INF3470 Digital signalbehandling

Tidsdomene analyse (kap 3 – del 2)

Sverre Holm

UNIVERSITETET I OSLO

3.9 Diskret konvolusjon

- Metode for å finne responsen fra et filter med 0 initialbetingelser, fra impulsresponsen h[n]
- Enkelt konsept:
  - $\delta[n] \Rightarrow h[n]$
  - Har tidligere vist dekomponering: $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$
  - Linearitet og tidsinvarians betyr:
    - Linearitet: $x[0]\,\delta[n] \Rightarrow x[0]h[n]$
    - Tidsinvarians: $x[1]\,\delta[n-1] \Rightarrow x[1]h[n-1]$
    - Generelt for LTI: $x[k]\,\delta[n-k] \Rightarrow x[k]h[n-k]$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

  - Betegnelse for konvolusjon: y[n]=x[n]*h[n]

Konvolusjon

- Kalles lineær konvolusjon eller konvolusjonssum
- Kan snu om på indeksene (kommutativ):

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

- Altså y[n]=x[n]*h[n]=h[n]*x[n]

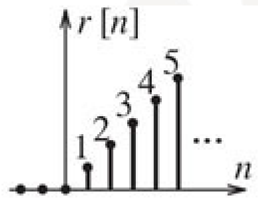
- Enkel å regne ut på direkten for enkle x og h, særlig hvis de inneholder sprangfunksjonen u[n] da den bare betyr en begrensning av indeksene i summen

Analytisk evaluering av konvolusjon (u[n])

- Myk start på beregning av konvolusjon!
- Eks 3.19a) x[n]=h[n]=u[n]

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$\Rightarrow u[n]\star u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]u[n-k] = \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)u[n] = r[n+1]$$



- r[n] er rampe-funksjonen
  - Plottet viser r[n]; merk at r[n+1] starter på n=0
- Altså u[n]*u[n] = r[n+1] (skal brukes senere)

Analytisk evaluering av konvolusjon (u[n])

- Eks 3.19d) x[n]=u[n-1], h[n]=α^n u[n-1]

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$ (sparer litt arbeid på å snu summen)

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[k-1]u[n-1-k] = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^k$$

$$= \alpha \sum_{k=0}^{n-2} \alpha^k = \alpha \frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha} u[n-2] = \frac{\alpha - \alpha^n}{1-\alpha} u[n-2]$$

Asymptotisk: n $\rightarrow \infty \Rightarrow$ y $\rightarrow \alpha/(1-\alpha)$ for $|\alpha|<1$

3.10 Egenskaper ved konvolusjon

- Basert på linearitet og tidsinvarians
- Definisjon

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

1. Skift av x[n] eller h[n] $\Rightarrow$ skift i y[n]
   - $x[n-n_0]*h[n]=x[n]*h[n-n_0] = y[n-n_0]$
2. Sample sum:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] = (\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n])(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n])$$

- Ganske rett fram å se ved å sette inn formelen

Flere egenskaper ved konvolusjon

3. Kausale h[n] og x[n] (begge oppfylt):

$$y[n] = x[n]*h[n] = h[n]*x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

- Betyr at y[n] også blir kausal

4. To venstre-sidige sekvenser $\Rightarrow$ venstresidig y[n]
5. To høyre-sidige sekvenser $\Rightarrow$ høyresidig y[n]

Konvolusjon og impulser og sprang

- Impulser:
  - δ[n]*x[n]=x[n], et filter med h[n]=δ[n] er jo trivielt
  - δ[n]*δ[n]=δ[n], følger av resultatet over

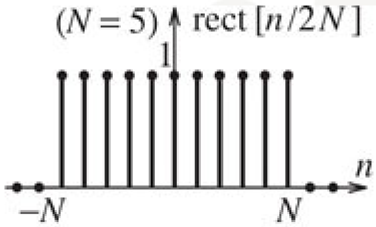
- Sprang-funksjonen: y[n]=x[n]*u[n]

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

  - Løpende sum over x[n], tids-diskret integrasjon

Konvolusjon med firkantfunksjon

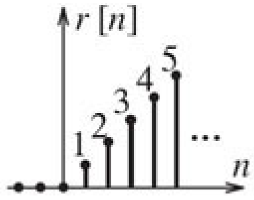
- Hva er rect(n/2N) uttrykt ved sprang?



- Svar: rect(n/2N) =u[n+N]-u[n-N-1]

Konvolusjon med firkantfunksjon (1)

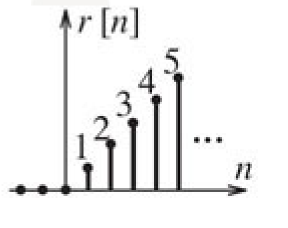
- Hva er rect(n/2N)*rect(n/2N)?
- Uttrykt ved sprang:
  - rect(n/2N)*rect(n/2N) =
    (u[n+N]-u[n-N-1]) * (u[n+N]-u[n-N-1])
- Bruker egenskapen: u[n]*u[n]=r[n+1] (eks 3.19a)

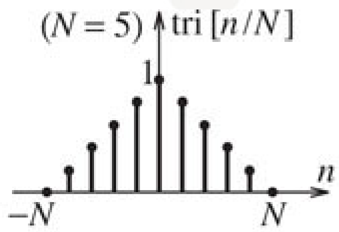


- Skift-egenskapen: $x[n-n_0]*h[n]=x[n]*h[n-n_0] = y[n-n_0]$
  - Ledd 1: u[n+N]* u[n+N] = r[n+2N+1]
  - Ledd 2: u[n+N]* (-u[n-N-1]) = -r[n+1+N-N-1]=-r[n]
  - Ledd 3: (-u[n-N-1]) * u[n+N] = -r[n+1-N-1+N]=-r[n]
  - Ledd 4: -u[n-N-1]*(-u[n-N-1]) = r[n+1-2N-2]=r[n-2N-1]
- Altså:
  rect(n/2N)*rect(n/2N) = r[n+2N+1]] - 2r[n] + r[n-2N-1]

Konvolusjon med firkantfunksjon (2)

- Har funnet rect(n/2N)*rect(n/2N) =
  r[n+2N+1]] - 2r[n] + r[n-2N-1]
- Tolkning:
  - Rampe som starter ved n=-2N-1
    - Når verdien 2N+1 i n=0
  - Trekk fra 2*rampe som starter i n=0
    - Når verdien 0 i n=2N+1
  - Legg til en rampe som starter i n=2N+1
    - Kansellerer de to andre rampene
  - Totalt: en trekantfunksjon
    (2N+1)tri(n/(2N+1))
  - Nyttig resultat da rect() og tri() er vanlige vindusfunksjoner

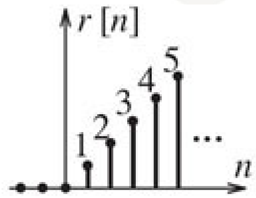


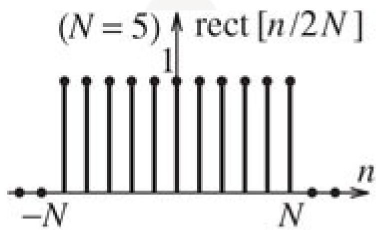


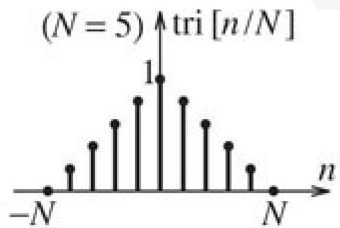
3.11 Konvolusjon av endelige sekvenser

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

- Huskeregler:
  - Startindeksen til y = summen av startindeksene til x og h
  - Sluttindeksen til y = summen av sluttindeksene til x og h
  - Lengden til y, er gitt av lengdene til x og h: $L_y = L_x + L_h - 1$
  - Sjekk dette på følgende eksempler:
    - $\delta[n]*\delta[n]=\delta[n]$
    - u[n]*u[n]=r[n+1]
    - rect(n/2N)*rect(n/2N) = (2N+1)tri(n/(2N+1))







Konvolusjon: Speil, skift, multipliser og sum

- Gå ut fra siste uttrykk:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

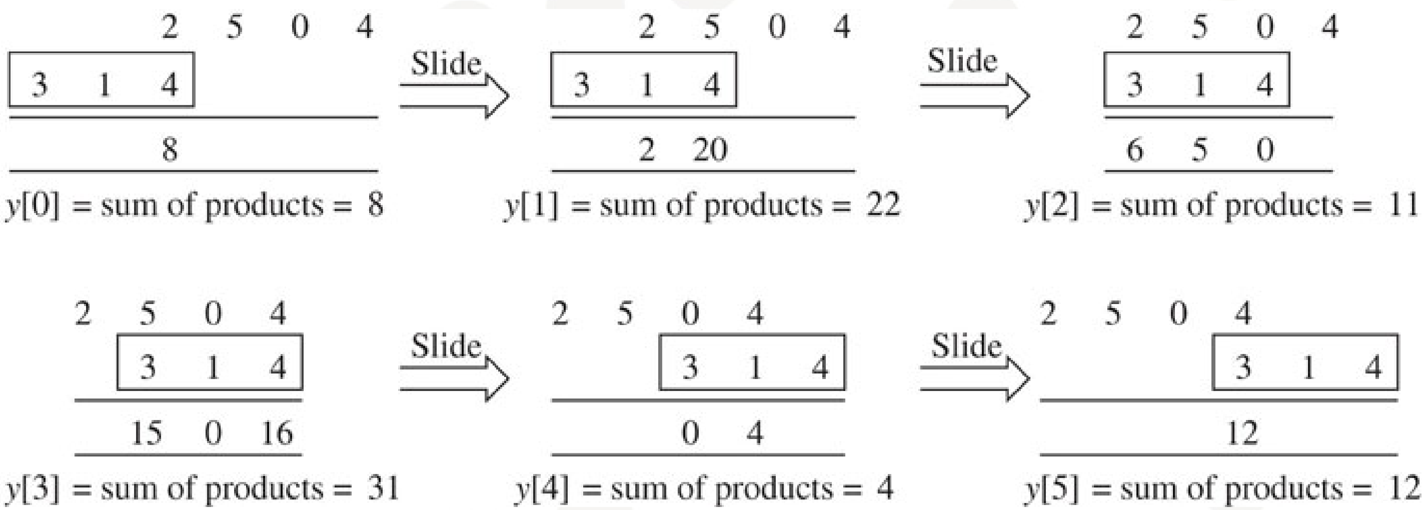
  - Speil x[n] $\Rightarrow$ x[-n]
  - Skift den så siste sample havner over første sample i h[k]
  - Flytt så x[-n] ett og ett sample til høyre og multiplikasjon og sum
- Den mest generelle betraktningen av konvolusjon
- Matlab: dconvdemo.m

Eks 3.22: Speil, skift, multipliser og sum

- h[n]={$\underline{2}$,5,0,4}, x[n]={$\underline{4}$,1,3}
  - Speil x[n] $\Rightarrow$ x[-n]={3,1,$\underline{4}$}

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

FIGURE E.3.22 The discrete signals for Example 3.22 and their convolution



- y[n]={$\underline{8}$,22,11,31,4,12}
- Sjekk:
  - Lengde: 4+3-1=6: OK
  - Starter i 0 som x og h: OK

Konvolusjon, triks

- Konvolusjon av sekvenser av endelig lengde ⇔multiplikasjon av polynomer
  - $h[n]=\{\underline{1},1,3\}$, $x[n]=\{1,0,2\}$ $\Rightarrow$ $y[n]=\{\underline{1},1,5,2,6\}$
  - Skriv som polynommultiplikasjon: $(1x^2+1x+3)(1x^2+0x+2)= (x^2+x+3)(x^2+2)=$ $x^4+x^3+(2+3)x^2+2x+6 = \underline{x^4+x^3+5x^2+2x+6}$

- Denne egenskapen kan brukes til å vise følgende triks med nullinnsetting og nullutvidelse

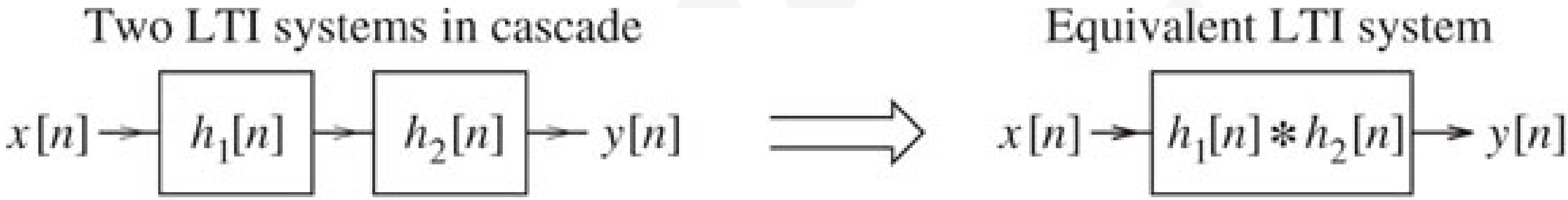
Konvolusjon, triks

1. Innsetting av null i begge sekvenser ⇒ nuller i konvolusjon
   - $\{\underline{1},2\}*\{\underline{3},1,4\} = \{\underline{3},7,6,8\}$
   - Da blir $\{\underline{1},0,0,2\}*\{\underline{3},0,0,1,0,0,4\} = \{\underline{3},0,0,7,0,0,6,0,0,8\}$

2. Nullutvidelse (zero-padding) av en sekvens ⇒ nullutvidelse av konvolusjonen:
   - $x[n]*h[n]=y[n]$
   - Da blir $\{0,0,x[n],0,0\}*\{h[n],0\} = \{0,0,y[n],0,0,0\}$
   - Foranstilte nuller kommer ut foran y[n]
   - Bakstilte nuller kommer ut bak y[n]

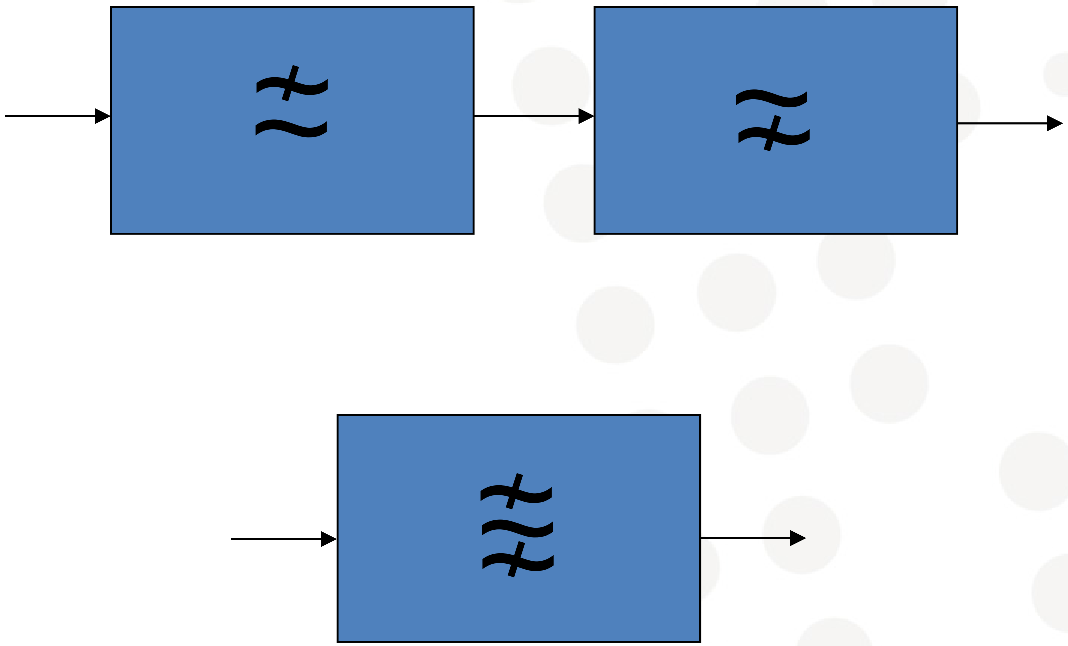
Serie-kopling av filtre

- Ut av første filter: $y_1[n]=x[n]*h_1[n]$
- Ut av andre filter: $y[n]=y_1[n]*h_2[n] =$
  $(x[n]*h_1[n])* h_2[n] = x[n]*(h_1[n]* h_2[n])$



- Et nytt filter: $h[n]= h_1[n]*h_2[n]$
- Assosiativ lov: $x*(h_1*h_2) = (x*h_1)*h_2$
- Generaliseres enkelt til mange filtre i serie

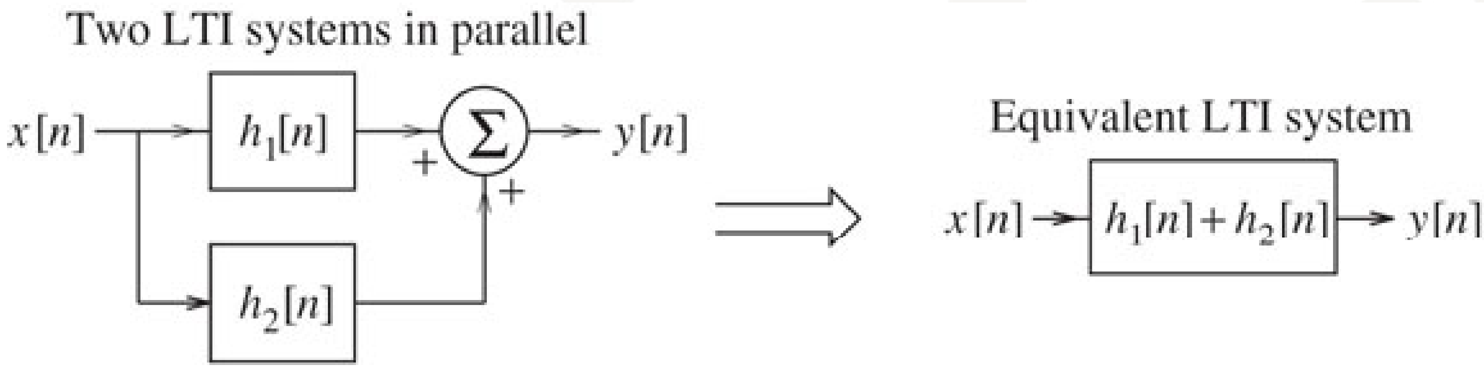
Eks: lavpass + høypass => båndpassfilter



- Men bare hvis passbåndene overlapper!

Parallell-kopling av filtre

- Parallell-kopling ⇔ $h[n]=h_1[n]+h_2[n] + \dots +h_N[n]$



- Distributive lov $x*(h_1 + h_2) = x*h_1 + x*h_2$

3.12 Stabilitet

- BIBO stabilitet: Bounded-input, bounded-output
  - Alle signaler som har endelige verdier skal gi en utgang med endelige verdier
- FIR: spesielt enkelt da veiet sum av inngang med endelige verdi aldri kan bli ∞
  - FIR filtre er alltid stabile
  - En av fordelene med FIR

Stabilitet

- LTI systemer beskrevet med differanselikninger:
  - Nødvendig og tilstrekkelig betingelse er at røttene til den karakteristiske likningen har tallverdi < 1
  - Mer om dette når vi kommer til z-transformen
- LTI systemer beskrevet med impulsrespons:
  - La |x[n]| < M, da er også |x[n-k]| < M
  - Da er konvolusjonssummen $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \Rightarrow$

$$|y[n]| < \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]| < M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

  - Altså er det nok at |h[n]| må være absolutt summerbar for BIBO stabilitet

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

3.12 Kausalitet

- Ingen utgang før det kommer noen inngang
  - Årsak $\Rightarrow$ virkning
  - Systemet kan ikke gjette fremtiden
- $\Leftrightarrow$ h[n]=0 for n<0
  - Fra tidligere: Startindeksen til y = summen av startindeksene til x og h
  - Så da starter y[n] tidligst på samme tid som x[n]

Eks 3.25b

- $y[n]-y[n-1]=x[n]$
- La $x[n]=u[n]$, (endelig i verdi) og $y[-1]=0$
- $y[n] = u[n] + y[n-1]$
  - $y[0] = 1$ – *kausalt* da det ikke er utgangsverdier før inngangen starter
  - $y[1] = 1+1 = 2$
  - $y[2] = 1+1+1 = 3$
  - ... $y[n] = (n+1)u[n] \rightarrow \infty$
  - *Ustabilt*

Eks 3.25g

- $h[n]=(-0.5)^n\ u[n]$
- Kausalt?
  - Ja, da h[n] starter på n=0
- Stabilt?

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} |-(0.5)^n| = \sum_{k=0}^{\infty} (0.5)^n = \frac{1}{1-0.5} = 2 < \infty$$

  - Ja

Eks 3.25h

- $y[n] - 0.5y[n-1] = nx[n]$
  - Tidsvarierende (neste ukes øving)
  - Kausalt
  - Stabilt?
    - La input være $u[n]$ (endelig i verdi)
    - Da blir $y[n] = nu[n] + 0.5y[n-1] = r[n] + 0.5y[n-1]$
    - Første ledd vokser over alle grenser
    - Ustabilt

Mål for kapittel 3: Systemer

1. Forstå linearitet, superposisjon, tidsinvarians og kausalitet
2. Vite hvordan å identifisere LTI (lineære tidsinvariante) systemer
3. Forstå terminologi og klassifisering av digitale filtre
4. Vite hvordan å sette opp en realisering av filtre
5. Vite at en differanseligning har to responser, en fra initialbetingelser og en fra input

Mål for kapittel 3: Systemer

6. Vite hvordan å finne impulsresponsen til et LTI system fra differanseligningen
7. Vite hvordan å konvertere mellom differanse-ligningen for et system og impulsresponsen
8. Vite hvordan å finne konvolusjon mellom sekvenser av endelig lengde
9. Vite hvordan å bruke definisjonen til å finne konvolusjon
10. Forstå egenskapene til konvolusjon og vite hvordan å bruke dem for å løse problemer

Mål for kapittel 3: Systemer

11. Vite hvordan å finne impulsresponsen til systemer i kaskade og i parallell
12. Forstå stabilitetsbegrepet
13. Vite hvordan å bestemme stabilitet fra differanseligning og impulserespons
14. *Forstå periodisk konvolusjon og hvordan å finne den for to signaler*
15. *Vite hvordan å finne krysskorrelasjon og autokorrelasjon*
16. *Forstå sammenhengen mellom konvolusjon og transform-metoder*