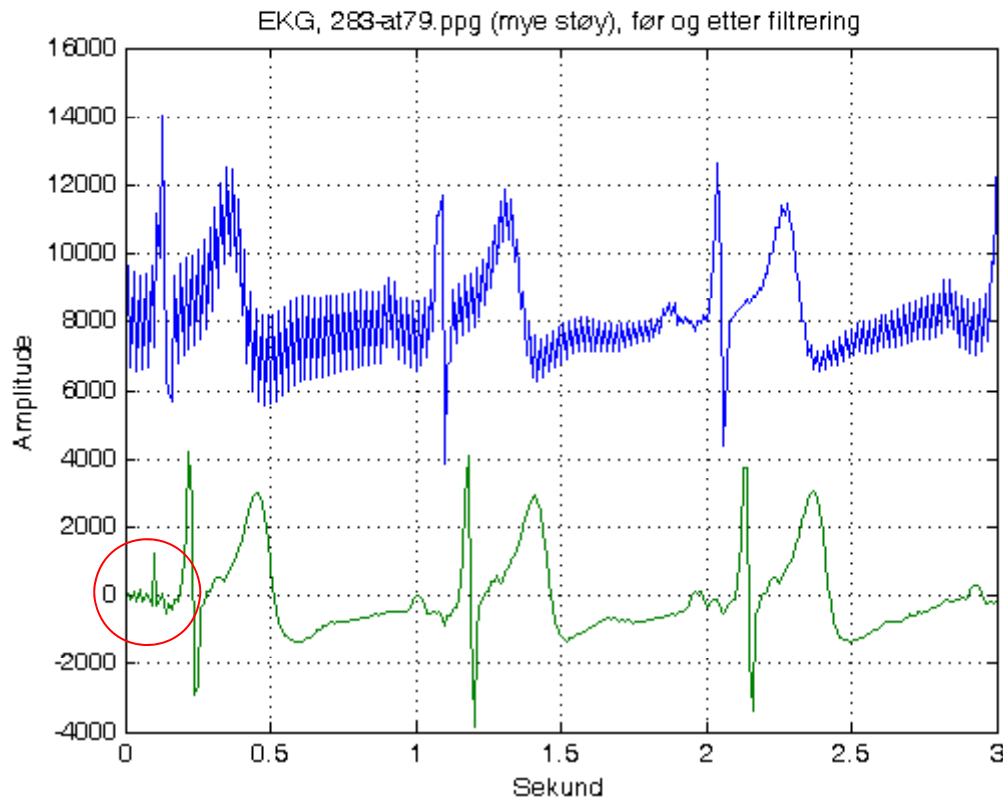
# Eks: Rekursivt filter

- $y[n] = a_1 y[n-1] + b_0 x[n]$ 
  - $x[n] = u[n]$
  - $y[-1] = 0$
- Utgangen:
  - $y[0] = a_1 \cdot 0 + b_0 \cdot 1 = b_0$
  - $y[1] = a_1 b_0 + b_0 = b_0[1+a_1]$
  - $y[2] = a_1 b_0[1+a_1] + b_0 = b_0[1+a_1+a_1^2]$
  - ...
  - $y[n] = b_0[1+a_1+a_1^2+ \dots + a_1^n]$
  - Endelig geometrisk rekke:  $y[n] = b_0 (1-a_1^{n+1})/(1-a_1)$

## 3.4 Løsning av differenselikninger

- Samme metode som for differensiallikninger
- Total respons =
  - Homogen + inhomogen løsning
  - = Naturlig respons + tvunget respons
  - = Transient + stasjonær respons (ved sinus inn)
- $y[n] = y_N[n] + y_F[n] = y_T[n] + y_S[n]$

# Transient: EKG - Før og etter filtrering



Eks fra første forelesing  
Se nøyer på starten av det  
filtrerte signalet.

- $F_{\text{sample}}=100$  Hz
- FIR Filterlengde  $N=20$   
 $20/100$  sek = 200 ms
- Uønskede effekter:
  - Nulling
  - Smell (lyd)
- Blokkprosessering med uønsket effekt ved hver blokkgrense
- Kan bli enda mer med IIR-filter

3. september 2012

23

# Transient respons

- Må løse karakteristisk likning og finne røtter
  - N'te ordens:  $y[n]+A_1y[n-1]+\dots+A_Ny[n-N]=x[n]$
  - => karakteristisk likning:  $1+A_1 z^{-1}+\dots+A_N z^{-N}=0$ 
    - N røtter  $z_1, z_2, \dots, z_N$
    - Transient løsning har form  $y_N[n]=K_1z_1^n + K_2z_2^n + \dots + K_N z_N^n$

Entry	Root of Characteristic Equation	Form of Natural Response
1	Real and distinct: $r$	$Kr^n$
2	Complex conjugate: $re^{j\Omega}$	$r^n [K_1 \cos(n\Omega) + K_2 \sin(n\Omega)]$
3	Real, repeated: $r^{p+1}$	$r^n (K_0 + K_1n + K_2n^2 + \dots + K_pn^p)$
4	Complex, repeated: $(re^{j\Omega})^{p+1}$	$r^n \cos(n\Omega)(A_0 + A_1n + A_2n^2 + \dots + A_pn^p) +$ $r^n \sin(n\Omega)(B_0 + B_1n + B_2n^2 + \dots + B_pn^p)$

# Stasjonær respons

- Skyldes inngangssignalet
- Utgang har samme form som inngangen:

Entry	Forcing Function (RHS)	Form of Forced Response
1	$C_0$ (constant)	$C_1$ (another constant)
2	$\alpha^n$ (see note above)	$C\alpha^n$
3	$\cos(n\Omega + \beta)$	$C_1 \cos(n\Omega) + C_2 \sin(n\Omega)$ or $C \cos(n\Omega + \phi)$
4	$\alpha^n \cos(n\Omega + \beta)$ (see note above)	$\alpha^n [C_1 \cos(n\Omega) + C_2 \sin(n\Omega)]$
5	$n$	$C_0 + C_1 n$
6	$n^p$	$C_0 + C_1 n + C_2 n^2 + \dots + C_p n^p$
7	$n\alpha^n$ (see note above)	$\alpha^n (C_0 + C_1 n)$
8	$n^p \alpha^n$ (see note above)	$\alpha^n (C_0 + C_1 n + C_2 n^2 + \dots + C_p n^p)$
9	$n \cos(n\Omega + \beta)$	$(C_1 + C_2 n)\cos(n\Omega) + (C_3 + C_4 n)\sin(n\Omega)$

*NOTE:* If the right-hand side (RHS) is  $\alpha^n$ , where  $\alpha$  is also a root of the characteristic equation repeated  $p$  times, the forced response form must be multiplied by  $n^p$ .

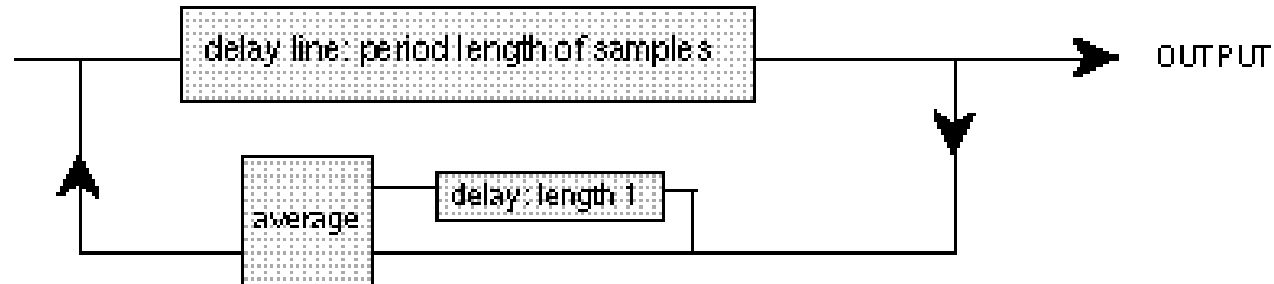
## 3.5 0-input og 0-tilstands respons

- Alternativ måte for løsning av differanselikning:
  - Respons pga initialbetingelser: 0-input respons:  $y_{zi}[n]$
  - Respons pga input alene (0 i initialbetingelser):  $y_{zs}[n]$
- Totalrespons  $y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$
- Likner forrige metode:  $y[n] = y_N[n] + y_F[n]$ 
  - Men  $y_{zi}[n] \neq y_N[n]$  og  $y_{zs}[n] \neq y_F[n]$



# Lydsyntese: filter uten inngang

- 1979 Karplus og Strong, Stanford Univ.
- Gitar-liknende lyd
- $y[n] - 0.5*(y[n-N] + y[n-N-1]) = 0$

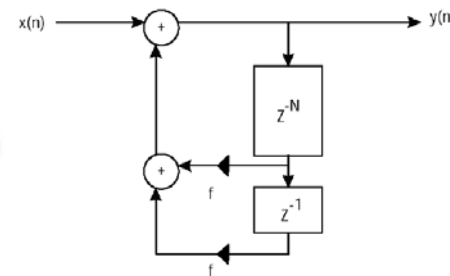
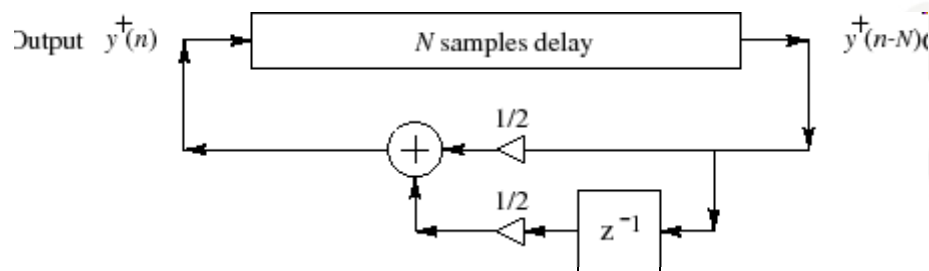


# Karplus-Strong algoritmen

- N bestemmer tonehøyde:
  - 440 Hz og  $f_s = 44100$  samples/sekund  $\Rightarrow$   
 $P = 44100/440 = 100,22 \approx 100$  samples
- $y[n], y[n-1], \dots, y[n-N]$ , må initialiseres med **tilfeldige tall** og utgangen taes fra  $y[n-N]$ .
- Høye harmoniske dør ut raskt, lave varer lengre
- Analyse og varianter:
  - Karplus, K. and Strong, A., Digital synthesis of plucked-string and drum timbres, Computer Music Journal, pp. 43-55, 1983
  - <http://www.music.mcgill.ca/~gary/courses/papers/Karplus-Strong-CMJ-1983.pdf>

# Differanseligning for Karplus-Strong

- Rekursiv differanseligning:  $y[n] - 0.5*(y[n-N] + y[n-N-1])=0$ 
  - Intet inngangssignal
  - *Utgangen er en effekt av transienten etter de tilfeldige tallene som er i hele forsinkelseslinjen*
  - På grensen av å være et ustabil system



- [http://ccrma.stanford.edu/realsimple/faust\\_strings/Karplus\\_Strong\\_Digitar\\_Algorithm.html](http://ccrma.stanford.edu/realsimple/faust_strings/Karplus_Strong_Digitar_Algorithm.html)
- <http://focus.ti.com/lit/an/spra252/spra252.pdf>

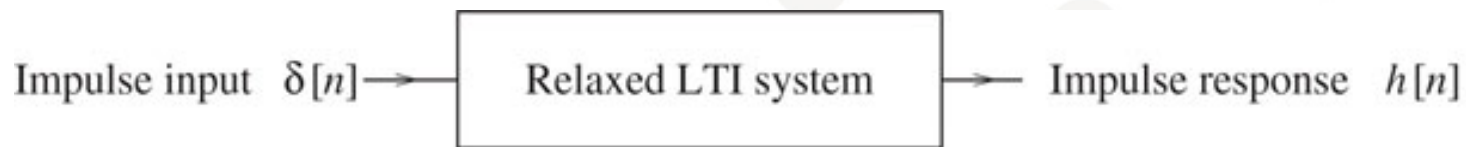
# Karplus0.m

```
function out = Karplus0(tid, tone, plott)
%
% Karplus-Strong, basic version
%
% tid in seconds
% tone in Hertz
% plott = 1 for plot and sound
fs=44100;
if nargin == 0
    time = 2*fs;
else
    time = tid *fs; % no of samples
end
if nargin <= 1
    tone = 440; % Hz
end
if nargin <=2
    plott = 0;
end

length = fix(fs/tone);
out = zeros(time,1);
table = randn(length+1,1);
% initialize output buffer:
out(1:length) = table(2:length+1);
maxloop = fix(time/length);
for loop = 2:maxloop
    table(2:length+1) =
        0.5*(table(2:length+1) + table(1:length));
    out((loop-1)*length + 1: loop*length) =
        table(2:length+1);
end
if (plott == 1)
    soundsc(out,fs)
    figure(1);plot(out)
    figure(2);
    spectrogram(out,512,128,512,fs,'yaxis')
end
```

## 3.6 Impulsrespons

- Viktigste karakterisering av et filter
  - Null som initialbetingelser
- Viktigste verktøy for beregning av respons
- Lengden avhenger av IIR, FIR ( $\infty$  lang eller ikke)



**FIGURE 3.4** The impulse response  $h[n]$  of a system is the output if the input is the unit impulse  $\delta[n]$ . It is defined only for relaxed systems (whose initial conditions are zero) and useful primarily for LTI systems

# FIR impulsrespons (ikke-rekursivt filter)

- $y[n] = B_0x[n] + B_1x[n-1] + \dots + B_Mx[n-M]$ 
  - La  $x[n]$  være  $\delta[n]$
- Impulsrespons:  
 $h[n] = B_0\delta[n] + B_1\delta[n-1] + \dots + B_M\delta[n-M]$
- $h[n] = \{B_0, B_1, \dots, B_M\} = \text{filterkoeffisientene—lett!}$ 
  - Finite Impulse Response filter
  - Ikke-rekursivt filter
  - Transversalt filter

# Impulsrespons for rekursivt filter (IIR)

- Noen få koeffisienter kan generere  $\infty$  lang  $h[n]$
- Eks  $h[n]$  gitt som et uttrykk
  - Filter gitt ved  $y[n] - \alpha y[n-1] = x[n]$
  - Løs  $h[n] = \delta[n] + \alpha h[n-1]$  med  $h[-1]=0$
  - Rekursjon:
    - $h[0] = 1$  – eneste ledd der inngangen har noen verdi
    - $h[1] = \alpha$
    - $h[2] = \alpha^2$
    - ...
    - $h[n] = \alpha^n u[n]$  (Husk  $u[n]$  da løsningen er bare for  $n \geq 0$ )
  - Hva slags filter? lavpass for  $0 < \alpha < 1$ , høypass for  $-1 < \alpha < 0$

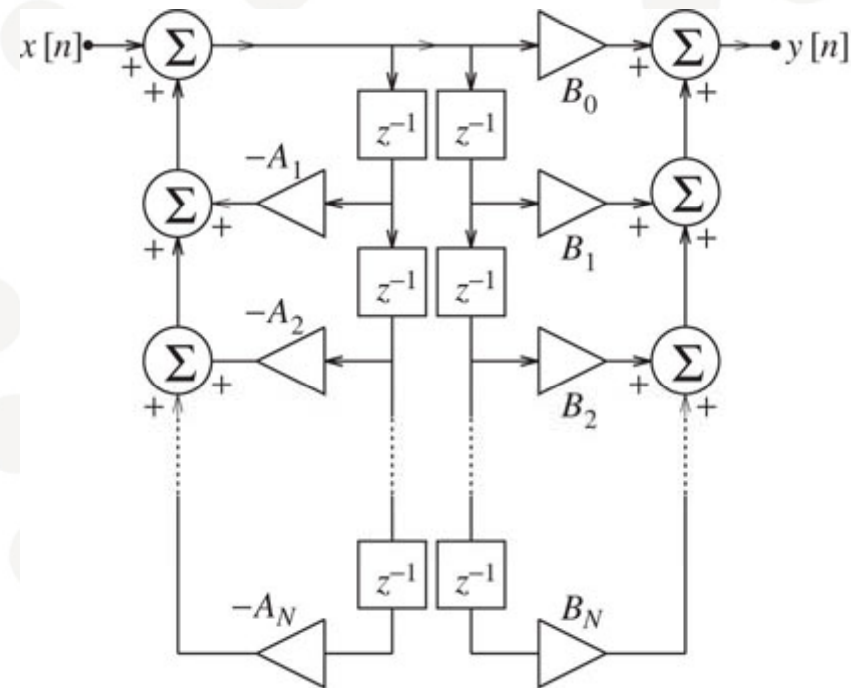
# Impulsrespons for rekursivt filter (IIR)

Generelt IIR med ikke-rekursiv del også:

- $y[n] + A_1 y[n-1] + \dots + A_N y[n-N] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] + \dots + B_M x[n-M]$

Del i to:

1. Rekursiv del
2. Ikke-rekursiv del





# Impulsrespons for rekursivt filter (IIR)

Generelt IIR med ikke-rekursiv del også:

- $y[n] + A_1 y[n-1] + \dots + A_N y[n-N] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] + \dots + B_M x[n-M]$
1. Finn impulsresponsen,  $h_0[n]$ , til den rekursive delen  $y[n] + A_1 y[n-1] + \dots + A_N y[n-N] = x[n]$  ved å løse
    - $h_0[n] + A_1 h_0[n-1] + \dots + A_N h_0[n-N] = 0$  med  $h_0[0] = 1$
  2. Bruk så superposisjon og inkluder den ikke-rekursive delen  $h[n] = B_0 h_0[n] + B_1 h_0[n-1] + \dots + B_M h_0[n-M]$

## Eks 3.12

$$y[n] - 0.6 y[n-1] = 3x[n+1] - x[n]$$

1. Start med rekursivt system  $y[n]-0.6 y[n-1]=x[n]$

- Tidligere:  $y[n] - \alpha y[n-1] = x[n] \Rightarrow h[n]=\alpha^n u[n]$  så da blir  $h_0[n]=0.6^n u[n]$

2. Send  $h_0[n]$  gjennom ikke-rekursiv del:

- $h[n] = 3h_0[n+1] - h_0[n] = \underline{3 \cdot 0.6^{n+1} u[n+1] - 0.6^n u[n]}$
- Skisser utgangen så ser man at det også kan skrives som  $h[n] = 3 \delta[n+1] + 3 \cdot 0.6^{n+1} u[n] - 0.6^n u[n]$   
 $= \underline{3 \delta[n+1] + 0.8 \cdot 0.6^n u[n]}$
- Kausal eller ikke-kausal?

## 3.7 Systembeskrivelser

- Rekursive filtre er ikke alltid IIR!
- Eks 3.14a)  $y[n] = y[n-1] + x[n] - x[n-3]$ 
  - Impulsrespons:  $x[n] = \delta[n]$  og  $y[-1] = 0$ :
    - $y[0] = 0 + 1 - 0 = 1$ ,  $y[1] = 1 + 0 + 0 = 1$
    - $y[2] = 1 + 0 + 0 = 1$ ,  $y[3] = 1 + 0 - 1 = 0$
    - $y[4] = 0 + 0 + 0 = 0$ ,  $y[5] = 0 + 0 + 0 = 0$ , osv
  - Dette er jo et FIR filter!  $y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2]$
  - Finnes noen ganger en rekursiv form for et ikke-rekursivt system
- NB! Filtre med like koeffisienter og verdi=1, kan være på grensen av stabilitet og ikke helt numerisk gode å ha med å gjøre. Mye bedre å lage et FIR!

# Systembeskrivelser

- Å finne differanselikning fra impulsresponsen:
  - Lett for FIR:  $h[n] = \{B_0, B_1, \dots, B_M\}$
  - Generelt for rekursivt system: Kan gjøres, men mye lettere ut fra Z-transform
  - Eks:  $h[n]=3 \cdot 0.6^n u[n]$ 
    - Kjenner igjen formen  $y[n] - \alpha y[n-1] = x[n] \Leftrightarrow h[n]=\alpha^n u[n]$
    - $\Rightarrow y[n] - 0.6 y[n-1] = 3x[n]$

## 3.8 Eksempler på filtre

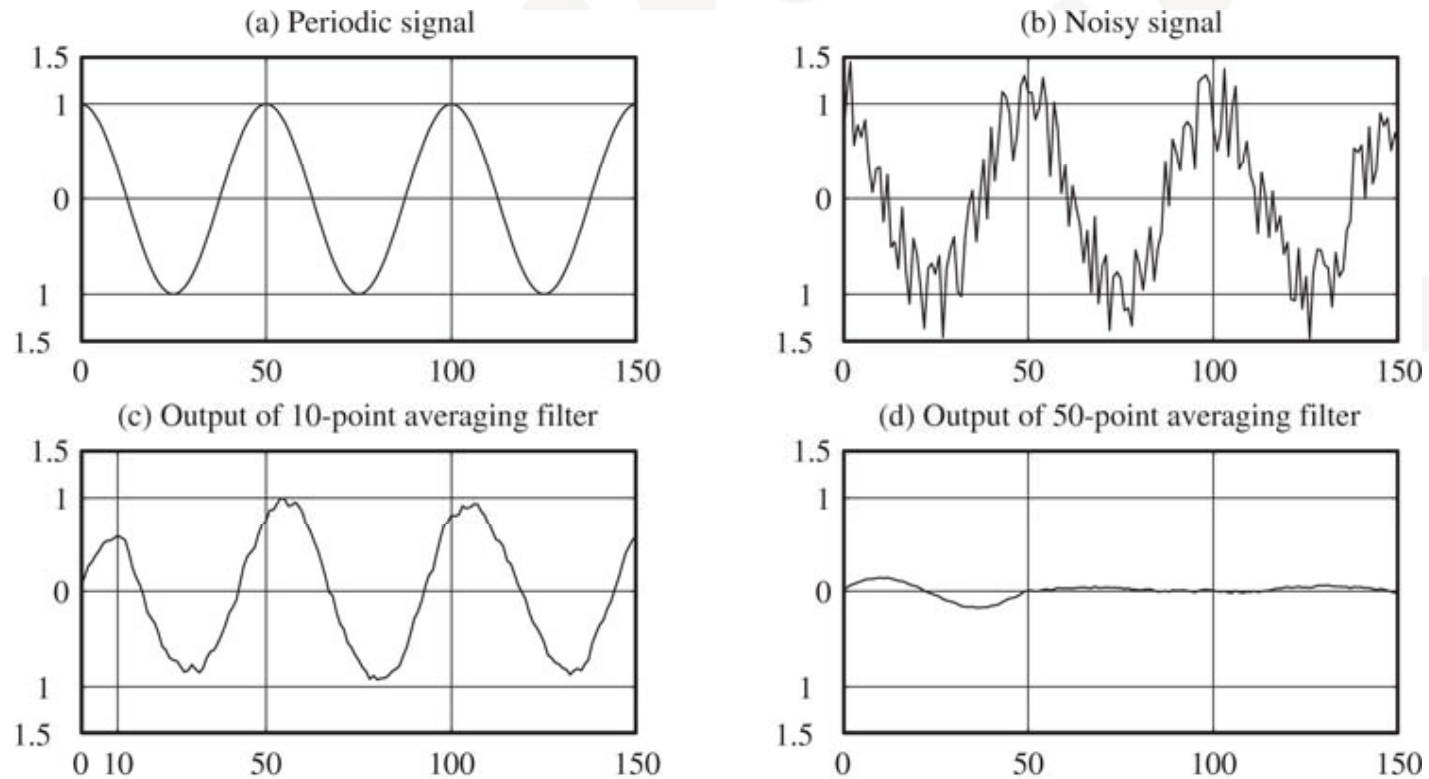
- Moving average (MA): middelværdi av naboene:
  - Kausalt FIR filter

$$y[n] = \frac{1}{L}(x[n] + x[n-1] + x[n-2] + \dots + x[n-(L-1)]) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} x[n-k]$$

- Glattefilter, glatte bort støy – jo lenger filter jo mer glatting
- Lavpassfilter med impulsrespons:

$$h[n] = \frac{1}{L}\{1, 1, 1, \dots, 1, 1\}$$

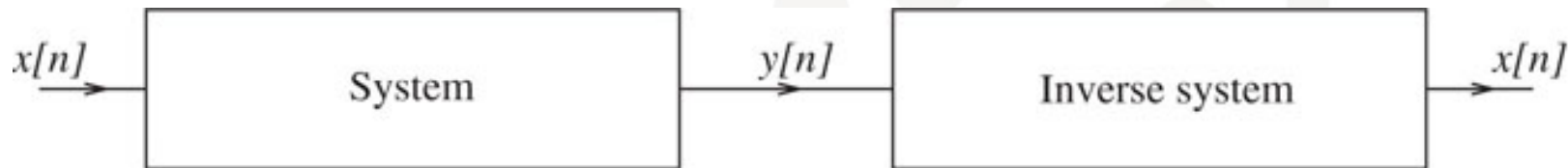
# MA filter: $L=10$ og $L=50$ på $N=50$ perioders sinus i støy



**FIGURE 3.5** The response of two averaging filters to a noisy sinusoid. The 10-point averaging filter results in a smoothing of the signal as expected. Since the sinusoid has a period of 50 samples, the 50-point averaging filter yields zero output (average of 50 successive samples) for the sinusoid and all we see is just the start-up transient and the 50-point average of the noise

# Inverse systemer

- 'Opphever' effekten av et tidligere filter
  - Mikrofon som har dårlig respons i bass/diskant  $\Rightarrow$  invers filter for å rette opp
  - Effekten av et rom på lyd  $\Rightarrow$  invers filter gir tilbake lyden som den "var ment" å være
  - Seismikk



**FIGURE 3.6** A system and its inverse. An input  $x[n]$  to the system results in an output  $y[n]$ . The inverse system is then used to recover the original signal  $x[n]$

# Seismikk

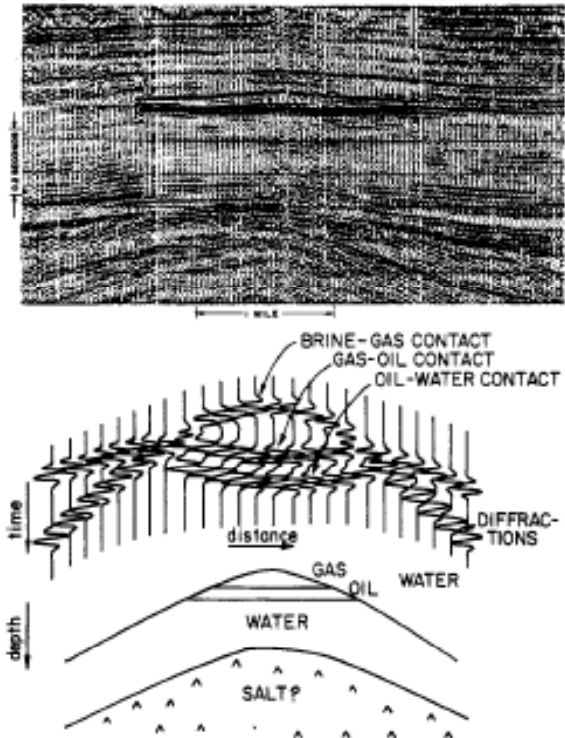


Fig. 8. An amplitude anomaly exhibiting many seismic features of an idealized "bright-spot" associated with a hydrocarbon reservoir.

Wood, L.C.; Treitel, S., "Seismic signal processing," Proc IEEE, April 1975

WENZEL *et al.*: SEISMIC MODELING

407

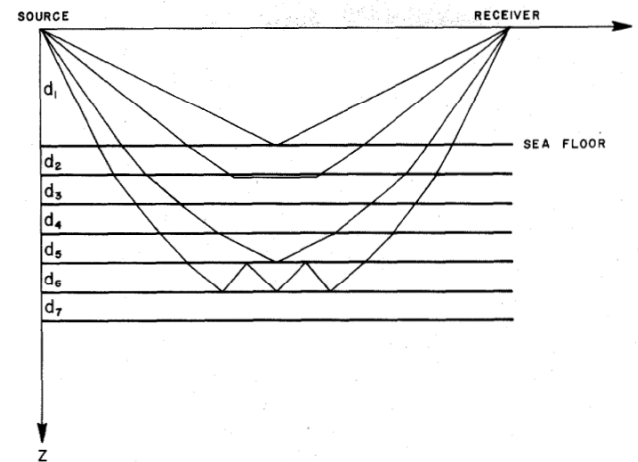


Fig. 1. Schematic diagram for an elastic layered half space. In this paper, we assume that the first layer of thickness  $d_1$  is a fluid.

Wenzel, Seismic modeling in the domain of intercept time and ray parameter, IEEE Trans Acous., speech, Sign. Proc., 1982

3. september 2012

46  
46



# Marin seismikk, luftkanon

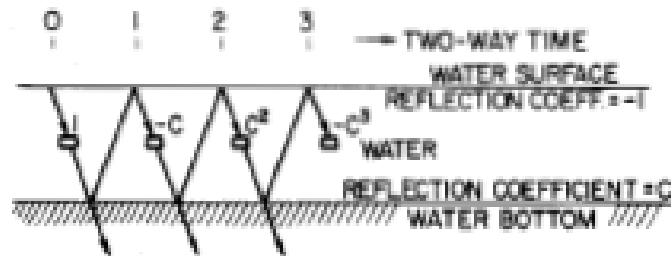
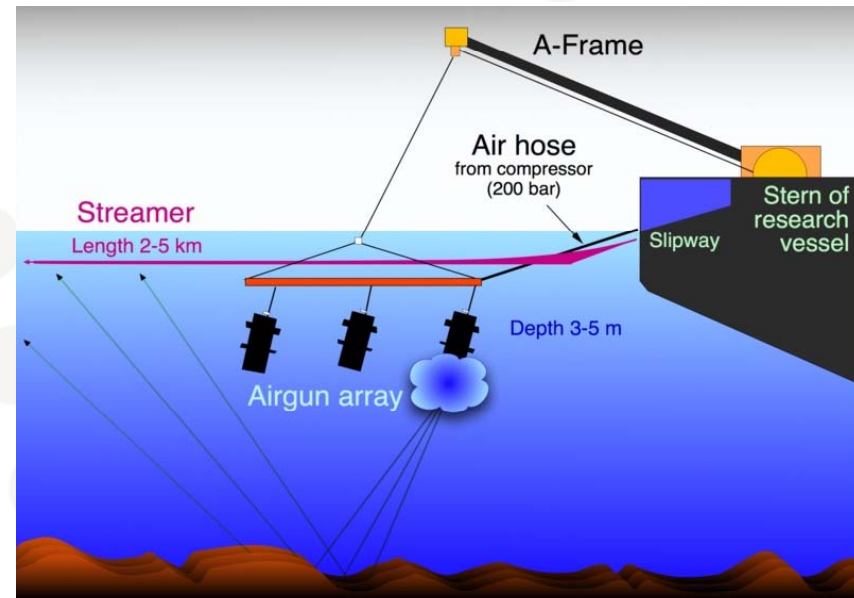


Fig. 10. Reverberations in the water layer where ray paths have been drawn as slanted lines in order to illustrate time dependence [33].

Etterklang mellom vann-bunn i marin seismikk

Wood, L.C.; Treitel, S., "Seismic signal processing," Proc IEEE, April 1975

3. september 2012



Luftkanonen har en pulsform som 'farger' ekko fra sedimentene  $\Rightarrow$  fjernes ved inversfilter

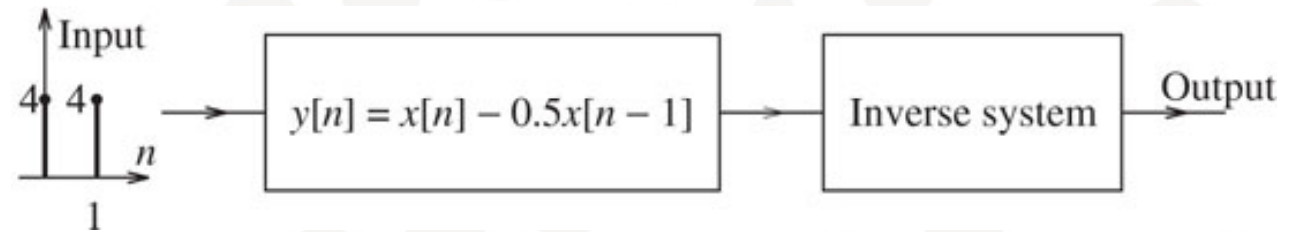
Wikipedia commons: Airgun-array hg.png

47

# Inverse systemer

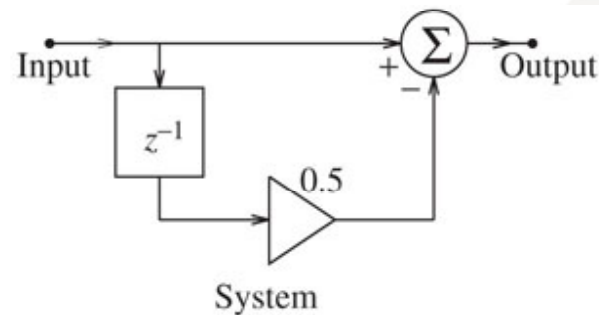
- Bytte om inngangs- og utgangs-variable

**FIGURE E.3.16.a(1)**  
The interconnected system for Example 3.16(a)

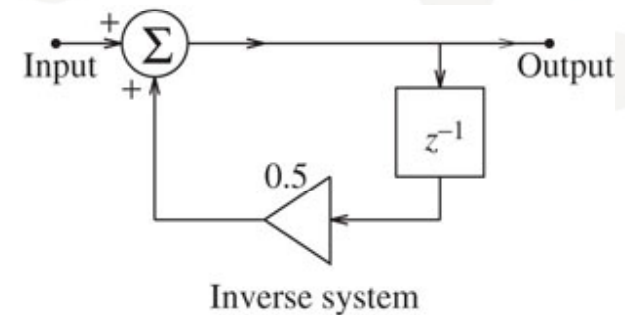


FIR:

**FIGURE E.3.16.a(2)**  
Realization of the system and its inverse for Example 3.16(a)



IIR: Speilet og med snudd fortegn på tilbakekobling



# Inverse systemer

- System  $y[n] = x[n] - 0.5x[n-1]$
- Hypotese: invers er  $x[n] = y[n] - 0.5y[n-1]$
- Impulsrespons av system 1:  $h_1[n] = \delta[n] - 0.5\delta[n-1]$
- Send dette inn på system 2:  $y[n] = 0.5y[n-1] + x[n]$ 
  - $y[0] = 0.5 \cdot 0 + 1 = 1$
  - $y[1] = 0.5 \cdot 1 + (0 - 0.5) = 0$
  - $y[2] = 0.5 \cdot 0 + (0 - 0) = 0$  osv
  - $y[n] = \delta[n]$ , det samme som ble sendt inn på filter 1
- Så  $x[n] = y[n] - 0.5y[n-1]$  er det inverse filteret

# Inverse filtre – betingelser for inverterbarhet

- Et FIR filter kan alltid inverteres til et IIR filter, men ikke alltid motsatt
  - Se drill problem 3.20b
- Systemet må være entydig: forskjellige inngangsverdier må gi forskjellige utgangsverdier
  - Ikke-lineært system  $y[n]=x[n]^2$  er ikke entydig
  - Desimeringssystem  $y[n]=x[2n]$  er lineært, men ikke tidsinvariant
    - $x_1=\{1,2,4,5\}$  og  $x_2=\{1,3,4,8\}$  gir begge  $y[n]=\{1,4\}$  – ikke entydig