UiO : University of Oslo

Uke 4: z-transformasjonen

Jo Inge Buskenes

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

INF3470/4470, høst 2012

Dagens temaer

z-dometet; ett av tre domener

z-transformasjonen; definisjon og egenskaper

$H(z)$; systemfunksjonen og implementasjoner

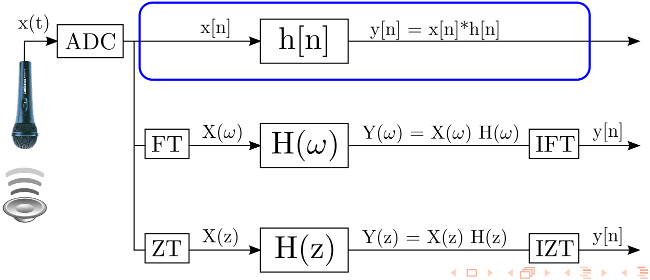
Tema

z-dometet; ett av tre domener

3 domener

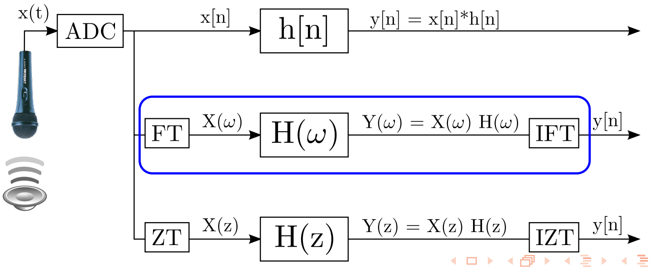
Digitale systemer kan analyseres i tids-, frekvens- eller z-domenet...

1. **Tidsdomenet**, eller *n*-domenet:
   - Domenet for sekvenser, impulsresponser og differens likninger.
   - Signaler er generert og prosessert i dette domenet.
   - Filtre er implementert i dette domenet.



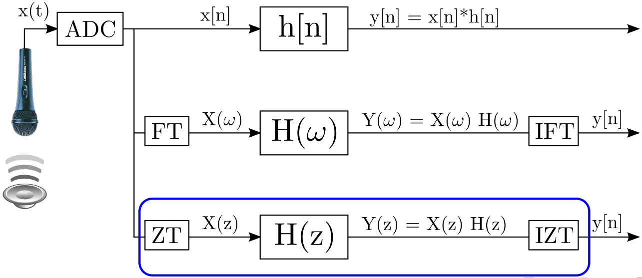
3 domener

- Vi kan analysere digitale systemer i tre forskjellige domener:
  - Ω-domain eller frekvensdomenet
    - Domenet for frekvensresponsen & spektrumrepresentasjon, og tolking av disse!
    - Viktig for analyse av f.eks lyd, men sjelden benyttet til implementasjon (i HW).
    - Blir behandlet senere i kurset



3 domener

- Vi kan analysere digitale systemer i tre forskjellige domener:
  - *z*-domenet
    - Domenet for *z*-transformasjonen, operatorer, poler & nullpunkter.
    - Eksisterer primært fordi det muliggjør en matematisk analyse & syntese.



Hvorfor flere domener???

- Vanskelige analyser i et domene *kan* være enklere i et annet domene ...
- Flere domener *kan* gi bedre innsikt ...
- Eksempel:
  Finne responsen $y[n]$ til et inngangssignal $x[n]$ som passerer gjennom et LTI-system: $x[n] \rightarrow \boxed{\text{h[n]}} \rightarrow y[n]$
  - n-domenet: Her må vi bruke konvolusjon (en krevende operasjon).
  - I z-domentet: Reduseres til polynomsk multiplikasjon.

  Stabilitet:
  - n-domenet: Bounded Input Bounded Output (BIBO) - dvs. dersom $|y[n]| < B$ for alle $x[n]$, der B er en endelig verdi.
  - z-domenet: Dersom enhetssirkelen ligger i "Region of Convergence" (mer om dette snart).

  Kausalitet
  - n-domenet: Kun benytte tidligere og nåtids sampler.
  - z-domenet: Alle poler innenfor enhetssirkelen.

Tema

z-transformasjonen; definisjon og egenskaper

- Definisjon
- ROC
- Et lite case
- Egenskaper

Definisjon av z-transformasjonen

- $X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$,
  hvor $z = r e^{\jmath 2\pi F} = r e^{\jmath \Omega}$ er en kompleks variabel.
- En uendelig potensrekke; eksisterer kun for de verdiene av z hvor rekken konvergerer
  $\Rightarrow$ Region Of Convergence (ROC);
  den mengen av argumenter hvor $X(z)$ antar en endelig verdi.
- Notasjon:

$$x[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z)$$

$$x[n] \Leftarrow \boxed{\mathrm{ZT}} \Rightarrow X(z)$$

Definisjon av z-transformasjonen

- $X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$,
  hvor $z = re^{j2\pi F} = re^{j\Omega}$ er en kompleks variabel.
- En uendelig potensrekke; eksisterer kun for de verdiene av z hvor rekken konvergerer
  $\Rightarrow$ Region Of Convergence (ROC);
  den mengen av argumenter hvor $X(z)$ antar en endelig verdi.
- Notasjon:
  $$x[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z)$$
  $$x[n] \Leftarrow \boxed{\text{ZT}} \Rightarrow X(z)$$

- $x[n] = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4, 3, 2, 1\}$
  Skisser!!!
- $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{6} x[n]z^{-n}$$
  $$= 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 3z^{-4} + 2z^{-5} + 1z^{-6}, \quad z \in \mathscr{C}.$$
- Forskjellige måter å skrive en vinkel θ på (hva betyr Ω i $z = re^{j\Omega n}$?):

$$\theta = \omega t = 2\pi f t$$
$$\Downarrow \text{digital konvertering, } t = T_s n$$
$$= 2\pi f T_s n = 2\pi \frac{f}{F_s} n$$
$$= 2\pi F n = \Omega n$$

t	[s]	Tid
n		Samplenummer
f	[Hz]	Signalets frekvens
T_s	[s]	Samplingsperiode
F_s	[s^{-1}]	Samplingsfrekvens
F		Normalisert frekvens
Ω	[rad]	Normalisert vinkelfrekvens

Definisjon av z-transformasjonen ...

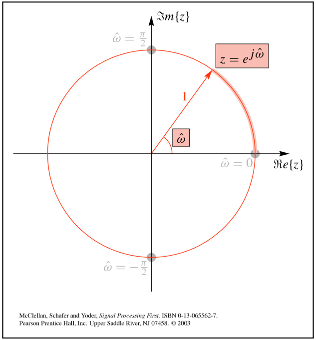
- z-transformasjonen er en funksjon av en kompleks variabel; illustreres i det komplekse z-planet.

- $$z^{-n} = r\,e^{-j2\pi f T_s n} = r\,e^{-j2\pi \frac{f}{f_s} n} = re^{-j\Omega n}$$

- z-transformasjonen evaluert på enhetssirkelen tilsvarer DTFT (tema for kapittel 5):

$$X(e^{j\Omega}) = X(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

- Hvis DTFT'en eksisterer, så ligger enhetssirkelen i ROC



Drill problem 4.2

(a) $x[n] = 0.5^n\, u[n]$. Finn z-transformen $X(z)$ og dens ROC.

(b) $y[n] = (-0.5)^n\, u[n]$. Finn z-transformen $Y(z)$ og dens ROC.

(c) $g[n] = -(0.5)^n\, u[-n-1]$. Finn z-transformen $G(z)$ og dens ROC.

Drill problem 4.2

(a) $x[n] = 0.5^n u[n]$. Finn z-transformen $X(z)$ og dens ROC.
(b) $y[n] = (-0.5)^n u[n]$. Finn z-transformen $Y(z)$ og dens ROC.
(c) $g[n] = -(0.5)^n u[-n-1]$. Finn z-transformen $G(z)$ og dens ROC.

(a)
$$\begin{aligned}
x[n] &= (0.5)^n u[n] = \delta[n] + .5\delta[n-1] + (.5)^2\delta[n-2] + \cdots \\
X(z) &= z^0 + (.5)z^{-1} + (.5)^2 z^{-2} + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (.5)^n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (.5)^n (z-1)^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (.5z^{-1})^n = \frac{1}{1-.5z^{-1}} = \frac{z}{z-.5} \quad \text{ROC:} |.5z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > .5
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
y[n] &= (-0.5)^n u[n] = \delta[n] - .5\delta[n-1] + (.5)^2\delta[n-2] + \cdots \\
Y(z) &= z^0 - (.5)z^{-1} + (.5)^2 z^{-2} + \cdots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-.5)^n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-.5)^n (z-1)^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-.5z^{-1})^n = \frac{1}{1-(-.5)z^{-1}} = \frac{z}{z+.5} \quad \text{ROC:} |-.5z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > .5
\end{aligned}$$

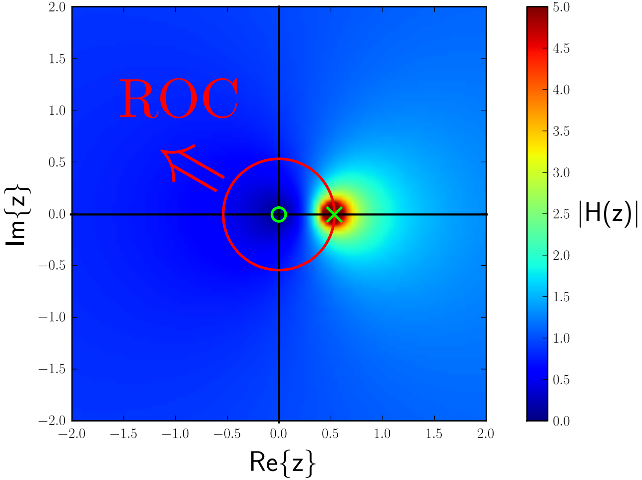
(c)
$$\begin{aligned}
g[n] &= -(0.5)^n u[-n-1] = \delta[n] - .5\delta[-n-1] + (.5)^{-2}\delta[-n-2] + \cdots = \{\cdots, -8, -4, -2, \underset{\uparrow}{0}, 0, \\
G(z) &= = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -(.5)^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (.5^{-1}z^1)^{-n} \\
(m=-n) &= -\sum_{m=1}^{\infty} (.5^{-1}z)^m = -\sum_{k=0}^{\infty} (.5^{-1}z)^{k+1} = -(.5^{-1}z)\sum_{k=0}^{\infty} (.5^{-1}z)^k \\
&= \frac{-.5^{-1}z}{1-.5^{-1}z} = \frac{z}{-.5+z} = \frac{z}{z-.5} \quad \text{ROC:} |-.5^{-1}z| < 1 \Leftrightarrow |z| < .5
\end{aligned}$$

Visual presentation of Drill problem 4.2 a

$$h[n] = 0.5^n u[n]$$

$$H(z) \overset{*}{=} \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} = \frac{z}{z - 0.5}$$

*ROC : $|z| > 0.5$



ROC

- Gitt endelig lengde sekvens $x[n]$. Da er $X(z)$ et polynom i z eller z^{-1} ($X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}$) som konvergerer for alle z bortsett fra
  - i $z = 0$, hvis $X(z)$ inneholder ledd på formen z^{-n}
  - i $z = \infty$, hvis $X(z)$ inneholder ledd på formen z^n

  $\Longrightarrow X(z)$ endelig for hele planet med mulig untak for $z = 0$ og $z = \infty$.
- Mer generelt, så er $X(z)$ en rasjonell funksjon:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

ROC

- Gitt endelig lengde sekvens $x[n]$. Da er $X(z)$ et polynom i z eller z^{-1} ($X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}$) som konvergerer for alle z bortsett fra
  - i $z = 0$, hvis $X(z)$ inneholder ledd på formen z^{-n}
  - i $z = \infty$, hvis $X(z)$ inneholder ledd på formen z^{n}

  $\Longrightarrow X(z)$ endelig for hele planet med mulig untak for $z = 0$ og $z = \infty$.
- Mer generelt, så er $X(z)$ en rasjonell funksjon:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

ROC er viktig – 1/2 uttelling på eksamen!
Henger sammen med poler og kausalitet/anti-kausalitet.

Rasjonelle funksjoner ikke tatt ut av det blå!
Gitt $y[n] = h[n] * x[n]$ fås $Y(z) = H(z)X(z)$ og $H(z) = Y(z)/X(z)$

Videre: $y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$ gir

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}.$$

Rasjonell z-transformasjon

- $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}.$
- Hvis $a_0 \neq 0$ og $b_0 \neq 0$, så kan vi ungå negative eksponenter av z ved å faktorisere ut leddene $b_0 z^{-M}$ og $a_0 z^{-N}$:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^{-M}}{a_0 z^{-N}} \frac{z^M + (b_1/b_0) z^{M-1} + \cdots + b_M/b_0}{z^N + (a_1/a_0) z^{N-1} + \cdots + a_N/a_0}$$

$$= \frac{b_0 z^{-M}}{a_0 z^{-N}} \frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}$$

$$= \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{\Pi_{k=1}^{M}(z-z_k)}{\Pi_{k=1}^{N}(z-p_k)}$$

Rasjonell z-transformasjon ...

- $X(z) = \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{\Pi_{k=1}^{M}(z-z_k)}{\Pi_{k=1}^{N}(z-p_k)}$
  - M endelige nullpunkt $z = z_1, z_2, \ldots, z_M$.
  - N endelige poler $z = p_1, p_2, \ldots, p_M$.
  - $|N - M|$ nullpunkt (hvis $N > M$) eller poler (hvis $N < M$) i origo $z = 0$.
  - Poler og nullpkt kan forekomme i $z = \infty$. Et nullpkt eksisterer i $z = \infty$ hvis $X(\infty) = 0$ og en pol eksisterer i $z = \infty$ hvis $X(\infty) = \infty$.
  - Teller vi med alle poler og nullpunkter i origo og uendelig, finner vi at $X(z)$ har like mange poler som nullpunkter.
  - ROC kan ikke inneholde poler!
  - Hvis alle poler/nullpkt er kjent kan vi bestemme $X(z)$ på en konstant nær $(\frac{b_0}{a_0})$.

ROC ...

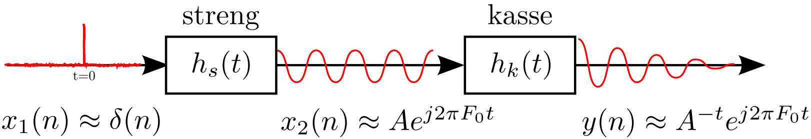
- ROC generelt en annulus på formen $\alpha < |z| < \beta$.
  - Hvis $\alpha = 0$, kan ROC også inneholde punktet $z = 0$.
  - Hvis $\beta = \infty$, kan ROC også inneholde punktet $z = \infty$.
- Endelig tid signaler
  - Kausal: Hele z-planet untatt $z = 0$.
  - Anti-kausal: Hele z-planet untatt $z = \infty$.
  - Tosidig: Hele z-plane untatt $z = 0$ og $z = \infty$.
- Uendelig lengde signaler
  - Kausal: $\alpha < |z|$
  - Anti-kausal: $|z| < \beta$
  - Tosidig: $\alpha < |z| < \beta$

Et lite case for å få i gang hodecellene..

Hva skjer når vi "slår på strengen" til en gitar?

⇒ Vi får et signal med en frekvens (og litt av noen harmoniske) som dør ut med tiden...

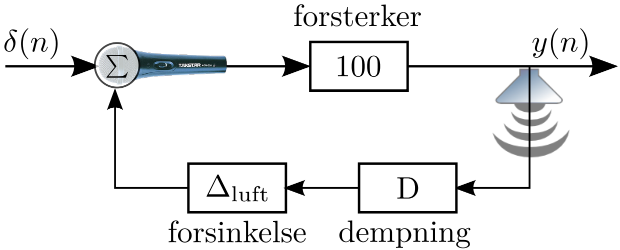
De viktigste "systemene" her er strengen og gitarkassa:



- Hvordan tror du $h_s(t)$ og $h_k(t)$ vil se ut her?
- Er dette 'FIR' eller 'IIR' filtre?
- Hva med kausalitet og lineæritet?

Et annet case..

Hvorfor får man av og til 'pipelyd' i høytalerne på en scene?



- For hvilke verdier av D er dette systemet stabilt?
- Hvis det er stabilt, hvordan vil $y[n]$ da se ut?
- Hvorfor kan dette systemet bli ustabilt, men ikke gitaren?

Kort oppsummert så langt..

- z-transformen er primært brukt til å forstå og designe IIR filtre / rekursive systemer...
- z-domenet spennes ut av *normalisert frekvens* $\Omega = 2\pi\frac{f}{F_s}$, og et forsterkningsfaktor r.
- z-transformen for et vilkårlig signal $x[n]$ (også impulsresponser) er gitt ved:
  1. $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} \Rightarrow$ En geometrisk rekke av komplekse polynomer
  2. En slik rekke s kan skrives som
     $$X(z) = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \overset{\substack{n\to\infty \\ |r|<1}}{=} \frac{a}{1-r}.$$
  3. ROC er de verdier for z som gjør at rekka konvergerer, dvs. som gir $|r| < 1$.

Egenskaper til z-transformasjonen

- **Linearitet**:
  $Z\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$
  ROC: minst $\text{ROC}_{x1} \cap \text{ROC}_{x2}$.
- **Skifting i tid**:
  $Z\{x[n - n_0]\} = z^{-n0}X(z)$
  $\text{ROC} = \text{ROC}_x$, med mulig untak at punktene $z = 0$ $z = \infty$ kan legges til eller fjernes.
- **Skifting i frekvens**:
  $Z\{a^n x[n]\} = X(\frac{z}{a})$
  $\text{ROC} = \text{ROC}_x$ skalert med $|a|$.

Egenskaper til z-transformasjonen

- **Linearitet**:
  $Z\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$
  ROC: minst $\mathrm{ROC}_{x1} \cap \mathrm{ROC}_{x2}$.
- **Skifting i tid**:
  $Z\{x[n-n_0]\} = z^{-n0} X(z)$
  $\mathrm{ROC} = \mathrm{ROC}_x$, med mulig untak at punktene $z = 0$ $z = \infty$ kan legges til eller fjernes.
- **Skifting i frekvens**:
  $Z\{a^n x[n]\} = X(\frac{z}{a})$
  $\mathrm{ROC} = \mathrm{ROC}_x$ skalert med $|a|$.

Linearitet: En viktig egenskap som sikrer at all informasjon om signalet bevares. Lineære transformer kan inverteres. Er lineært system er

- *homogent*, dvs. da vil $y[n] \propto x[n]$ og $Y(z) \propto X(z)$, og
- *additivt*, dvs. $x_1[n] + x_2[n] = y_1[n] + y_2[n]$ og $X_1(z) + X_2(z) = Y_1(z) + Y_2(z)$.

Bevis homogent:

$$Z\{a\,x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a\,x[n]z^{-n} = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = a\,X(z) \tag{1}$$

Bevis additivt:

$$\begin{aligned} Z\{x_1[n] + x_2[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(x_1[n] + x_2[n]\Big) z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]z^{-n} \end{aligned}$$

Egenskaper til z-transformasjonen

- **Linearitet**:
  $Z\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$
  ROC: minst $\mathrm{ROC}_{x1} \cap \mathrm{ROC}_{x2}$.
- **Skifting i tid**:
  $Z\{x[n - n_0]\} = z^{-n0} X(z)$
  $\mathrm{ROC} = \mathrm{ROC}_x$, med mulig untak at punktene $z = 0$ $z = \infty$ kan legges til eller fjernes.
- **Skifting i frekvens**:
  $Z\{a^n x[n]\} = X(\frac{z}{a})$
  $\mathrm{ROC} = \mathrm{ROC}_x$ skalert med $|a|$.

Shifting i tid: z-transformasjonen tillegger sampler en fase som forteller hvor de er i forhold til hverandre i tid.

$$
\begin{aligned}
Z\{x[n-n_0]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]\, z^{-n} \qquad\qquad m = n - n_0 \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, z^{-m}\, z^{-n_0} \\
&= z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, z^{-m} \\
&= z^{-n_0}\, X(z) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Summasjonen er upåvirket $\rightarrow$ ROC forblir den samme, med mulig unntak for å legge til eller fjerne punktene $z = 0$ og $z = \infty$.

Egenskaper til z-transformasjonen

- **Linearitet**:
  $Z\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$
  ROC: minst $\text{ROC}_{x1} \cap \text{ROC}_{x2}$.
- **Skifting i tid**:
  $Z\{x[n-n_0]\} = z^{-n0} X(z)$
  $\text{ROC} = \text{ROC}_x$, med mulig untak at punktene $z = 0$ $z = \infty$ kan legges til eller fjernes.
- **Skifting i frekvens**:
  $Z\{a^n x[n]\} = X(\frac{z}{a})$
  $\text{ROC} = \text{ROC}_x$ skalert med $|a|$.

Shifting i frekvens:

$$Z\{\alpha^n\, x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n\, x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{-n}$$

$$\begin{aligned} x[n] &\overset{z}{\leftrightarrow} X(z) && \text{ROC} : a < |z| < b \\ \alpha^n x[n] &\overset{z}{\leftrightarrow} X(\frac{z}{\alpha}) && \text{ROC} : |\alpha| a < |z| < |\alpha| b \end{aligned}$$

Multiplikasjon i tid med en eksponent Spesialtilfelle: $\alpha^n = e^{j\Omega_0 n}$ (gir rotasjon i z-planet!)

$$Z\{e^{-j\Omega_0 n}\, x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\Omega_0 n}\, x[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, \left(z\, e^{j\Omega_0}\right)^{-n} \tag{4}$$

Egenskaper til z-transformasjonen ...

- **Tidsreversering**:
  Hvis $\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z)$ ROC : $r_1 < |z| < r_2$
  så er $\mathcal{Z}\{x[-n]\} = X(z^{-1})$ ROC : $1/r_2 < |z| < 1/r_1$
- **Derivering i z-domenet**:
  $\mathcal{Z}\{nx[n]\} = -z\frac{dX(z)}{dz}$ ROC = ROC$_x$.
- **Konvolusjon av to sekvenser**:
  $\mathcal{Z}\{x_1[n] * x_2[n]\} = X_1(z)X_2(z)$ ROC : ROC$_{x1} \cap$ ROC$_{x2}$.

  ROC kan være større hvis det forekommer pol-nullpkt kansellering i produktet $X_1(z)X_2(z)$.

Egenskaper til z-transformasjonen ...

- **Tidsreversering**:
  Hvis $Z\{x[n]\} = X(z)$ ROC : $r_1 < |z| < r_2$
  så er $Z\{x[-n]\} = X(z^{-1})$ ROC : $1/r_2 < |z| < 1/r_1$
- **Derivering i z-domenet**:
  $Z\{nx[n]\} = -z\frac{dX(z)}{dz}$ ROC = ROC_x.
- **Konvolusjon av to sekvenser**:
  $Z\{x_1[n] * x_2[n]\} = X_1(z)X_2(z)$ ROC : $\text{ROC}_{x1} \cap \text{ROC}_{x2}$.

  ROC kan være større hvis det forekommer pol-nullpkt kansellering i produktet $X_1(z)X_2(z)$.

Tidsreversering: Hvis likesymmetri, $x[n] = x[-n]$:

$$Z\{x[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]\, z^{-n} \qquad\qquad m = -n$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, \left(z^{-1}\right)^{-m} = X(z^{-1}) = X(\frac{1}{z})$$

Hvis ROC: $|z| > \alpha$, blir den nye ROC: $|z^{-1}| > \alpha$, dvs. $|z| < \alpha$. Hvis odde:

$$Z\{-x[-n]\} = -X(z^{-1}) = -X(\frac{1}{z}) \tag{5}$$

ROC påvirkes på samme måte som hvis likesymmetri. Hvis

$$X(z) = \frac{z - z_0}{z - p_0} \qquad\qquad X(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - z_0}{z^{-1} - p_0}$$

Ser at $X(z_0) = X(1/(x_0)) = 0$, og $X(p_0) = X(1/(p_0)) = \infty$. Dette gir resiproke par).

Egenskaper til z-transformasjonen ...

- **Tidsreversering**:
  Hvis $Z\{x[n]\} = X(z)$ ROC : $r_1 < |z| < r_2$
  så er $Z\{x[-n]\} = X(z^{-1})$ ROC : $1/r_2 < |z| < 1/r_1$
- **Derivering i z-domenet**:
  $Z\{nx[n]\} = -z\frac{dX(z)}{dz}$ ROC $=$ ROC$_x$.
- **Konvolusjon av to sekvenser**:
  $Z\{x_1[n] * x_2[n]\} = X_1(z)X_2(z)$ ROC : ROC$_{x1} \cap$ ROC$_{x2}$.

  ROC kan være større hvis det forekommer pol-nullpkt kansellering i produktet $X_1(z)X_2(z)$.

Derivasjon i z-domenet

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

$$\frac{dX(z)}{z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz} x[n]\, z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n)\, x[n]\, z^{-n-1} \qquad \Big| \cdot -z$$

$$-z\frac{dX(z)}{z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, x[n]\, z^{-n}$$

Dvs. å multipliserer $x[n]$ med n tilsvarer å derivere i z-domenet.

Konvolusjonsteoremet

$$
\begin{aligned}
Z\{x[n] * h[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big(x[n] * h[n]\big) z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]\, h[k] \Big) z^{-n} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k]\, h[k]\, z^{-n} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k]\, z^{-n} \qquad\qquad m = n-k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, z^{-m}\, z^{-k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, z^{-m} \\
&= X_2(z)\, X_1(z) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

$\mathrm{ROC}_y = \mathrm{ROC}_x \cap \mathrm{ROC}_h$, men kan være større hvis poler og nullpunkt kanselleres i produktet $X(z)\,H(z)$.

Egenskaper til z-transformasjonen ...

- **Tidsreversering**:
  Hvis $Z\{x[n]\} = X(z)$ ROC : $r_1 < |z| < r_2$
  så er $Z\{x[-n]\} = X(z^{-1})$ ROC : $1/r_2 < |z| < 1/r_1$
- **Derivering i z-domenet**:
  $Z\{nx[n]\} = -z\frac{dX(z)}{dz}$ ROC = ROC_x.
- **Konvolusjon av to sekvenser**:
  $Z\{x_1[n] * x_2[n]\} = X_1(z)X_2(z)$ ROC : $\mathrm{ROC}_{x1} \cap \mathrm{ROC}_{x2}$.

  ROC kan være større hvis det forekommer pol-nullpkt kansellering i produktet $X_1(z)X_2(z)$.

Egenskaper til z-transformasjonen ...

- **Kompleks konjugering**:
  $Z\{x^*[n]\} = X^*(z^*) \qquad \text{ROC} = \text{ROC}_x.$
- **Startverdi (initial value) teoremet**:
  Hvis $x[n]$ kausal, så er $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$.

Egenskaper til z-transformasjonen ...

- **Kompleks konjugering**: $Z\{x^*[n]\} = X^*(z^*)$ ROC = ROC$_x$.
- **Startverdi (initial value) teoremet**: Hvis $x[n]$ kausal, så er $x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$.

Konjugering

$$\begin{aligned} Z\{x^*[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]\, z^{-n} \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(z^{-n}\right)^* \right)^* \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(z^*\right)^{-n} \right)^* \\ &= X^*(z^*) \end{aligned} \tag{7}$$

Hvis $x[n]$ er reell, så er $x[n] = x^*[n]$ og også $X(z) = X^*(z^*)$.

Tema

$H(z)$; systemfunksjonen og implementasjoner
- System transferfunksjonen
- Koblede systemer
- Operator- og blokknotasjon
- Blokkdiagramer

"The transfere function" eller systemfunksjonen

- $Y(z) = H(z)X(z)$.
- $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-1}$ og $h[n]$ er ekvivalente beskrivelse av et system i forskjellige domener.
- $H(z)$ kalles *system transfere function* eller bare *systemfunksjonen*.

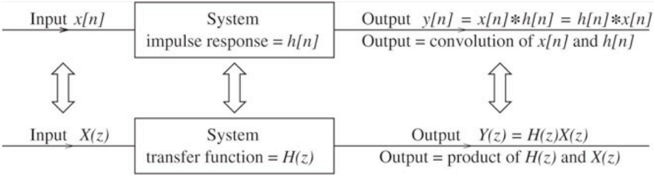


FIGURE 4.3 System description in the time domain and z-domain. In the time domain, the system output is found by the convolution of $x[n]$ and $h[n]$. In the z-domain, the transformed output $Y(z)$ is found by the product of $X(z)$ and $H(z)$. Convolution in one domain transforms to multiplication in the other

"The transfere function" eller systemfunksjonen

- $Y(z) = H(z)X(z)$.
- $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-1}$ og $h[n]$ er ekvivalente beskrivelse av et system i forskjellige domener.
- $H(z)$ kalles *system transfere function* eller bare *systemfunksjonen*.

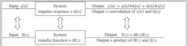


FIGURE 4.3 System description in the time domain and z-domain. In the time domain, the system output is found by the convolution of $x[n]$ and $h[n]$. In the z-domain, the transformed output $Y(z)$ is found by the product of $X(z)$ and $H(z)$. Convolution in one domain transforms to multiplication in the other

Transferfunksjoner

Endelig skal vi bruke z-transformen til noe nyttig!!! $h[n]$ er et system som "gjør noe" med inngangssignalet vårt $x[n]$.

$$x[n] \to \boxed{h[n]} \to y[n] \qquad\qquad y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]\,h[k] \tag{8}$$

1. For å finne $h[n]$ kan vi sende inn en $x[n] = \delta[n]$.
2. Hva hvis jeg vet at et vilkårlig $x[n] \neq \delta[n]$ gir $y[n]$ ut? $Y(z) = X(z)\,H(z)$, dvs. $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$. Vi kan bare z-transformere utgangssignalet og inngangssignalet, og finne forholdet mellom de!
3. Gitt

$$y[n] + A_1\,y[n-1] + \cdots + A_N\,y[n-N] = B_0\,x[n] + B_1\,x[n-1] + \cdots + B_M\,x[n-M]$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{B_0 + B_1\,z^{-1} + \cdots + B_M\,z^{-M}}{1 + A_1\,z^{-1} + \ldots A_N\,z^{-N}} \tag{9}$$

"The transfere function" eller systemfunksjonen ...

- Lineær konstant-koeffisient differanse ligning:

  $y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$ gir

  $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}.$
- Hvis $a_k = 0$ for $k = 1..N$; *all-zero system*/ FIR system / MA system.
- If $b_k = 0$ for $k = 1..M$; *all-pole system*/ IIR system.
- Generell form; *pole-nullpunkt system*/ IIR system.

Koblede systemer

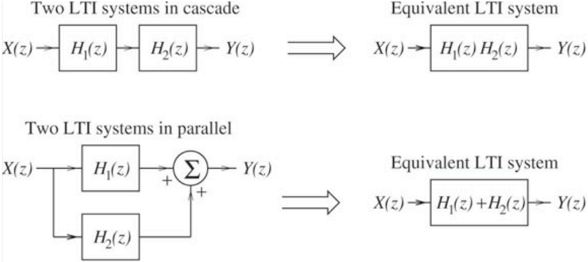
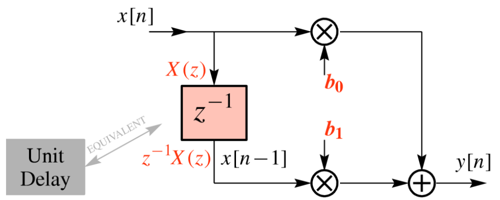


FIGURE 4.4 The equivalent transfer function of systems in cascade is the product of the individual transfer functions. The equivalent transfer function of systems in parallel is the sum of the individual transfer functions

Operatornotasjon

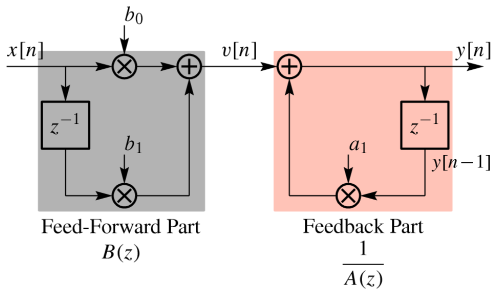
- En forsinkelse på ett sampel tilsvarer mult. med z^{-1}
  - $x[n-1] \; \boxed{\text{ZT}} \; z^{-1} \; X(z)$
  - Refererer til dette som unit-delay property.
- Blokknotasjon av $y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$



McClellan, Schafer and Yoder, *Signal Processing First*, ISBN 0-13-065562-7.
Pearson Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ 07458. © 2003

Direkte form I struktur

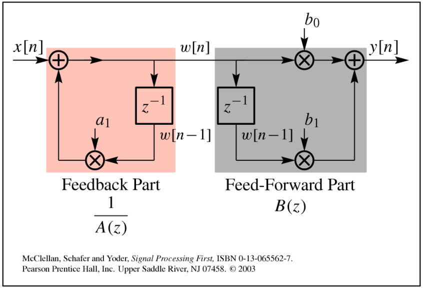
- Gitt systemfunksjonen $H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$.
  - Faktorisering av denne i en FIR og en IIR del gir
    $$H(z) = (b_0 + b_1 z^{-1}) \left(\frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \right) = B(z) \left(\frac{1}{A(z)} \right)$$
  - Kaskadekobling av de to delene gir

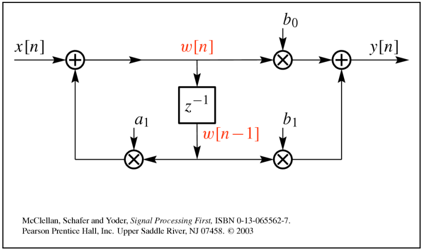


McClellan, Schafer and Yoder, *Signal Processing First*, ISBN 0-13-065562-7.
Pearson Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ 07458. © 2003

Direkte form II struktur

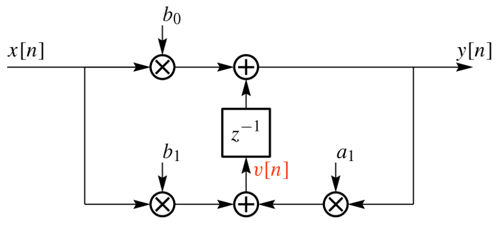
- Ved bytting av rekkefølgen på "IIR" og "FIR" delen fås; $H(z) = \left(\frac{1}{A(z)}\right) B(z)$:





Transponert form

- Med utgangspkt i en *Direkte form struktur* (vanligvis DF II):
    1. Bytt retning på alle piler (og behold multiplikatorer).
    2. La alle "samlepunkt" bli "summepunkt" og vv.
    3. Bytt roller til inngang og utgang.



McClellan, Schafer and Yoder, *Signal Processing First*, ISBN 0-13-065562-7.