UiO : University of Oslo

Uke 5: Analyse i *z*- og frekvensdomenet

Jo Inge Buskenes

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

INF3470/4470, høst 2012

Dagens temaer

Fra forrige gang

Kausalitet, stabilitet og inverse systemer

$\mathcal{Z}^{-1}\{\cdot\}$: Invers z-transformasjon

Ensidig z-transformasjon

Frekvens respons

Tema

Fra forrige gang
- Definisjon, z-transformasjonen
- ROC
- Egenskaper
- Quiz

Definisjon av z-transformasjonen

- $X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$,
  hvor $z = re^{\jmath 2\pi \frac{f}{F_s}} = re^{\jmath 2\pi F} = re^{\jmath\Omega}$ er en kompleks variabel.
- Dette gir en uendelig rekke av komplekse polynomer. Det vil derfor kun være mulig å finne $X(z)$ for de verdiene av z hvor rekken konvergerer.
  $\Rightarrow$ Region Of Convergence (ROC)
- Notasjon:

$$x[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z)$$

$$x[n] \rightarrow \boxed{\mathrm{ZT}} \rightarrow X(z)$$

ROC

Hvis $x[n]$ er...

- en endelig sekvens. $X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}$.

  ROC for alle z bortsett fra

  - i $z = 0$, hvis $X(z)$ inneholder ledd på formen z^{-n}
  - i $z = \infty$, hvis $X(z)$ inneholder ledd på formen z^n

- periodisk og ...
  - kausalt. $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$ ROC: $|z| > \alpha$
  - anti-kausalt. $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} x[n]z^{-n}$ ROC: $|z| < \beta$
  - tosidig. $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ ROC: $\alpha < |z| < \beta$

Egenskaper

- *Linearitet*: $Z\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$
  ROC: minst $\text{ROC}_{x1} \cap \text{ROC}_{x2}$.
- *Tidsskift*: $Z\{x[n-k]\} = z^{-k}X(z)$
  $\text{ROC} = \text{ROC}_x$, men mulig unntak av $z \in \{0, \infty\}$
- *Konvolusjon*: $Z\{x_1[n] * x_2[n]\} = X_1(z)X_2(z)$
  ROC: minst $\text{ROC}_{x1} \cap \text{ROC}_{x2}$.
- *Skalere z-plan*: $Z\{a^n x[n]\} = X(\frac{z}{a})$
  $\text{ROC} = \text{ROC}_x$ skalert med $|a|$.
- *Kompleks konjugering*: $Z\{x^*[n]\} = X^*(z^*)$
  $\text{ROC} = \text{ROC}_x$.

Quiz

1. La $x[n] = (-2)^n u[n]$. ROC til $X(z)$ er da
   (a) $|z| > 2$, (b) $|z| < 2$, (c) $|z| > 1/2$, (d) $|z| < 2$, (e) $|z| > 0$.
2. Hvilket type system beskriver $H[z] = \frac{z^2+2z+1}{z}$?
   (a) Kausalt, (b) HP, (c) FIR, (d) Rekursivt.
3. Et kausalt filter har poler $z = 0.3, \ -0.5, \ 0.7$.
   Hva er ROC og er systemet stabilt?
   (a) $|z| > 0.7$ og stb, (b) $|z| > 0.7$ og ustb,
   (c) $|z| > 0.3$ og stb, (d) $|z| > 0.3$ og ustb.
4. Hva er impulsresponsen $h[n]$ til systemet $H(z) = \frac{z-1}{z+1}$, $|z| > 1$?
5. La $y[n] + 0.5y[n-1] = 2x[n-1]$.
   Finn transferfunksjonen $H_I(z)$ til det inverse systemet.

Quiz

1. La $x[n] = (-2)^n u[n]$. ROC til $X(z)$ er da
   (a) $|z| > 2$, (b) $|z| < 2$, (c) $|z| > 1/2$, (d) $|z| < 2$, (e) $|z| > 0$.
2. Hvilket type system beskriver $H[z] = \frac{z^2+2z+1}{z}$?
   (a) Kausalt, (b) HP, (c) FIR, (d) Rekursivt.
3. Et kausalt filter har poler $z = 0.3,\ -0.5,\ 0.7$.
   Hva er ROC og er systemet stabilt?
   (a) $|z| > 0.7$ og stb, (b) $|z| > 0.7$ og ustb,
   (c) $|z| > 0.3$ og stb, (d) $|z| > 0.3$ og ustb.
4. Hva er impulsresponsen $h[n]$ til systemet $H(z) = \frac{z-1}{z+1},\ |z| > 1$?
5. La $y[n] + 0.5y[n-1] = 2x[n-1]$.
   Finn transferfunksjonen $H_I(z)$ til det inverse systemet.

1. $\Rightarrow$ **(a)**

$$Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n z^{-n} \overset{*}{=} \frac{1}{1+2z^{-1}}$$

$$*\ \text{Assuming } |2z^{-1}| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \text{ROC: } |z| > 2$$

2. $\Rightarrow$ **(c)**

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2+2z+1}{z} \qquad Y(z) = X(z)(z+2+z^{-1})$$

$$y[n] = x[n+1] + 2x[n] + x[n-1]$$

3. $\Rightarrow$ **(a)**

$$H(z) = \frac{1}{(z-0.3)(z+0.5)(z-0.7)} = \underbrace{\frac{1}{z-0.3}}_{H_1(z)} \underbrace{\frac{1}{z+0.5}}_{H_2(z)} \underbrace{\frac{1}{z-0.7}}_{H_3(z)}$$

ROC $=$ ROC$_{H1} \cap$ ROC$_{H2} \cap$ ROC$_{H3}$ $=$ ROC$_{H3}$ $= |z| > 0.7$. Kausalt siden ROC er på utsiden av alle poler. Stabilt siden enhetssirkelen er i ROC.

Quiz

1. La $x[n] = (-2)^n u[n]$. ROC til $X(z)$ er da
   (a) $|z| > 2$, (b) $|z| < 2$, (c) $|z| > 1/2$, (d) $|z| < 2$, (e) $|z| > 0$.
2. Hvilket type system beskriver $H[z] = \frac{z^2+2z+1}{z}$?
   (a) Kausalt, (b) HP, (c) FIR, (d) Rekursivt.
3. Et kausalt filter har poler $z = 0.3,\ -0.5,\ 0.7$.
   Hva er ROC og er systemet stabilt?
   (a) $|z| > 0.7$ og stb, (b) $|z| > 0.7$ og ustb,
   (c) $|z| > 0.3$ og stb, (d) $|z| > 0.3$ og ustb.
4. Hva er impulsresponsen $h[n]$ til systemet $H(z) = \frac{z-1}{z+1},\ |z| > 1$?
5. La $y[n] + 0.5y[n-1] = 2x[n-1]$.
   Finn transferfunksjonen $H_I(z)$ til det inverse systemet.

4. $\Rightarrow$ **(*a*)**

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{z-1}{z+1} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{1}{1+z^{-1}} - z^{-1}\frac{1}{1+z^{-1}} \\
h[n] &= (-1)^n u[n] - (-1)^{n-1} u[n-1] \\
&= (-1)^n u[n] + (-1)^n u[n-1] \\
&= (-1)^n \big(u[n] + u[n-1] \big)
\end{aligned}
$$

5. $\Rightarrow$ **(*a*)**

$$
\begin{aligned}
y[n] + 0.5y[n-1] &= 2x[n-1] \\
Y(z)(1 + 0.5z^{-1}) &= 2X(z)z^{-1} \\
H(z) &= \frac{2z^{-1}}{1+0.5z^{-1}} \\
H^{-1}(z) &= \frac{1+0.5z^{-1}}{2z^{-1}} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Tema

Kausalitet, stabilitet og inverse systemer
- Kausalitet og stabilitet
- Inverse systemer

z-transf. og kausalitet og stabilitet

Kausalitet: ROC bestemmer dette!
Høyresidig system; ROC på utsiden av en sirkel med radius r, dvs. $|z| > r$.

Stabilitet: Enhetssirkelen inneholdt i ROC.
Venter til DTFT / Fourieranalyse for å etablere dette.

Kausalt og stabilt system Alle poler innenfor enhetssirkelen.

The ROC of Stable LTI Systems Always Includes the Unit Circle

Stable, Causal System: All the poles must lie inside the unit circle.
Stable, Anti-Causal System: All the poles must lie outside the unit circle.
Stability from Impulse Response: $h[n]$ must be *absolutely summable* ($\sum |h[k]| < \infty$).

Inverse systemer

- $h_I[n]$ er invers til $h[n]$ hvis $h[n] * h_I[n] = \delta[n]$.
- z-transf. av likning over: $H(z) \cdot H_I(z) = 1$.

$$H_I(z) = H^{-1}(z) = 1/H(z).$$

- Konsekvenser for poler og nullpunkter:
  - Invers til FIR system er IIR.
  - Generelt: Poler til $H(z)$ blir nullpkt i $H_I(z)$ og nullpkt i $H(z)$ blir poler i $H_I(z)$.
- Inverse systemer og ROC
  - ROC til invers system bestemt fra krav om at $H(z)$ og $H_I(z)$ har overlappende ROC.
  - $H(z)$ kan være ustabil eller ikke-implementerbar (ikke-kausal).

Inverse systemer

- $h_I[n]$ er invers til $h[n]$ hvis $h[n] * h_I[n] = \delta[n]$.
- z-transf. av likning over: $H(z) \cdot H_I(z) = 1$.

$$H_I(z) = H^{-1}(z) = 1/H(z).$$

- Konsekvenser for poler og nullpunkter:
  - Invers til FIR system er IIR.
  - Generelt: Poler til $H(z)$ blir nullpkt i $H_I(z)$ og nullpkt i $H(z)$ blir poler i $H_I(z)$.
- Inverse systemer og ROC
  - ROC til invers system bestemt fra krav om at $H(z)$ og $H_I(z)$ har overlappende ROC.
  - $H(z)$ kan være ustabil eller ikke-implementerbar (ikke-kausal).

Gitt FIR systemet:

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_M x[n-M] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

$$Y(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m X(n) z^{-m} = B \prod_{m=0}^{M} (z - z_k)$$

$$Y^{-1}(z) = 1/Y(z)$$

- Invers til FIR gir IIR.
- Invers til IIR gir FIR eller IIR.

Tema

$\mathcal{Z}^{-1}\{\cdot\}$: Invers z-transformasjon

Invers z-transformasjon

Invers z-transformasjon

Tre mulige tilnærmelser

- Konturintegral: $x[n] \equiv \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{\jmath 2\pi} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz$.
  - Krever kunnskap i kompleks analyse. Ikke benyttet i vårt kurs.
- Fra potensrekken; den opplagte måten!
  - Siden $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$, hvor
    $x[n] = \cdots + x_{-2}\delta[n+2] + x_{-1}\delta[n+1] + x_0\delta[n] + x_1\delta[n-1] + \cdots$
    kan $x[n]$ leses rett fra $X(z)$.
  - Virker for endelige rekker.
  - De første leddene i uendelige høyre- eller venstre-sidige rekker kan finnes ved lang divisjon eller fra differense likning.
- Delbrøksoppspalting.

z-transformasjon vha. polynomdivisjon (long division)

Finding Inverse Transforms of $X(z) = N(z)\,/\,D(z)$ by Long Division

Right-Sided: Put $N(z)$, $D(z)$ in *descending powers of* z. Obtain a power series in powers of z^{-1}.

Left-Sided: Put $N(z)$, $D(z)$ in *ascending powers of* z. Obtain a power series in powers of z.

z-transformasjon vha. polynomdivisjon (long division)

Finding Inverse Transforms of $X(z) = N(z)/D(z)$ by Long Division

Right-Sided: Put $N(z)$, $D(z)$ in *descending powers of z*. Obtain a power series in powers of z^{-1}.

Left-Sided: Put $N(z)$, $D(z)$ in *ascending powers of z*. Obtain a power series in powers of z.

Har at $H(z) = \frac{z-4}{z^2-z+1}$

- Dette er et høyresidig signal, med fallende grad av z. Vi kan finne impulsresponsen ved å utføre *polynomdivisjon*.

$$
\begin{array}{ll}
 & z - 4 \quad \div\ z^2 - z + 1 \ = \ z^{-1} - 3z^{-2} - 4z^{-3} - z^{-4} \dots \\
- & z - 1 + z^{-1} \\
= & -3 - z^{-1} \\
- & -3 + 3z^{-1} - 3z^{-2} \\
= & -4z^{-1} + 3z^{-2} \\
- & -4z^{-1} + 4z^{-2} - 4z^{-3} \\
= & -z^{-2} + 4z^{-3} \\
- & -z^{-2} + z^{-3} - z^{-4} \\
= & 3z^{-3} + z^{-4}
\end{array}
$$

- Men finnes det bedre metoder enn å regne seg i hjel slik?

Alternativ: Inverstransformere $H(z) = \frac{z-4}{z^2-z+1}$ og sette inn for n:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z-4}{z^2-z+1} = \frac{z^{-1}-4z^{-2}}{1-z^{-1}+z^{-2}}$$

$$Y(z)(1-z^{-1}+z^{-2}) = X(z)(z^{-1}-4z^{-2})$$

$$y[n] = y[n-1] - y[n-2] + x[n-1] - 4x[n-2]$$

Hvis vi nå lar $x[n] = \delta[n]$, må $y[n] = h[n]$:

$$h[n] = h[n-1] - h[n-2] + \delta[n-1] - 4\delta[n-2]$$

Hvis vi videre antar $h[n<0] = 0$ (dvs. systemet er i ro, eller “relaxed”):

$$\begin{aligned} h[0] &= h[-1] - h[-2] + \delta[-1] - 4\delta[-2] = \mathbf{0} \\ h[1] &= h[0] - h[-1] + \delta[0] - 4\delta[-1] = \mathbf{1} \\ h[2] &= h[1] - h[0] + \delta[1] - 4\delta[0] = 1 - 4 = \mathbf{-3} \\ h[3] &= h[2] - h[1] = -3 - 1 = \mathbf{-4} \\ h[4] &= h[3] - h[2] = -4 - (-3) = \mathbf{-1} \end{aligned}$$

Dvs. $h[n] = \delta[n-1] - 3\delta[n-2] - 4\delta[n-3] - \delta[n-4]$ (samme som sist).

z-transformasjon vha. polynomdivisjon (long division)

Finding Inverse Transforms of $X(z) = N(z)/D(z)$ by Long Division

Right-Sided: Put $N(z)$, $D(z)$ in *descending powers of* z. Obtain a power series in powers of z^{-1}.

Left-Sided: Put $N(z)$, $D(z)$ in *ascending powers of* z. Obtain a power series in powers of z.

Invers z-transform vha. delbrøksoppspalting

- Gitt $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{N} b_n z^{-n}}{\sum\limits_{n=0}^{N} b_m z^{-m}}$.
- Hvis $N < K$, dvs. nevner har høyere orden enn teller, kan delbrøksoppspalting brukes direkte.
- Hvis $N \geq K$ delbrøksoppspaltes i stedet $\frac{H(z)}{z^{N-K+1}}$.
- Prosedyre:
  1. Polene til $H(z)$ faktoriseres og uttrykkes på formen $(z - p_k)$ for $k= 1, 2, \ldots, N$.
  2. Uttrykk $Y(z)$ som en sum av ledd på formen $Y(z) = \sum_{k=1} \frac{K_k}{z-p_k}$, hvor $K_k = Y(z)(z - p_k)|_{z=p_k}$.
  3. Finn $X(z) = zY(z)$.
  4. Skriv ned svaret; $x[n] = \sum_{k=1}^{N} K_k (p_k)^n u[n]$.

Delbrøksoppspaltning

De 3 mulige formene røttene kan ha ...

1. Røtter av typen $(z + p_k)$

$$\frac{K}{z(z+p_1)(z+p_2)\ldots} = \frac{K_0}{z} + \frac{K_1}{z+p_1} + \frac{K_2}{z+p_2} + \ldots$$

2. Røtter av typen $(z + p_k)^2 \Rightarrow$ multiple former.

$$\frac{K}{z(z+p_1)^2} = \frac{K_0}{z} + \frac{K_1}{z+p_1} + \frac{K_2}{(z+p_2)^2}$$

3. Røtter av typen $(az^2 + bz + c) \Rightarrow$ komplekse.

$$\frac{K}{z(az^2+bz+c)} = \frac{K_0}{z} + \frac{K_1 z + K_2}{az^2+bz+c}$$

- I de aller fleste tilfeller holder det å kunne metode **1**.

Invers z-transform ved å gjenkjenne kjente brøker...

- Etter delbrøksoppspaltingen står vi igjen med enkle ledd som vi kjenner igjen tidsuttrykkene til.

TABLE 4.3 Inverse z-Transform of Partial Fraction Expansion (PFE) Terms

Entry	PFE Term $X(z)$	Causal Signal $x[n]$, $n \geq 0$
1	$\frac{z}{z-\alpha}$	α^n
2	$\frac{z}{(z-\alpha)^2}$	$n\alpha^{(n-1)}$
3	$\frac{z}{(z-\alpha)^{N+1}}$ $(N > 1)$	$\frac{n(n-1)\cdots(n-N+1)}{N!}\alpha^{(n-N)}$
4	$\frac{z\bar{K}}{z-\alpha e^{j\Omega}} + \frac{z\bar{K}^*}{z-\alpha e^{-j\Omega}}$	$2K\alpha^n\cos(n\Omega+\phi) = 2\alpha^n[C\cos(n\Omega) - D\sin(n\Omega)]$
5	$\frac{z\bar{K}}{(z-\alpha e^{j\Omega})^2} + \frac{z\bar{K}^*}{(z-\alpha e^{-j\Omega})^2}$	$2Kn\alpha^{n-1}\cos[(n-1)\Omega+\phi]$
6	$\frac{z\bar{K}}{(z-\alpha e^{j\Omega})^{N+1}} + \frac{z\bar{K}^*}{(z-\alpha e^{-j\Omega})^{N+1}}$	$2K\frac{n(n-1)\cdots(n-N+1)}{N!}\alpha^{(n-N)}\cos[(n-N)\Omega+\phi]$

NOTE 1: Where applicable, $\bar{K} = Ke^{j\phi} = C + jD$

NOTE 2: For anti-causal sequences, we get the signal $-x[n]u[-n-1]$, where $x[n]$ is as listed.

Invers z-transform ved å gjenkjenne kjente brøker...

- Etter delbrøksoppspaltingen står vi igjen med enkle ledd som vi kjenner igjen tidsuttrykkene til.

TABLE 4.3 ➤ Inverse z-Transform of Partial Fraction Expansion (PFE) Terms

Entry	PFE Term $X(z)$	Causal Signal $x[n]$, $n \geq 0$
1	$\frac{z}{z-\alpha}$	α^n
2	$\frac{z}{(z-\alpha)^2}$	$n\alpha^{(n-1)}$
3	$\frac{z}{(z-\alpha)^{N+1}}$ $(N > 1)$	$\frac{n(n-1)\cdots(n-N+1)}{N!}\alpha^{(n-N)}$
4	$\frac{z\bar{K}}{z-\alpha e^{j\Omega}} + \frac{z\bar{K}^*}{z-\alpha e^{-j\Omega}}$	$2K\alpha^n\cos(n\Omega+\phi) = 2\alpha^n[C\cos(n\Omega) - D\sin(n\Omega)]$
5	$\frac{z\bar{K}}{(z-\alpha e^{j\Omega})^2} + \frac{z\bar{K}^*}{(z-\alpha e^{-j\Omega})^2}$	$2Kn\alpha^{n-1}\cos[(n-1)\Omega+\phi]$
6	$\frac{z\bar{K}}{(z-\alpha e^{j\Omega})^{N+1}} + \frac{z\bar{K}^*}{(z-\alpha e^{-j\Omega})^{N+1}}$	$2K\frac{n(n-1)\cdots(n-N+1)}{N!}\alpha^{(n-N)}\cos[(n-N)\Omega+\phi]$

NOTE 1: Where applicable, $\bar{K} = Ke^{j\phi} = C + jD$

NOTE 2: For anti-causal sequences, we get the signal $-x[n]u[-n-1]$, where $x[n]$ is as listed.

$$H(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-0.4)}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z}{(z-0.5)(z-0.4)} = \frac{k_1}{z-0.5} + \frac{k_2}{z-0.4} \qquad \Big| \cdot (z-0.5)(z-0.4)$$

$$z = k_1(z-0.4) + k_2(z-0.5)$$

Kan nå sette opp en ligning for z^0-leddene og en for z^1-leddene:

$$z^0 - \text{ledd} : 0 = -0.4k_1 - 0.5k_2$$

$$z^{-1} - \text{ledd} : 1 = k_1 + k_2$$

Løser vi ligningssettet finner vi at $k_1 = 5$ og $k_2 = -4$. Ergo:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{5}{z-0.5} - \frac{4}{z-0.4}$$

$$H(z) = \frac{5z}{z-0.5} - \frac{4z}{z-0.4} = \frac{5}{1-0.5z^{-1}} - \frac{4}{1-0.4z^{-1}}$$

$$h[n] = 5\,(0.5)^n\,u[n] - 4\,(0.4)^n\,u[n]$$

Tema

Ensidig z-transformasjon
- Ensidig z-transformasjon
- Egenskaper til en-sidig z-transf.

En-sidig z-transf., definisjon

- $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[n] z^{-k}$
  - Nyttig for analyse av kausale LTI systemer.
  - Brukes primært til å løse lineære konstant koeffisient differens likninger med initialbetingelser.
  - De fleste egenskapene til to-sidig z-transform gjelder også for en-sidig z-transform.
    - Untak: Shifting i tid.
  - En-sidig z-transf. av en sekvens $y[n]$ og dens kausale utgave, $y[n]u[n]$ er identiske.

En-sidig z-transf., shift egenskap

- Høyre shift av $y[n]$ flytter sampler med $n < 0$ inn i området $n \geq 0$:
  - $y[n-1] \rightarrow \boxed{\text{ZT}} \rightarrow z^{-1}Y(z) + y[-1]$
  - $y[n-2] \rightarrow \boxed{\text{ZT}} \rightarrow z^{-2}Y(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]$

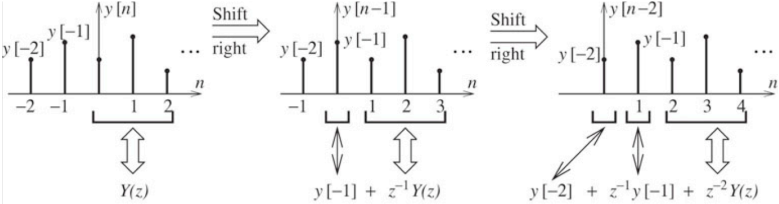


FIGURE 4.9 Illustrating the right-shift property of the one-sided z-transform. A right shift brings samples from the left of the origin into the range $n \geq 0$. These samples now contribute to the z-transform of the shifted signal

En-sidig z-transf., shift egenskap ...

- Venstre shift av $y[n]$ flytter sampler fra området $n \geq 0$ inn i området $n < 0$:
  - $y[n+1] \rightarrow \boxed{\text{ZT}} \rightarrow zY(z) - zy[0]$
  - $y[n+2] \rightarrow \boxed{\text{ZT}} \rightarrow z^2Y(z) - z^2y[0] - zy[1]$

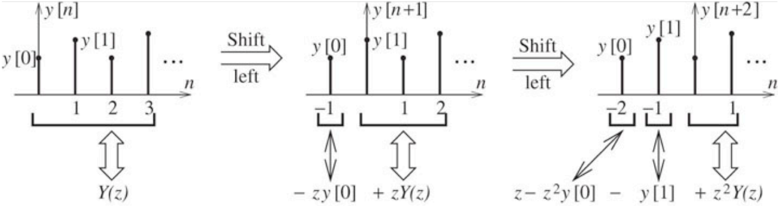


FIGURE 4.10 Illustrating the left-shift property of the one-sided z-transform. A left shift moves samples from the causal region $n \geq 0$ to the left of the origin. These samples no longer contribute to the z-transform of the shifted signal

Startverdi- og sluttverdi-teoremet (initial value/final value theorem)

- Startverdi (initial value) teoremet for ensidig z-transform:

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

- Sluttverdi (final value) teoremet for ensidig z-transform:

$$X(z) = \lim_{z \to 1} (z-1)X(z)$$

    - Gir meningsfyllt resultat kun når polene til $(z-1)X(z)$ har magnitude mindre enn en.

- Begge teoremer kan også brukes for tosidig $X(z)$ dersom $x[n]$ er lik null for $n < 0$.

Startverdi- og sluttverdi-teoremet (initial value/final value theorem)

- Startverdi (initial value) teoremet for ensidig z-transform:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

- Sluttverdi (final value) teoremet for ensidig z-transform:

$$X(z) = \lim_{z\to 1} (z-1)X(z)$$

  - Gir meningsfyllt resultat kun når polene til $(z-1)X(z)$ har magnitude mindre enn en.
- Begge teoremer kan også brukes for tosidig $X(z)$ dersom $x[n]$ er lik null for $n < 0$.

Bevis for startverdi teoremet:

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = x[0] \quad \text{fordi } z^{-n} = \frac{1}{z^n} = 0 \text{ når } z \to \infty \text{ og } n \neq 0$$

Bevis(?) for sluttverdi teoremet:

$$\begin{aligned}
x[\infty] - x[0] &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n+1] - \sum_{n=0}^{\infty} x[n] = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(x[n+1] - x[n] \Big) \\
&= \lim_{z\to 1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} x[n+1] - x[n] \right\} z^{-n} \\
&= \lim_{z\to 1} \left\{ \Big(zX(z) - x[0] \Big) - X(z) \right\} \\
&= \lim_{z\to 1} \Big\{ zX(z) - X(z) \Big\} - x[0] \\
x[\infty] &= \lim_{z\to 1} \big(z-1\big) X(z)
\end{aligned}$$

$x[0]$ fjernes siden den ikke inngår i den ensidige transformen

Startverdi- og sluttverdi-teoremet (initial value/final value theorem)

- Startverdi (initial value) teoremet for ensidig z-transform:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

- Sluttverdi (final value) teoremet for ensidig z-transform:

$$X(z) = \lim_{z\to 1} (z-1)X(z)$$

  - Gir meningsfyllt resultat kun når polene til $(z-1)X(z)$ har magnitude mindre enn en.
- Begge teoremer kan også brukes for tosidig $X(z)$ dersom $x[n]$ er lik null for $n < 0$.

Et eksempel

$$X(z) = \frac{z(z-2)}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{1-2z^{-2}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-1}}$$

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z) = \frac{1-0}{1-0-0} = 1$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x[n] &= \lim_{z\to 1}(z-1)X(z) \\
&= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z(z-2)}{(z-1)(z-0.5)} \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{z(z-2)}{z-0.5} \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{1-2)}{1-0.5} \\
&= -2
\end{aligned}$$

Tema

Frekvens respons
- Egenfunksjoner og egenverdier
- Frekvens transformasjon
- Fra z-transf. til DTFT

Egenfunksjoner og egenverdier

- En sekvens sies å være en egenfunksjon til et system hvis
  - responsen til en input-sekvens $x[n]$
  - er output-sekvensen $y[n] = \lambda x[n]$
  - hvor λ, egenverdien, generelt avhenger av input-signalet $x[n]$.
- Det vil si:
  Egenfunksjoner er sekvenser som passerer rett igjennom et system med kun en mulig (kompleks) amplitudeforandring.

$$\mathbf{x[n]} \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow \mathbf{y[n]} = \lambda\mathbf{x[n]}$$

Egenfunksjoner til et LTI system

- La
$$x[n] = e^{\jmath n\Omega}, \quad -\infty < n < \infty, \quad \Omega \in [-\pi, \pi].$$
- Da er
$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{\jmath\Omega(n-k)} = e^{\jmath n\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-\jmath k\Omega} \\ &= H(\Omega)e^{\jmath n\Omega} = H(\Omega)x[n]. \end{aligned}$$
- dvs at egenfunksjonen til et LTI system er
$$x[n] = e^{\jmath n\Omega}, \quad -\infty < n < \infty, \quad \Omega \in [-\pi, \pi].$$
- og egenverdien, benevnt $H(\Omega)$, er
$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-\jmath k\Omega}.$$

Egenfunksjoner til et LTI system

- La
$$x[n] = e^{\jmath n\Omega}, \quad -\infty < n < \infty, \quad \Omega \in [-\pi, \pi].$$
- Da er
$$\begin{aligned} y[n] = h[n] * x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{\jmath\Omega(n-k)} = e^{\jmath n\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-\jmath k\Omega} \\ &= H(\Omega)e^{\jmath n\Omega} = H(\Omega)x[n]. \end{aligned}$$
- dvs at egenfunksjonen til et LTI system er
$$x[n] = e^{\jmath n\Omega}, \quad -\infty < n < \infty, \quad \Omega \in [-\pi, \pi].$$
- og egenverdien, benevnt $H(\Omega)$, er
$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-\jmath k\Omega}$.

Vi sender et signal $x[n] = e^{j\Omega n}u[n]$ inn på et system $H(z) = \frac{b_0 z}{z-a_1}$. Hva blir $y[n]$? Vi går veien om z-domenet:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{j\Omega} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{j\Omega}}$$

$$Y(z) = X(z)\, H(z) = \frac{b_0 z^2}{(z - e^{j\Omega})(z - a_1)}$$

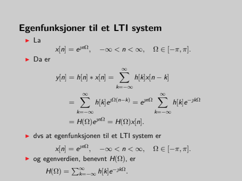
$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{b_0 z}{(z - e^{j\Omega})(z - a_1)} = \frac{k_1}{z - e^{j\Omega}} + \frac{k_2}{z - a_1}$$

$$b_0 z = k_1(z - a_1) + k_2(z - e^{j\Omega})$$

Et triks når vi bare har 2 ukjente k'er som her er å "nulle" ut en av de ukjente og se hva den andre blir:

$$\text{Setter } z = e^{j\Omega} : \qquad k_1 = \frac{b_0 e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - a_1}$$

$$\text{Setter } z = a_1 \;\; : \qquad k_2 = \frac{b_0 a_1}{a_1 - e^{j\Omega}}$$



Hva har vi så langt?

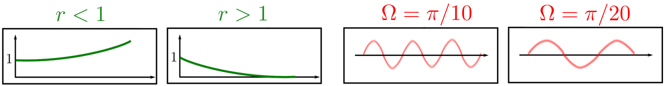
$$
\begin{aligned}
Y(z) = \frac{k_1 z}{z - e^{j\Omega}} + \frac{k_2 z}{z - a_1} &= \frac{k_1}{1 - e^{j\Omega} z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - a_1 z^{-1}} \\
&= \frac{\frac{b_0 e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - a_1}}{1 - e^{j\Omega} z^{-1}} + \frac{\frac{b_0 a_1}{a_1 - e^{j\Omega}}}{1 - a_1 z^{-1}}
\end{aligned}
$$

Nå gjenstår det bare å inverstransformere. Siden verken k_1 eller k_2 inneholder z kan disse regnes som konstanter, og vi gjenkjenner da hvilke tidsuttrykk dette er z-transformen til:

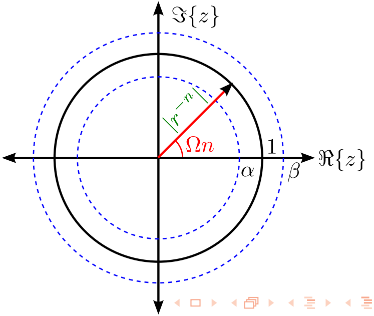
$$
\begin{aligned}
y[n] &= k_1 e^{j\Omega} u[n] + k_2 a_1 u[n] \\
&= \underbrace{\left(\frac{b_0 e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - a_1}\right) e^{j\Omega n} u[n]}_{\substack{\textbf{stasjonær respons} \\ \text{en skalert og faseskiftet} \\ \text{versjon av } x[n]}} + \underbrace{\left(\frac{b_0 a_1}{a_1 - e^{j\Omega}}\right) a_1^n u[n]}_{\substack{\textbf{transient} \\ \text{dør ut hvis } a_1 < 1}}
\end{aligned}
$$

z-transformen - Visuell representasjon

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, r^{-n}\, e^{-j\Omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, r^{-n}\, \left(\cos \Omega n - j \sin \Omega n\right)
\end{aligned}
$$



Sålenge ikke r-faktoren vokser med økende n, kan den neglisjeres og vi sitter igjen med frekvensresponsen. Dette er den **stasjonære** responsen, dvs. den vi får når alle **transienter** har dødd ut.



ROC: $|z| > \alpha$ if causal

ROC: $|z| < \beta$ if anti-causal

ROC: $\alpha < |z| < \beta$ if both

Frekvens transformen

- Hvis inngangssignalet, $x[n]$, til et LTI-system er en kompleks eksponensial, så vil utgangssignalet, $y[n]$ være likt inngangssignalet bortsett fra en kompleks skalering av amplituden.
- Amplitudeskaleringen er gitt som $H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jk\Omega}$.
- $H(\Omega)$ er generelt, komplekst, dvs.

$$
\begin{aligned}
H(\Omega) &= H_{\Re}(\Omega) + jH_{\Im}(\Omega), \\
\text{eller} \quad H(\Omega) &= |H(\Omega)|e^{j\Phi_h(\Omega)}, \\
\text{hvor} \quad |H(\Omega)|^2 &= H(\Omega)H^*(\Omega) = H_{\Re}^2(\Omega) + H_{\Im}^2(\Omega) \\
\text{and} \quad \Phi_h(\Omega) &= \tan^{-1}\frac{H_{\Im}(\Omega)}{H_{\Re}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

- $H(\Omega)$ avhenger av frekvensen Ω.

Frekvens transformasjonen ...

- $H(\Omega)$ kalles frekvensresponsen.
- Den viser hvordan en kompleks eksponensial forandres i (kompleks) amplitude når den filtreres av systemet.
- Særdeles nyttig om inngangssignalet, $x[n]$, kan dekomponeres inn i en sum av komplekse eksponensialer.
  - Responsen til

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_h e^{-\jmath n \Omega_k}$$

  - vil være

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} H(\Omega_k) \alpha_h e^{-\jmath n \Omega_k}$$

- Gruppeforsinkelsen, $\tau_h(\Omega)$, forsinkelsen til hele signalet $x[n] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_h e^{-\jmath n \Omega_k}$:

$$\tau_h(\Omega) = -\frac{d\Phi_h(\Omega)}{d\Omega}.$$

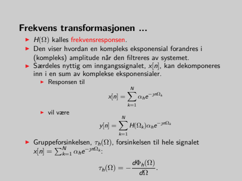
Frekvens transformasjonen ...

- $H(\Omega)$ kalles frekvensresponsen.
- Den viser hvordan en kompleks eksponensial forandres i (kompleks) amplitude når den filtreres av systemet.
- Særdeles nyttig om inngangssignalet, $x[n]$, kan dekomponeres inn i en sum av komplekse eksponensialer.
  - Responsen til
  $$x[n] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_h e^{-jn\Omega_k}$$
  - vil være
  $$y[n] = \sum_{k=1}^{N} H(\Omega_k) \alpha_h e^{-jn\Omega_k}$$
- Gruppeforsinkelsen, $\tau_h(\Omega)$, forsinkelsen til hele signalet $x[n] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_h e^{-jn\Omega_k}$:
$$\tau_h(\Omega) = -\frac{d\Phi_h(\Omega)}{d\Omega}.$$

$$\text{Gitt} \quad x[n] = \cos(\Omega_0 n) = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 n}$$

$$\begin{aligned}
\text{Da er} \quad y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 (n-k)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 (n-k)} \\
&= \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\Omega_0 k} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{j\Omega_0 k} \\
&= \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 n} H(\Omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 n} H(-\Omega_0) \\
\Re\{y[n]\} &= \left|H(\Omega_0)\right| \cos(\Omega_0 n + \Theta_H(\Omega_0))
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Siden reelle signaler både har en “positiv frekvens” og en “negativ frekvens” på kompleks form må vi bruke filtre som er symmetriske om den reelle akse, dvs. $H(\Omega) = H(-\Omega) = H^*(\Omega)$.



Frekvens transformasjonen ...

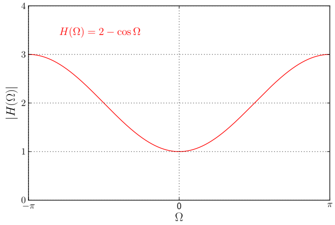
- $H(\Omega)$ kalles frekvensresponsen.
- Den viser hvordan en kompleks eksponensial forandres i (kompleks) amplitude når den filtreres av systemet.
- Særdeles nyttig om inngangssignalet, $x[n]$, kan dekomponeres inn i en sum av komplekse eksponensialer.
  - Responsen til
  $$x[n] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_h e^{-jn\Omega_k}$$
  - vil være
  $$y[n] = \sum_{k=1}^{N} H(\Omega_k)\alpha_h e^{-jn\Omega_k}$$
- Gruppeforsinkelsen, $\tau_h(\Omega)$, forsinkelsen til hele signalet $x[n] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_h e^{-jn\Omega_k}$:
$$\tau_h(\Omega) = -\frac{d\Phi_h(\Omega)}{d\Omega}.$$

Hvorfor er f.eks. $h[n] = \{-\frac{1}{2} + \underline{2} - \frac{1}{2}\} \quad \leftrightarrow \quad H(z) = -\frac{1}{2}z + 2 - \frac{1}{2}z^{-1}$ et høypassfilter?

Vi finner *frekvensresponsen* $H(\Omega)$ ved å sette $z = r\,e^{j\Omega} = e^{j\Omega}$ (dvs. $r = 1$), som betyr at vi ikke bryr oss om stabilitet men vil bare se hvordan filteret behandler de forskjellige frekvensene:

$$\begin{aligned} H(\Omega) = H(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} &= -\frac{1}{2}e^{j\Omega} + 2 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega} \\ &= 2 - \cos\Omega \end{aligned}$$

$H(\Omega)$ er gir her reelle verdier for alle Ω, noe som alltid vil bare tilfelle hvis $h[n]$ er symmetrisk om $n = 0$. $|H(\Omega)| = |2 - \cos\Omega| = 2 - \cos\Omega$ er vist til høyre, og vi kan se at signaler på lave frekvenser får dempes i amplitude, mens høye frekvenser forsterkes i amplitude. Vi tenker på det som et filter som lar høye frekvenser passere, ergo kaller vi det et høypassfilter.

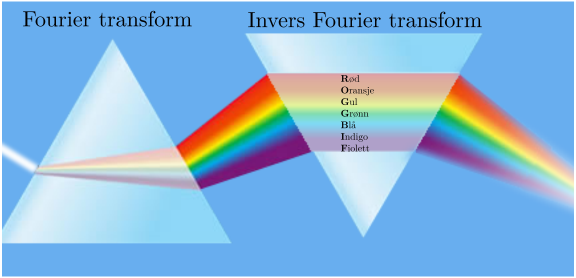


Fra tid til frekvens

- Frekvensresponsen til et LTI-system beskriver hvordan en kompleks eksponensial forandres i (kompleks) amplitude når denne anvendes på systemet.
- Hvis inngangssignalet ikke er en kompleks eksponensial, eksisterer det da en måte å transformere signalet inn i en sum av komplekse eksponensialer?
- Hvis alle (praktiske) signaler kan skrives som en (uendelig) sum av sinuser og cosinuser, hvordan finner vi da denne summen gitt en sekvens $x[n]$?

Fourierrepresentasjon av et signal ...

- Spiller en veldig viktig rolle i både kontinuerlig tid og diskret tid signalbehandling.
- Beskriver en metode for å transformere et signal fra et domene til et annet slik at vi kan manupulere signalet her.
  - Konvolusjon blir multiplikasjon (sånn nesten ...).
- Gir en annen måte/arena å tolke signaler og systemer.
  - Analogi:



Fourier transformasjonen til diskrete ikke-periodisk signaler.

- $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$.
  - $X(\Omega)$ representerer frekvensinnholdet i signalet $x[n]$, dvs.
  - $X(\Omega)$ er en dekomposisjon av $x[n]$ inn i sine frekvenskomponenter.
- Unik over frekvensintervallet $(-\pi, \pi)$, eller ekvivalent $(0, 2\pi)$.
- $X(\Omega)$ er periodisk med periode 2π.
- $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$.

Fourier transformasjonen til diskrete ikke-periodisk signaler ...

- Konvergerer: $X_N(\Omega) = \sum_{n=-N}^{N} x[n]e^{-\jmath\Omega n}$ konvergerer uniformt til $X(\Omega)$, dvs. $\lim_{N\to\infty} \{\sup_\Omega |X(\Omega) - X_N(\Omega)|\} = 0$.
    - Garantert hvis $x[n]$ er absolutt summerbar.
- Mulig med kvadratisk summerbare sekvenser hvis *mean-square* konvergenskriterium er oppfylt.
- Energitetthetsspekter $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$.

Discrete-time Fourier transform; DTFT

Notasjon:

- Analysis : $X(\Omega) \equiv = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-\jmath \Omega n}$.
- Alternativt: $X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-\jmath 2\pi F n}$.
- Syntese : $x[n] \equiv \{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{\jmath \Omega n} d\Omega$.
- Alternativt: $x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(F) e^{\jmath 2\pi n F} dF$.
- $x[n] \leftrightarrow X(\Omega)$.

Fra z-transf. til DTFT

- Finner $X(\Omega)$ ved å evaluere z-transformasjonen langs enhetssirkelen.
- $X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$
  - $z = Re^{\jmath 2\pi F}$, der $F = \frac{f}{F_s}$. Vi setter $R = 1$ og får:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{\jmath 2\pi Fn} \\ &= X(\Omega). \end{aligned}$$