UiO : University of Oslo

Uke 5: Analyse i z- og frekvensdomenet

Jo Inge Buskenes

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

INF3470/4470, høst 2012

Dagens temaer

Fra forrige gang

Kausalitet, stabilitet og inverse systemer

$\mathcal{Z}^{-1}\{\cdot\}$: Invers z-transformasjon

Ensidig z-transformasjon

Frekvens respons

Tema

Fra forrige gang

- Definisjon, z-transformasjonen
- ROC
- Egenskaper
- Quiz

Definisjon av z-transformasjonen

- $X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$,
  hvor $z = re^{\jmath 2\pi \frac{f}{F_s}} = re^{\jmath 2\pi F} = re^{\jmath\Omega}$ er en kompleks variabel.
- Dette gir en uendelig rekke av komplekse polynomer. Det vil derfor kun være mulig å finne $X(z)$ for de verdiene av z hvor rekken konvergerer.
  $\Rightarrow$ Region Of Convergence (ROC)
- Notasjon:

$$x[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z)$$

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{ZT}} \rightarrow X(z)$$

ROC

Hvis $x[n]$ er...

- en endelig sekvens. $X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}$.

  ROC for alle z bortsett fra
  - i $z = 0$, hvis $X(z)$ inneholder ledd på formen z^{-n}
  - i $z = \infty$, hvis $X(z)$ inneholder ledd på formen z^n
- periodisk og ...
  - kausalt. $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$ ROC: $|z| > \alpha$
  - anti-kausalt. $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} x[n]z^{-n}$ ROC: $|z| < \beta$
  - tosidig. $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ ROC: $\alpha < |z| < \beta$

Egenskaper

- *Linearitet*: $Z\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$
  ROC: minst $\mathrm{ROC}_{x1} \cap \mathrm{ROC}_{x2}$.
- *Tidsskift*: $Z\{x[n-k]\} = z^{-k}X(z)$
  $\mathrm{ROC} = \mathrm{ROC}_x$, men mulig unntak av $z \in \{0, \infty\}$
- *Konvolusjon*: $Z\{x_1[n] * x_2[n]\} = X_1(z)X_2(z)$
  ROC: minst $\mathrm{ROC}_{x1} \cap \mathrm{ROC}_{x2}$.
- *Skalere z-plan*: $Z\{a^n x[n]\} = X(\frac{z}{a})$
  $\mathrm{ROC} = \mathrm{ROC}_x$ skalert med $|a|$.
- *Kompleks konjugering*: $Z\{x^*[n]\} = X^*(z^*)$
  $\mathrm{ROC} = \mathrm{ROC}_x$.

Quiz

1. La $x[n] = (-2)^n u[n]$. ROC til $X(z)$ er da
   (a) $|z| > 2$, (b) $|z| < 2$, (c) $|z| > 1/2$, (d) $|z| < 2$, (e) $|z| > 0$.
2. Hvilket type system beskriver $H[z] = \frac{z^2+2z+1}{z}$?
   (a) Kausalt, (b) HP, (c) FIR, (d) Rekursivt.
3. Et kausalt filter har poler $z = 0.3,\ -0.5,\ 0.7$.
   Hva er ROC og er systemet stabilt?
   (a) $|z| > 0.7$ og stb, (b) $|z| > 0.7$ og ustb,
   (c) $|z| > 0.3$ og stb, (d) $|z| > 0.3$ og ustb.
4. Hva er impulsresponsen $h[n]$ til systemet $H(z) = \frac{z-1}{z+1},\ |z| > 1$?
5. La $y[n] + 0.5y[n-1] = 2x[n-1]$.
   Finn transferfunksjonen $H_I(z)$ til det inverse systemet.

Tema

Kausalitet, stabilitet og inverse systemer
- Kausalitet og stabilitet
- Inverse systemer

z-transf. og kausalitet og stabilitet

Kausalitet: ROC bestemmer dette!
Høyresidig system; ROC på utsiden av en sirkel med radius r, dvs. $|z| > r$.

Stabilitet: Enhetssirkelen inneholdt i ROC.
Venter til DTFT / Fourieranalyse for å etablere dette.

Kausalt og stabilt system Alle poler innenfor enhetssirkelen.

The ROC of Stable LTI Systems Always Includes the Unit Circle

Stable, Causal System: All the poles must lie inside the unit circle.
Stable, Anti-Causal System: All the poles must lie outside the unit circle.
Stability from Impulse Response: $h[n]$ must be *absolutely summable* $(\sum |h[k]| < \infty)$.

Inverse systemer

- $h_I[n]$ er invers til $h[n]$ hvis $h[n] * h_I[n] = \delta[n]$.
- z-transf. av likning over: $H(z) \cdot H_I(z) = 1$.

$$H_I(z) = H^{-1}(z) = 1/H(z).$$

- Konsekvenser for poler og nullpunkter:
  - Invers til FIR system er IIR.
  - Generelt: Poler til $H(z)$ blir nullpkt i $H_I(z)$ og nullpkt i $H(z)$ blir poler i $H_I(z)$.
- Inverse systemer og ROC
  - ROC til invers system bestemt fra krav om at $H(z)$ og $H_I(z)$ har overlappende ROC.
  - $H(z)$ kan være ustabil eller ikke-implementerbar (ikke-kausal).

Tema

$\mathcal{Z}^{-1}\{\cdot\}$: Invers z-transformasjon

Invers z-transformasjon

Invers z-transformasjon

Tre mulige tilnærmelser

- Konturintegral: $x[n] \equiv \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{\jmath 2\pi}\oint_\Gamma X(z)z^{n-1}dz$.
  - Krever kunnskap i kompleks analyse. Ikke benyttet i vårt kurs.
- Fra potensrekken; den opplagte måten!
  - Siden $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$, hvor
    $x[n] = \cdots + x_{-2}\delta[n+2] + x_{-1}\delta[n+1] + x_0\delta[n] + x_1\delta[n-1] + \cdots$
    kan $x[n]$ leses rett fra $X(z)$.
  - Virker for endelige rekker.
  - De første leddene i uendelige høyre- eller venstre-sidige rekker kan finnes ved lang divisjon eller fra differense likning.
- Delbrøksoppspalting.

z-transformasjon vha. polynomdivisjon (long division)

Finding Inverse Transforms of $X(z) = N(z)\,/\,D(z)$ by Long Division

Right-Sided: Put $N(z)$, $D(z)$ in *descending powers of* z. Obtain a power series in powers of z^{-1}.

Left-Sided: Put $N(z)$, $D(z)$ in *ascending powers of* z. Obtain a power series in powers of z.

Invers z-transform vha. delbrøksoppspalting

- Gitt $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{N} b_n z^{-n}}{\sum\limits_{n=0}^{N} b_m z^{-m}}$.
- Hvis $N < K$, dvs. nevner har høyere orden enn teller, kan delbrøksoppspalting brukes direkte.
- Hvis $N \geq K$ delbrøksoppspaltes i stedet $\frac{H(z)}{z^{N-K+1}}$.
- Prosedyre:
  1. Polene til $H(z)$ faktoriseres og uttrykkes på formen $(z - p_k)$ for $k= 1, 2, \ldots, N$.
  2. Uttrykk $Y(z)$ som en sum av ledd på formen $Y(z) = \sum_{k=1} \frac{K_k}{z-p_k}$, hvor $K_k = Y(z)(z - p_k)|_{z=p_k}$.
  3. Finn $X(z) = zY(z)$.
  4. Skriv ned svaret; $x[n] = \sum_{k=1}^{N} K_k (p_k)^n u[n]$.

Delbrøksoppspaltning

De 3 mulige formene røttene kan ha ...

1. Røtter av typen $(z + p_k)$

$$\frac{K}{z(z+p_1)(z+p_2)\dots} = \frac{K_0}{z} + \frac{K_1}{z+p_1} + \frac{K_2}{z+p_2} + \dots$$

2. Røtter av typen $(z + p_k)^2 \Rightarrow$ multiple former.

$$\frac{K}{z(z+p_1)^2} = \frac{K_0}{z} + \frac{K_1}{z+p_1} + \frac{K_2}{(z+p_2)^2}$$

3. Røtter av typen $(az^2 + bz + c) \Rightarrow$ komplekse.

$$\frac{K}{z(az^2+bz+c)} = \frac{K_0}{z} + \frac{K_1 z + K_2}{az^2+bz+c}$$

- I de aller fleste tilfeller holder det å kunne metode **1**.

Invers z-transform ved å gjenkjenne kjente brøker...

- Etter delbrøksoppspaltingen står vi igjen med enkle ledd som vi kjenner igjen tidsuttrykkene til.

TABLE 4.3 Inverse z-Transform of Partial Fraction Expansion (PFE) Terms

Entry	PFE Term $X(z)$	Causal Signal $x[n],\ n \geq 0$
1	$\dfrac{z}{z-\alpha}$	α^n
2	$\dfrac{z}{(z-\alpha)^2}$	$n\alpha^{(n-1)}$
3	$\dfrac{z}{(z-\alpha)^{N+1}} \quad (N>1)$	$\dfrac{n(n-1)\cdots(n-N+1)}{N!}\alpha^{(n-N)}$
4	$\dfrac{z\bar{K}}{z-\alpha e^{j\Omega}} + \dfrac{z\bar{K}^*}{z-\alpha e^{-j\Omega}}$	$2K\alpha^n\cos(n\Omega+\phi) = 2\alpha^n[C\cos(n\Omega) - D\sin(n\Omega)]$
5	$\dfrac{z\bar{K}}{(z-\alpha e^{j\Omega})^2} + \dfrac{z\bar{K}^*}{(z-\alpha e^{-j\Omega})^2}$	$2Kn\alpha^{n-1}\cos[(n-1)\Omega+\phi]$
6	$\dfrac{z\bar{K}}{(z-\alpha e^{j\Omega})^{N+1}} + \dfrac{z\bar{K}^*}{(z-\alpha e^{-j\Omega})^{N+1}}$	$2K\dfrac{n(n-1)\cdots(n-N+1)}{N!}\alpha^{(n-N)}\cos[(n-N)\Omega+\phi]$

NOTE 1: Where applicable, $\bar{K} = Ke^{j\phi} = C + jD$

NOTE 2: For anti-causal sequences, we get the signal $-x[n]u[-n-1]$, where $x[n]$ is as listed.

Tema

Ensidig z-transformasjon
- Ensidig z-transformasjon
- Egenskaper til en-sidig z-transf.

En-sidig z-transf., definisjon

- $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[n] z^{-k}$
  - Nyttig for analyse av kausale LTI systemer.
  - Brukes primært til å løse lineære konstant koeffisient differens likninger med initialbetingelser.
  - De fleste egenskapene til to-sidig z-transform gjelder også for en-sidig z-transform.
    - Untak: Shifting i tid.
  - En-sidig z-transf. av en sekvens $y[n]$ og dens kausale utgave, $y[n]u[n]$ er identiske.

En-sidig z-transf., shift egenskap

- Høyre shift av $y[n]$ flytter sampler med $n < 0$ inn i området $n \geq 0$:
  - $y[n-1] \rightarrow \boxed{\text{ZT}} \rightarrow z^{-1}Y(z) + y[-1]$
  - $y[n-2] \rightarrow \boxed{\text{ZT}} \rightarrow z^{-2}Y(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]$

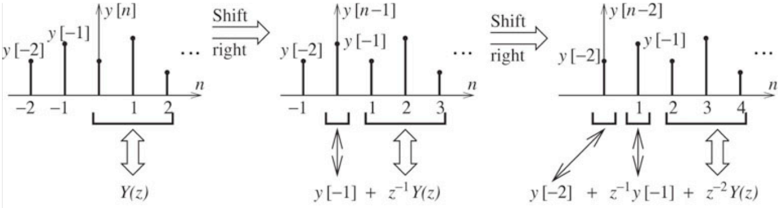


FIGURE 4.9 Illustrating the right-shift property of the one-sided z-transform. A right shift brings samples from the left of the origin into the range $n \geq 0$. These samples now contribute to the z-transform of the shifted signal

En-sidig z-transf., shift egenskap ...

- Venstre shift av $y[n]$ flytter sampler fra området $n \geq 0$ inn i området $n < 0$:
  - $y[n+1] \rightarrow \boxed{\text{ZT}} \rightarrow zY(z) - zy[0]$
  - $y[n+2] \rightarrow \boxed{\text{ZT}} \rightarrow z^2 Y(z) - z^2 y[0] - zy[1]$

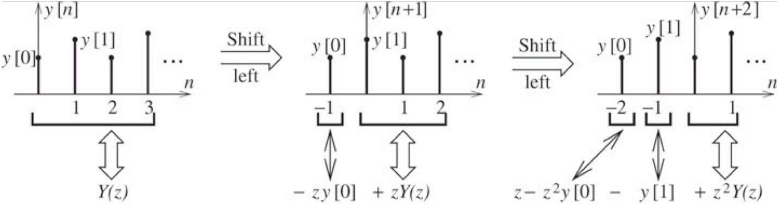


FIGURE 4.10 Illustrating the left-shift property of the one-sided z-transform. A left shift moves samples from the causal region $n \geq 0$ to the left of the origin. These samples no longer contribute to the z-transform of the shifted signal

Startverdi- og sluttverdi-teoremet (initial value/final value theorem)

- Startverdi (initial value) teoremet for ensidig z-transform:

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

- Sluttverdi (final value) teoremet for ensidig z-transform:

$$X(z) = \lim_{z \to 1} (z - 1)X(z)$$

  - Gir meningsfyllt resultat kun når polene til $(z-1)X(z)$ har magnitude mindre enn en.
- Begge teoremer kan også brukes for tosidig $X(z)$ dersom $x[n]$ er lik null for $n < 0$.

Tema

Frekvens respons

- Egenfunksjoner og egenverdier
- Frekvens transformasjon
- Fra z-transf. til DTFT

Egenfunksjoner og egenverdier

- En sekvens sies å være en egenfunksjon til et system hvis
  - responsen til en input-sekvens $x[n]$
  - er output-sekvensen $y[n] = \lambda x[n]$
  - hvor λ, egenverdien, generelt avhenger av input-signalet $x[n]$.
- Det vil si:
  Egenfunksjoner er sekvenser som passerer rett igjennom et system med kun en mulig (kompleks) amplitudeforandring.

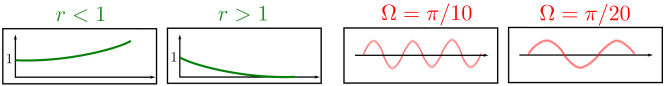
$$\mathbf{x[n]} \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow \mathbf{y[n]} = \lambda \mathbf{x[n]}$$

Egenfunksjoner til et LTI system

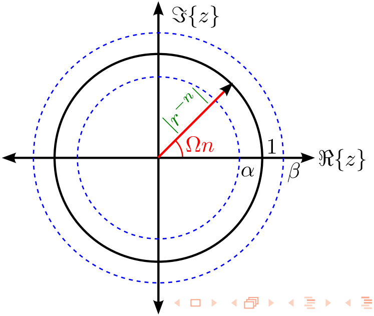
- La
$$x[n] = e^{\jmath n\Omega}, \quad -\infty < n < \infty, \quad \Omega \in [-\pi, \pi].$$
- Da er
$$\begin{aligned} y[n] = h[n] * x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{\jmath\Omega(n-k)} = e^{\jmath n\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-\jmath k\Omega} \\ &= H(\Omega)e^{\jmath n\Omega} = H(\Omega)x[n]. \end{aligned}$$
- dvs at egenfunksjonen til et LTI system er
$$x[n] = e^{\jmath n\Omega}, \quad -\infty < n < \infty, \quad \Omega \in [-\pi, \pi].$$
- og egenverdien, benevnt $H(\Omega)$, er
$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-\jmath k\Omega}.$$

z-transformen - Visuell representasjon

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, r^{-n}\, e^{-j\Omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, r^{-n} \left(\cos \Omega n - j \sin \Omega n\right)
\end{aligned}
$$



Sålenge ikke r-faktoren vokser med økende n, kan den neglisjeres og vi sitter igjen med frekvensresponsen. Dette er den **stasjonære** responsen, dvs. den vi får når alle **transienter** har dødd ut.



ROC: $|z| > \alpha$ if causal

ROC: $|z| < \beta$ if anti-causal

ROC: $\alpha < |z| < \beta$ if both

Frekvens transformen

- Hvis inngangssignalet, $x[n]$, til et LTI-system er en kompleks eksponensial, så vil utgangssignalet, $y[n]$ være likt inngangssignalet bortsett fra en kompleks skalering av amplituden.
- Amplitudeskaleringen er gitt som $H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jk\Omega}$.
- $H(\Omega)$ er generelt, komplekst, dvs.

$$
\begin{aligned}
H(\Omega) &= H_{\Re}(\Omega) + jH_{\Im}(\Omega), \\
\text{eller} \quad H(\Omega) &= |H(\Omega)|e^{j\Phi_h(\Omega)}, \\
\text{hvor} \quad |H(\Omega)|^2 &= H(\Omega)H^*(\Omega) = H_{\Re}^2(\Omega) + H_{\Im}^2(\Omega) \\
\text{and} \quad \Phi_h(\Omega) &= \tan^{-1}\frac{H_{\Im}(\Omega)}{H_{\Re}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

- $H(\Omega)$ avhenger av frekvensen Ω.

Frekvens transformasjonen ...

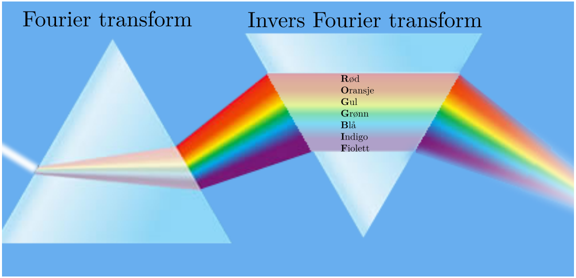
- $H(\Omega)$ kalles frekvensresponsen.
- Den viser hvordan en kompleks eksponensial forandres i (kompleks) amplitude når den filtreres av systemet.
- Særdeles nyttig om inngangssignalet, $x[n]$, kan dekomponeres inn i en sum av komplekse eksponensialer.
  - Responsen til
$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_h e^{-\jmath n\Omega_k}$$
  - vil være
$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} H(\Omega_k)\alpha_h e^{-\jmath n\Omega_k}$$
- Gruppeforsinkelsen, $\tau_h(\Omega)$, forsinkelsen til hele signalet $x[n] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_h e^{-\jmath n\Omega_k}$:
$$\tau_h(\Omega) = -\frac{d\Phi_h(\Omega)}{d\Omega}.$$

Fra tid til frekvens

- Frekvensresponsen til et LTI-system beskriver hvordan en kompleks eksponensial forandres i (kompleks) amplitude når denne anvendes på systemet.
- Hvis inngangssignalet ikke er en kompleks eksponensial, eksisterer det da en måte å transformere signalet inn i en sum av komplekse eksponensialer?
- Hvis alle (praktiske) signaler kan skrives som en (uendelig) sum av sinuser og cosinuser, hvordan finner vi da denne summen gitt en sekvens $x[n]$?

Fourierrepresentasjon av et signal ...

- Spiller en veldig viktig rolle i både kontinuerlig tid og diskret tid signalbehandling.
- Beskriver en metode for å transformere et signal fra et domene til et annet slik at vi kan manupulere signalet her.
  - Konvolusjon blir multiplikasjon (sånn nesten ...).
- Gir en annen måte/arena å tolke signaler og systemer.
  - Analogi:



Fourier transformasjonen til diskrete ikke-periodisk signaler.

- $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$.
  - $X(\Omega)$ representerer frekvensinnholdet i signalet $x[n]$, dvs.
  - $X(\Omega)$ er en dekomposisjon av $x[n]$ inn i sine frekvenskomponenter.
- Unik over frekvensintervallet $(-\pi, \pi)$, eller ekvivalent $(0, 2\pi)$.
- $X(\Omega)$ er periodisk med periode 2π.
- $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$.

Fourier transformasjonen til diskrete ikke-periodisk signaler ...

- Konvergerer: $X_N(\Omega) = \sum_{n=-N}^{N} x[n]e^{-\jmath\Omega n}$ konvergerer uniformt til $X(\Omega)$, dvs. $\lim_{N\to\infty} \{\sup_\Omega |X(\Omega) - X_N(\Omega)|\} = 0$.
  - Garantert hvis $x[n]$ er absolutt summerbar.
- Mulig med kvadratisk summerbare sekvenser hvis *mean-square* konvergenskriterium er oppfylt.
- Energitetthetsspekter $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$.

Discrete-time Fourier transform; DTFT

Notasjon:

- Analysis : $X(\Omega) \equiv= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-\jmath\Omega n}$.
- Alternativt: $X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-\jmath 2\pi F n}$.
- Syntese : $x[n] \equiv \{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{\jmath\Omega n} d\Omega$.
- Alternativt: $x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(F) e^{\jmath 2\pi n F} dF$.
- $x[n] \leftrightarrow X(\Omega)$.

Fra z-transf. til DTFT

- Finner $X(\Omega)$ ved å evaluere z-transformasjonen langs enhetssirkelen.
- $X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$
  - $z = Re^{\jmath 2\pi F}$, der $F = \frac{f}{F_s}$. Vi setter $R = 1$ og får:

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{\jmath 2\pi Fn} \\
&= X(\Omega).
\end{aligned}
$$