

UiO : **University of Oslo**

## Uke 6: Analyse i frekvensdomenet

Jo Inge Buskenes

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

INF3470/4470, høst 2012



# Dagens temaer

Fra forrige gang

Frekvensrespons funksjonen

Fourier rekker og transform

Egenskaper til DT Fourier transform

LTI systemer som frekvens-selektive filtre

# Tema

Fra forrige gang

## z-transformasjonen

- ▶ Definisjon; formel + ROC
- ▶ Egenskaper
- ▶ Drøfte systemer vha z-transformen
- ▶ Invers z-transformasjon
- ▶ Poler og nullpunkter

## Egenfunksjoner til et LTI system

- ▶ La

$$x[n] = e^{jn\Omega}, \quad -\infty < n < \infty, \quad \Omega \in [-\pi, \pi].$$

- ▶ Da er

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\Omega(n-k)} = e^{jn\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jk\Omega} \\ &= H(\Omega)e^{jn\Omega} = H(\Omega)x[n]. \end{aligned}$$

- ▶ dvs at egenfunksjonen til et LTI system er

$$x[n] = e^{jn\Omega}, \quad -\infty < n < \infty, \quad \Omega \in [-\pi, \pi].$$

- ▶ og egenverdien, benevnt  $H(\Omega)$ , er

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jk\Omega}.$$

## Diskret tid Fourier transform; DTFT

Notasjon:

- ▶ Analyse :  $X(\Omega) \equiv \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$ .
- ▶ Alternativt:  $X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn}$ .
- ▶ Syntese :  $x[n] \equiv \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$ .
- ▶ Alternativt:  $x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(F)e^{j2\pi Fn} dF$ .
- ▶  $x[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\Omega)$ .

- Analyse:  $X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$ .
- Alternativt:  $X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi F n}$ .
- Synese:  $x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$ .
- Alternativt:  $x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(F)e^{j2\pi F n} dF$ .
- $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)$ .

- $H(\Omega)$  plottes. Som oftest er det  $|H(\Omega)|$  vi er mest interessert i.
- Filtre med konstant gruppeforsinkelse sier vi har *lineær fase*. Da plottes ikke faseten.

# Tema

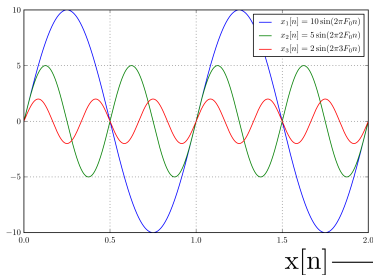
Frekvensrespons funksjonen



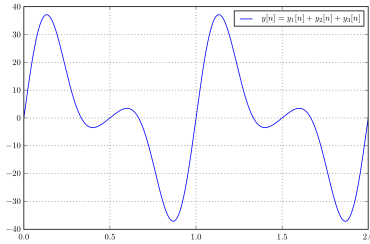
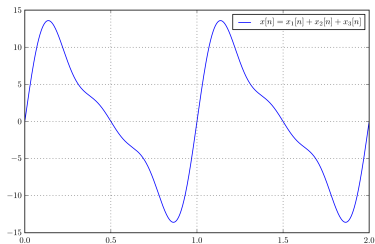
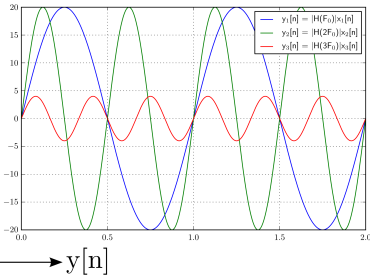
## $H(\Omega)$ : Frekvensresponsen

- ▶  $H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jk\Omega}$ .
- ▶  $H(\Omega)$  er en funksjon av frekvensvariabelen  $\Omega$ .
- ▶  $H(\Omega)$  er, generelt, **en kompleks størrelse**, og kan skrives som:
  - ▶ Reell og imaginær del:  $H(\Omega) = H_R(\Omega) + jH_I(\Omega)$  eller
  - ▶ Magnitude og fase:  $H(\Omega) = |H(\Omega)|e^{j\Theta(\Omega)}$ ,
  - ▶ hvor  $|H(\Omega)|^2 = H(\Omega)H^*(\Omega) = H_R^2(\Omega) + H_I^2(\Omega)$
  - ▶ og  $\Theta(\Omega) = \tan^{-1} \frac{H_I(\Omega)}{H_R(\Omega)}$ .
- ▶ Gruppeforsinkelsen (eller envelopeforsinkelsen) til  $H$ :
 
$$\tau_g(\Omega) = -\frac{d\Theta(\Omega)}{d\Omega}.$$
  - ▶ [http://en.wikipedia.org/wiki/Group\\_velocity](http://en.wikipedia.org/wiki/Group_velocity)
- ▶ Periodisitet: Siden  $x[n] = e^{jn\Omega_0} = e^{jn(\Omega_0+2\pi)}$ , må vi ha at  $H(\Omega_0) = H(\Omega_0 + 2\pi)$ .

# $H(\Omega)$ : Frekvensresponsen

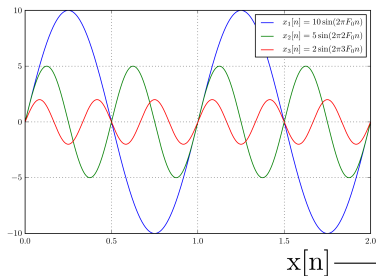


$H(F)$

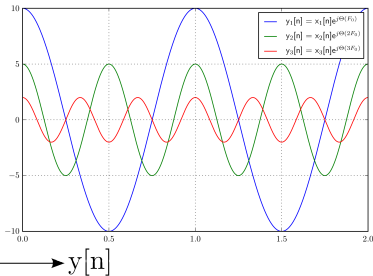


► Hva er  $|H(F_0)|$ ,  $|H(2F_0)|$  og  $|H(3F_0)|$ ?

# $H(\Omega)$ : Frekvensresponsen

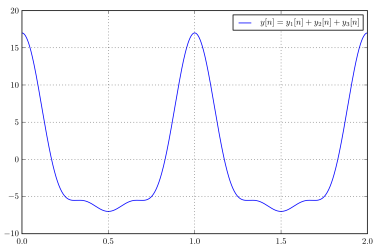
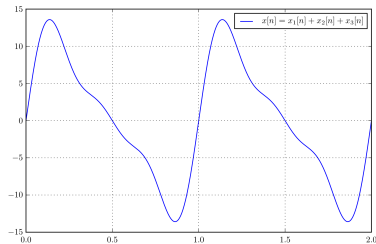


$H(F)$



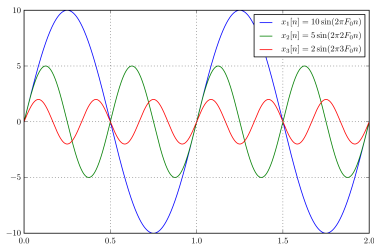
$x[n] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n]$

$y[n]$



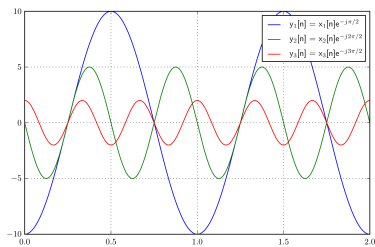
► Hva er  $\Theta_H(F_0)$ ,  $\Theta_H(2F_0)$  og  $\Theta_H(3F_0)$ ?

## $H(\Omega)$ : Frekvensresponsen

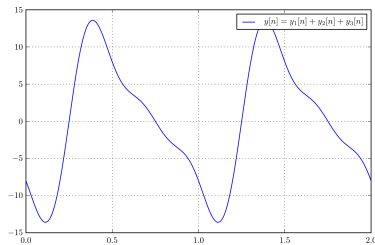
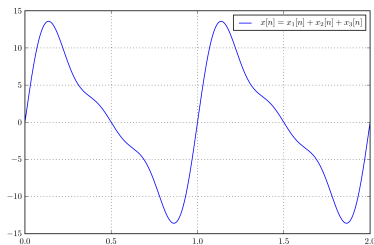


$x[n]$

$H(F)$



$y[n]$



- Konstant tidsskift: Når fasen er proporsjonal med frekvensen (*lineær*).

## Eksempel

Vi har gitt et LTI-system med impulsrespons

$h[n] = \alpha^n u[n]$ ,  $\alpha \in \mathfrak{R}$ ,  $|\alpha| < 1$ . Frekvensresponsen er da

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-jn\Omega} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k e^{-jn\Omega} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\Omega})^k = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}. \end{aligned}$$

Amplituderrespons:  $|H(\Omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \cdot \frac{1}{1 - \alpha e^{j\Omega}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \Omega}}$

Faserespons:  $\Theta(\Omega) = \tan^{-1} \frac{H_I(\Omega)}{H_R(\Omega)} = \tan^{-1} \frac{-\alpha \sin \Omega}{1 - \alpha \cos \Omega}$ .

Gruppeforsinkelse:  $\tau_g(\Omega) = -\frac{\alpha^2 - \alpha \cos \Omega}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \Omega}$ .

## Eksempel

Vi har gitt et LTI-system med impulsvrespons  
 $h[n] = \alpha^n u[n]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $|\alpha| < 1$ . Frekvensresponsen er da

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\Omega k} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k e^{-j\Omega k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\Omega})^k = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \end{aligned}$$

Amplituderespons:  $|H(\Omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 - \alpha \cos \Omega} \frac{1}{1 - \alpha \cos \Omega}} = \frac{1}{1 - \alpha \cos \Omega}$

Faserespons:  $\Theta(\Omega) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}\{H(\Omega)\}}{\text{Re}\{H(\Omega)\}} = \tan^{-1} \frac{-\alpha \sin \Omega}{1 - \alpha \cos \Omega}$

Gruppeforsinkelse:  $\tau_g(\Omega) = -\frac{\text{Im}\{j\Omega H(\Omega)\}}{1 - \alpha \cos \Omega}$

Å regne ut gruppeforsinkelsen er en fin måte å repetere derivasjonsregler på:

$$\begin{aligned} \tau_g(\Omega) &= -\frac{d\Theta(\Omega)}{d\Omega} = \Theta'(\Omega) \\ &= -\left( \tan^{-1} \frac{-\alpha \sin \Omega}{1 - \alpha \cos \Omega} \right)' \\ &= -\frac{1}{1 + \left( \frac{-\alpha \sin \Omega}{1 - \alpha \cos \Omega} \right)^2} \left( \frac{-\alpha \sin \Omega}{1 - \alpha \cos \Omega} \right)' \quad \text{(kjerne-)} \\ &= -\frac{1}{1 + \left( \frac{-\alpha \sin \Omega}{1 - \alpha \cos \Omega} \right)^2} \frac{(-\alpha \sin \Omega)'(1 - \alpha \cos \Omega) - (-\alpha \sin \Omega)(1 - \alpha \cos \Omega)'}{(1 - \alpha \cos \Omega)^2} \quad \text{(kvotient-)} \\ &= -\frac{1}{1 + \frac{(\alpha \sin \Omega)^2}{(1 - \alpha \cos \Omega)^2}} \frac{-\alpha \cos \Omega(1 - \alpha \cos \Omega) + \alpha \sin \Omega \alpha \sin \Omega}{(1 - \alpha \cos \Omega)^2} \quad \left| \cdot \frac{(1 - \alpha \cos \Omega)^2}{(1 - \alpha \cos \Omega)^2} \right. \\ &= -\frac{-\alpha \cos \Omega + \alpha^2 \cos^2 \Omega + \alpha^2 \sin^2 \Omega}{1 - 2\alpha \cos \Omega + \alpha^2 \cos^2 \Omega + \alpha^2 \sin^2 \Omega} \\ &= -\frac{-\alpha \cos \Omega + \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos \Omega + \alpha^2} \quad \text{(\sin}^2 \Omega + \cos^2 \Omega = 1) \end{aligned}$$

# Tema

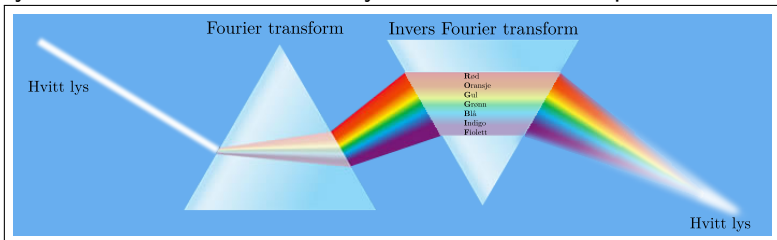
Fourier rekker og transformer

Kontinuerlig tid Fourier rekke og transform

Frekvens analyse av diskret tid periodiske signaler

## Fourier rekker og transformers

- ▶ **Mål:** Utvikle et matematisk verktøy (et “prisme”) som dekomponerer signaler (“lys”) inn forskjellige frekvenskomponenter (“farger”).
- ▶ **Videre:** Utvikle verktøyet (“det inverse prismet”) som syntetiserer tilbake det hvite lyset fra frekvenskomponentene.





# De fire Fourier rekkene/transformasjonene

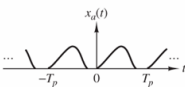
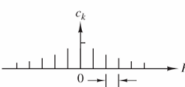
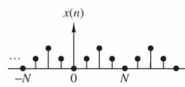
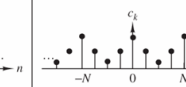
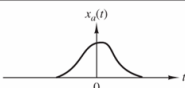
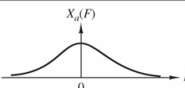
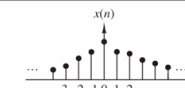
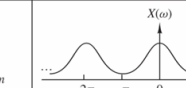
		Continuous-time signals		Discrete-time signals	
		Time-domain	Frequency-domain	Time-domain	Frequency-domain
Periodic signals Fourier series	 $c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x_a(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$ $F_0 = \frac{1}{T_p}$	 $x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$	 $c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi/N kn}$	 $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j(2\pi/N)kn}$	
	Continuous and periodic	Discrete and aperiodic	Discrete and periodic	Discrete and periodic	
Aperiodic signals Fourier transforms	 $X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt$	 $x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF$	 $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$	 $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$	
	Continuous and aperiodic	Continuous and aperiodic	Discrete and aperiodic	Continuous and periodic	

Figure 4.3.1 Summary of analysis and synthesis formulas.

## Kontinuerlig tid: Fourier rekke og transform

- ▶ Fourier rekker: Dekomposisjon av signaler til sum av sinus/cosinus ledd (eller komplekse eksponensialer)  
→ *frekvens domenet*.
- ▶ De aller fleste signaler av praktisk interesse kan dekomponeres i en sum av sinus/cosinus ledd.
  - ▶ Periodiske signaler: Fourier rekke (Fourier series).
  - ▶ Endelig energi signaler: Fourier transform.
- ▶ Viktig i analyse av LTI systemer:
  - ▶ Et LTI systems respons til en sinus/cosinus er en tilsvarende sinus/cosinus, men med en (kompleks) skalering.
  - ▶ Et LTI systems respons til en lineær sum av sinus/cosinus ledd er en tilsvarende sum av sinus/cosinus ledd med kun en mulig kompleks skalering av hvert ledd.

# Kontinuerlig tid (CT) og periodiske signaler

## ⇒ Fourier rekker

- ▶ Hvis  $x(t)$  er et periodisk signal som tilfredstiller Dirichlets krav, så er

- ▶ Syntese likn.: 
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t}.$$

- ▶ Analyse likn.: 
$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt.$$

- ▶ Dirichlets krav:

1. Signalet  $x(t)$  har et endelig antall diskontinuiteter innenfor enhver periode.
2. Signalet  $x(t)$  innehar et endelig antall maks og min punkter innenfor enhver periode.
3. Signalet  $x(t)$  er absolutt integrerbar innefor enhver periode, dvs  $\int_{T_p} |x(t)| dt < \infty$ .

- ▶ I praksis vil alle periodiske signaler av interesse tilfredstille disse kravene.

- ▶ Andre periodiske signaler kan også ha en Fourier rekke representasjon

## → Fourier rekker

- Hvis  $x(t)$  er et periodisk signal som tilfredstiller Dirichlets krav, så er
  - Syntheselien:  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t}$
  - Analyselien:  $c_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$
- Dirichlets krav:
  1. Signalet  $x(t)$  har et endelig antall diskontinuiteter innenfor enhver periode.
  2. Signalet  $x(t)$  innehar et endelig antall maks og min punkter innenfor enhver periode.
  3. Signalet  $x(t)$  er absolutt integrerbar innenfor enhver periode, dvs  $\int_{t_0}^{t_0+T_p} |x(t)| dt < \infty$ .
- I praksis vil alle periodiske signaler av interesse tilfredstille disse kravene.
- Andre periodiske signaler kan også ha en Fourier rekke representasjon.

Hvis vi har et kontinuerlig periodisk signal  $x(t)$  så må dette kunne skrives som en sum av et endelig antall frekvenskomponenter  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t}$ . Vi finner  $c_k$  ved å gange med  $e^{j2\pi l f_0 t}$  ( $l \in \mathbb{Z}$ ) og integrere over en periode (får da ut amplituden):

$$\begin{aligned}
 c_l &= \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi l f_0 t} dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_0+T_p} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t} \right) e^{-j2\pi l f_0 t} dt \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt
 \end{aligned}$$

## → Fourier rekker

- Hvis  $x(t)$  er et periodisk signal som tilfredstiller Dirichlets krav, så er
  - Syntheselien:  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k t}$
  - Analyzelien:  $c_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j2\pi k t} dt$
- Dirichlets krav:
  1. Signalet  $x(t)$  har et endelig antall diskontinuiteter innenfor enhver periode.
  2. Signalet  $x(t)$  innehar et endelig antall maks og min punkter innenfor enhver periode.
  3. Signalet  $x(t)$  er absolutt integrerbar innenfor enhver periode, dvs.  $\int_{t_0}^{t_0+T_p} |x(t)| dt < \infty$ .
- I praksis vil alle periodiske signaler av interesse tilfredstille disse kravene.
- Andre periodiske signaler kan også ha en Fourier rekkerepresentasjon.

Hva blir dette hvis  $k \neq l$ ?

$$\begin{aligned}
 c_l &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{j2\pi(k-l)f_0} \left[ e^{j2\pi(k-l)f_0 t} \right]_{t_0}^{t_0+T_p} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{j2\pi(k-l)f_0} \left( e^{j2\pi(k-l)f_0(t_0+T_p)} - e^{j2\pi(k-l)f_0 t_0} \right) \\
 &= 0 \quad \text{ siden } \quad e^{j(\dots)t} = e^{j(\dots)(t+T_p)}
 \end{aligned}$$

## ⇒ Fourier rekker

- Hvis  $x(t)$  er et periodisk signal som tilfredstiller Dirichlets krav, så er
  - Syntheselink:  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t}$
  - Analyselink:  $c_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$
- Dirichlets krav:
  1. Signalet  $x(t)$  har et endelig antall diskontinuiteter innenfor enhver periode.
  2. Signalet  $x(t)$  innehar et endelig antall maks og min punkter innenfor enhver periode.
  3. Signalet  $x(t)$  er absolutt integrerbar innenfor enhver periode, dvs.  $\int_{t_0}^{t_0+T_p} |x(t)| dt < \infty$ .
- I praksis vil alle periodiske signaler av interesse tilfredstille disse kravene.
- Andre periodiske signaler kan også ha en Fourier rekke representasjon.

...og hvis  $k = l$ ?

$$c_l = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j2\pi 0 f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_p} dt = T_p c_k$$

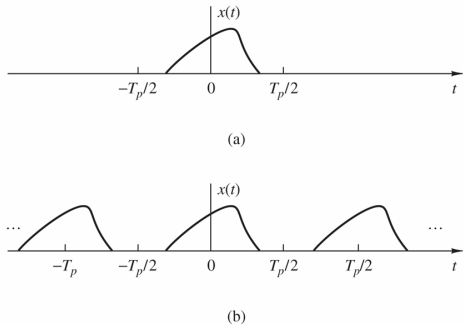
Ergo:

$$c_k = \frac{1}{T_p} c_l = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi l f_0 t} dt$$

Det kan også vises at for et gitt valg av basis  $e^{j2\pi k f_0 t}$  er Fourier-rekka en minste kvadraters løsning.

## Fourier transformasjonen til CT signaler

- ▶ Betrakt et aperiodisk signal  $x(t)$  med endelig lengde.
- ▶ Konstruer et periodisk signal  $x_p(t)$  med periode  $T_p$ .
- ▶ Da er  $x(t) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} x_p(t)$ .



**Figure 4.1.7** (a) Aperiodic signal  $x(t)$  and (b) periodic signal  $x_p(t)$  constructed by repeating  $x(t)$  with a period  $T_p$ .

## Fourier transformasjonen til CT signaler, *fortsettelse*

- ▶ Hvis  $x(t)$  er et aperiodisk signal som tilfredstiller Dirichlets krav, så er

- ▶ Syntese likn.:  $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df.$

- ▶ Analyse likn.:  $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt.$

- ▶ Dirichlets krav:

1. Signalet  $x(t)$  har et endelig antall diskontinuiteter.
2. Signal  $x(t)$  innehar et endelig antall maks og min punkter.
3. Signal  $x(t)$  er absolutt integrerbart, dvs  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$

- ▶ **Alle signaler av praktisk interesse tilfredstiller disse kravene.**



## Diskret tid Fourier rekker.

- ▶ Gitt et signal  $x[n]$  med periode  $N$ , dvs.  $x[n] = x[n + N] \forall N$ . Da har vi:

- ▶ Syntese likn.:  $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$ .

- ▶ Analyse likn.:  $c_l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi ln/N}$ ,  $l = 0, 1, \dots, N-1$ .

- ▶  $\{c_k\}$  representerer amplitude og fase til frekvenskoeffisienten  $s_k[n] = e^{j2\pi kn/N} = e^{j\Omega_k n}$ ,  $\Omega_k = 2\pi k/N$ .
- ▶  $\{c_k\}$  er periodisk med periode  $N$ .
- ▶ **Endelig mengde informasjon i både tid og frekvens.** Dette kan datamaskiner håndtere!!!

## Diskret tid Fourier rekker.

### Energitetthetsspekter av periodiske sekvenser:

Gjennomsnittlig energi av et diskret tid periodisk signal:

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2.$$

Dvs. energien må være lik i tid og frekvens  $\rightarrow$  Parseval's relasjon.

### Fourier rekker av reelle diskrete periodiske signaler:

- ▶ Hvis  $x[n]$  er reell ( $x^*[n] = x[n]$ ), så er
  - ▶  $c_k^* = c_{-k}$ , eller også
  - ▶ Like symmetri:  $|c_{-k}| = |c_k|$ ,
  - Ulike symmetri:  $-\angle c_{-k} = \angle c_k$ .

- ▶ Reelle signaler kan uttrykkes som

$$\begin{aligned} x[n] &= c_0 + 2 \sum_{k=1}^L |c_k| \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn + \theta_k\right) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^L \left( a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) - b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \right), \end{aligned}$$

hvor  $a_0 = c_0$ ,  $a_k = 2|c_k| \cos \theta_k$ ,  $b_k = 2|c_k| \sin \theta_k$ , og  $L = N/2$  hvis  $N$  like og  $L = (N - 1)/2$  hvis  $N$  ulike.

## Diskret tid Fourier rekker.

Energitetthetspekter av periodiske sekvenser:  
Gjennomsnittlig energi av et diskret tid periodisk signal:

$$P_s = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

Dvs. energien må være lik i tid og frekvens  $\rightarrow$  Parseval's relasjon.

## Fourier rekker av reelle diskrete periodiske signaler:

- Hvis  $x[n]$  er reall ( $x^*[n] = x[n]$ ), så er
  - $c_k^* = c_{-k}$ , eller også
  - Like symmetri:  $|c_{-k}| = |c_k|$ .
  - Ulike symmetri:  $-\angle c_{-k} = \angle c_k$ .
- Reelle signaler kan uttrykkes som
 
$$x[n] = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{L-1} |c_k| \cos(\frac{2\pi}{N}kn + \theta_k)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{L-1} (a_k \cos(\frac{2\pi}{N}kn) - b_k \sin(\frac{2\pi}{N}kn))$$
 hvor  $a_0 = c_0$ ,  $a_k = 2|c_k| \cos \theta_k$ ,  $b_k = 2|c_k| \sin \theta_k$ , og  $L = N/2$  hvis  $N$  like og  $L = (N-1)/2$  hvis  $N$  ulike.

Diskret Fourier transform av reelle signaler  $x[n] = x^*[n]$ .

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi ln/N} \quad l = 0, 1, \dots, N-1$$

$$c_k^* = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j2\pi ln/N} = c_{-k}$$

$\Rightarrow$  Med reelle signaler får vi symmetriske  $c_k$  / symmetri i frekvensdomenet.

## Fourier transformasjonen til diskrete ikke-periodiske signaler.

- ▶ Hvis  $x[n]$  er et diskret ikke-periodisk signal:

- ▶ Syntese likn.:  $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega.$

- ▶ Analyse likn.:  $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}.$

- ▶  $X(\Omega)$  representerer frekvensinnholdet i signalet  $x[n]$ , dvs.  $X(\Omega)$  er en dekomposisjon av  $x[n]$  inn i sine frekvenskomponenter.
- ▶ Unik over frekvensintervallet  $(-\pi, \pi)$ , eller ekvivalent  $(0, 2\pi)$ .
- ▶  $X(\Omega)$  er periodisk med periode  $2\pi$ .

## Fourier transformasjonen til diskrete ikke-periodiske signaler, *fortsettelse*

- ▶ Konvergerer:  $X_N(\Omega) = \sum_{n=-N}^N x[n]e^{-j\Omega n}$  konvergerer uniformt til  $X(\Omega)$ , dvs.  $\lim_{N \rightarrow \infty} \{\sup_{\Omega} |X(\Omega) - X_N(\Omega)|\} = 0$ .
  - ▶ Garantert hvis  $x[n]$  er absolutt summerbar.
- ▶ Mulig med kvadratisk summerbare sekvenser hvis *mean-square* konvergenzkriterium er oppfylt.
- ▶ Energitetthetsspekter

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega.$$

- Konvergerer:  $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$  konvergerer uniformt til  $X(\Omega)$ , dvs.  $\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{\Omega} |X(\Omega) - X_M(\Omega)| = 0$ .
  - Garantert hvis  $x[n]$  er absolutt summerbar.
- Mulig med kvadratisk summerbare sekvenser hvis mean-square konvergenzkriterium er oppfylt.
- Energitethetspekter  
 $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$ .

**Absolutt summerbarhet** - et tilstrekkelig krav: Hvis

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty,$$

så vil:

$$|X(\Omega)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

Dvs.  $x[n]$  er absolutt summerbar hvis  $X(\Omega)$  er endelig. Dette tilsvarer BIBO stabilitet, eller at enhets sirkelen ligger i ROC.

## Diskret tid Fourier transform; DTFT

Notasjon:

▶ Analyse: 
$$X(\Omega) \equiv \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}.$$

▶ Alternativt: 
$$X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn}.$$

▶ Syntese: 
$$x[n] \equiv \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega.$$

▶ Alternativt: 
$$x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(F)e^{j2\pi nF} dF.$$

▶  $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega).$

# Fra z-transf. til DTFT

- ▶ Finner  $X(\Omega)$  ved å evaluere z-transformasjonen langs enhets sirkelen.

- ▶  $X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \stackrel{R=1}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn}$

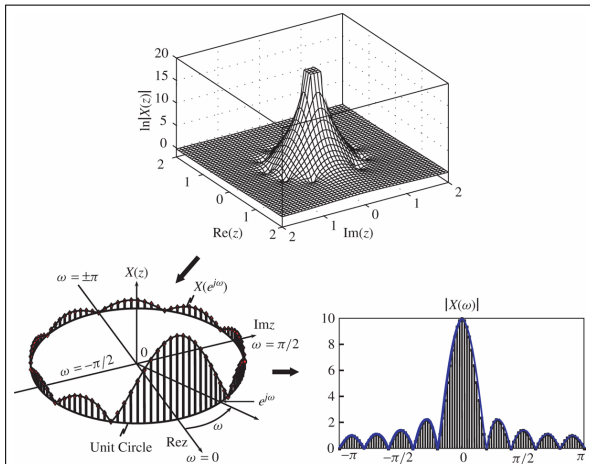


Figure 4.2.9 relationship between  $X(z)$  and  $X(\omega)$  for the sequence in Example 4.2.4, with  $A = 1$  and  $L = 10$

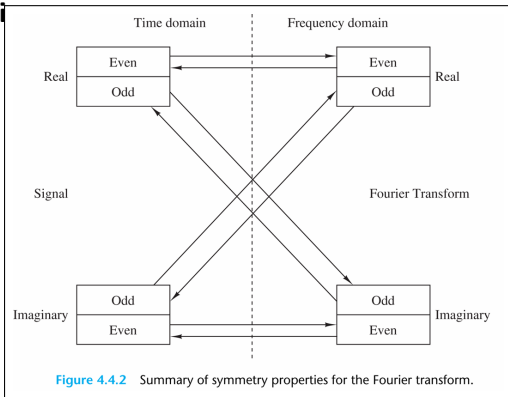


# Tema

Egenskaper til DT Fourier transform

# Egenskaper til DTFT

## ► Symmetri



Reelle signaler  $x[n]$  har konjugert symmetrisk  $X(\Omega)$ .

## ► Linearitet:

$$\mathcal{F}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = a\mathcal{F}\{x_1[n]\} + b\mathcal{F}\{x_2[n]\}.$$

## ► Shifting i tid:

$$\mathcal{F}\{x[n - k]\} = X(\Omega)e^{-j\Omega k}.$$

(dvs. frekvensinnhold avhenger **bare** av form.)

## Egenskaper til DTFT, *fortsettelse*

▶ **Tidsreversering:**

$$\mathcal{F}\{x[-n]\} = X(-\Omega)$$

(dvs. frekvensinnhold reellt signal ( $X(-\Omega) = X^*(\Omega)$ ) avhenger bare av form.)

▶ **Konjugering:**

$$\mathcal{F}\{x^*[n]\} = X^*(-\Omega).$$

▶ **Konvolusjon:**

$$\mathcal{F}\{x_1[n] * x_2[n]\} = \mathcal{F}\{x_1[n]\} \mathcal{F}\{x_2[n]\} = X_1(\Omega) X_2(\Omega).$$

▶ **Korrelasjon:**  $\mathcal{F}\{r_{x_1 x_2}\} = S_{x_1 x_2} = X_1(\Omega) X_2(-\Omega).$

*Kryss-korrelasjonstetthetsspektrum.*

▶ **Wiener-Khintchine teorem:**

La  $x[n]$  være et reellt signal. Da er

$$\mathcal{F}\{r_{xx}(l)\} = S_{xx}(\Omega) = X(\Omega) X(-\Omega) = X(\Omega) X^*(\Omega).$$

(Ingen faseinformasjon, dvs ikke unik!)

## Egenskaper til DTFT, *fortsettelse*

- ▶ **Shifting i frekvens:**

$$\mathcal{F}\{x[n]e^{j\Omega_0 n}\} = X(\Omega - \Omega_0).$$

$$\text{Modulasjon: } \mathcal{F}\{x[n] \cos[\Omega_0 n]\} = \frac{1}{2}[X(\Omega + \Omega_0) + X(\Omega - \Omega_0)].$$

- ▶ **Parseval's relasjon / energikonservering:**

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega.$$

- ▶ **Multiplikasjon:**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_1[n] \cdot x_2[n]\} &= \mathcal{F}\{x_1[n]\} \circledast \mathcal{F}\{x_2[n]\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int X_1(\theta) X_2(\Omega - \theta) d\theta \end{aligned}$$

⊛: *Periodic convolution.*

# Sammenheng mellom system funksjon og frekvens respons

- ▶  $H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n}$
- ▶ Hvis  $H(z)$  rasjonell,

$$H(\Omega) = \frac{B(\Omega)}{A(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\Omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\Omega k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k e^{-j\Omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k e^{-j\Omega})}, \quad (1)$$

hvor  $\{a_k\}$  og  $\{b_k\}$  reelle, men  $\{z_k\}$  og  $\{p_k\}$  kan være komplekse.

- ▶ Magnitude kvadrert:  $|H(\Omega)|^2 = H(\Omega)H^*(\Omega)$ 
  - ▶  $H^*(\Omega)$  finnes ved å evaluere  $H^*(1/z^*)$  på enhetssirkelen.
  - ▶ Når  $\{h[n]\}$  reell (=  $\{a_k\}$  and  $\{b_k\}$  reelle)
    - ⇒ komplekse poler og nullpunkter opptrer i kompleks-konjugerte par
    - ⇒  $H^*(1/z^*) = H(z^{-1})$ , dvs.  $H^*(\Omega) = H(-\Omega)$  og
    - $|H(\Omega)|^2 = H(\Omega)H^*(\Omega) = H(\Omega)H(-\Omega) = H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j\Omega}}$ .

# Tema

LTI systemer som frekvens-selektive filtre  
Ideell filterkarakteristikk & enkle filtre

## Ideell filterkarakteristikk

- ▶ Ideelle filtre har konstant magnitudekarakteristikk.
  - ▶ Skal se på responskarakteristikk av **lavpass**, **høypass**, **båndpass**, **all-pass** og **båndstop** eller **bånd-eliminajons** filtre.
- ▶ Lineær faserespons  
**Ideelle filtre har lineær fase i passbåndet.**
- ▶ I alle tilfeller: Ideelle filtre er ikke fysisk realiserbare!
- ▶ Design av enkle digitale filtre
  1. Basert på pol- og nullpunkt plassering.
  2. Alle poler innenfor enhetssirkelen (nullpkt hvor som helst).
  3. Komplekse poler/nullpkt. i komplekskonjugerte par.

# Ideell filterkarakteristikk, *fortsettelse*

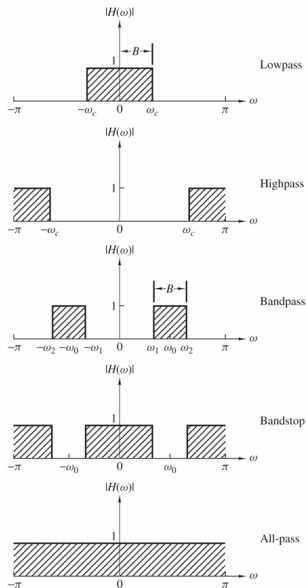


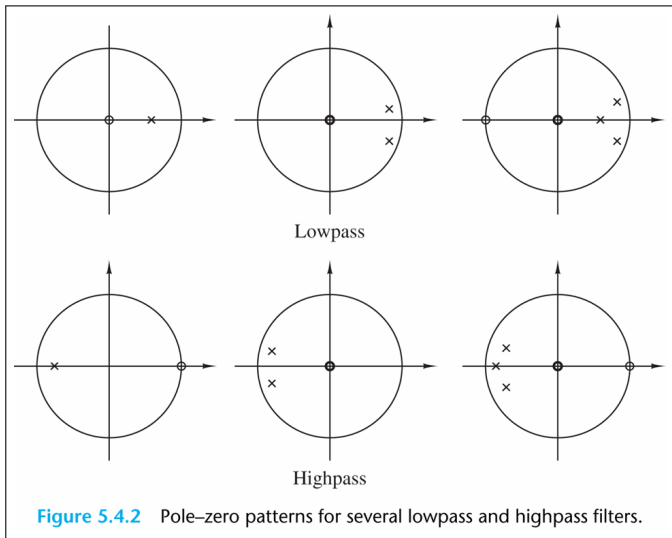
Figure 5.4.1 Magnitude responses for some ideal frequency-selective



## Enkle filtre

- ▶ Lavpass
- ▶ Lavpass til høypass transformasjon  
 $H_{hp}(\Omega) = H_{lp}(\Omega - \pi)$ , i.e.  
 $h_{hp}[n] = (e^{j\pi})^n h_{lp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n]$ .
- ▶ Digitale resonatorer
- ▶ Notch filtre
- ▶ Kam filtre
- ▶ All-pass filtre

## Lavpass and høypass filtre



- └ LTI systemer som frekvens-selektive filtre
  - └ Ideell filterkarakteristikk & enkle filtre

Lavpass and høypass filtre

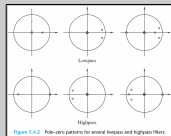


Figure 5.4.2 Pole-zero patterns for several lowpass and highpass filters.

**Realiserbarhet** (et ideelt lavpass filter):

$$h_{lp}(n) = \frac{\sin(\omega_c \pi n)}{\pi n} \quad -\infty < n < \infty$$

To problemer:

- Ikke kausalt.
- Ikke absolutt summerbart  $\Rightarrow$  ustabil!

**Design av lavpass:**

- Poler nær enhets sirkel ved lave frekvenser (høyre side).
- Nullpunkt nær enhets sirkel ved høye frekvenser (venstre side).

**Design av høypass:**

- Ta et lavpassfilter og bytt plassering av poler og nullpunkt.

# Lavpass and høypass filtre, *fortsettelse*

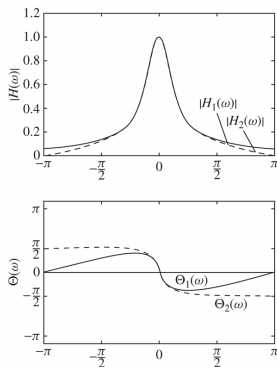


Figure 5.4.3 Magnitude and phase response of (1) a single-pole filter and (2) a one-pole, one-zero filter;  $H_1(z) = (1-a)/(1-az^{-1})$ ,  $H_2(z) = [(1-a)/2][(1+z^{-1})/(1-az^{-1})]$  and  $a = 0.9$ .

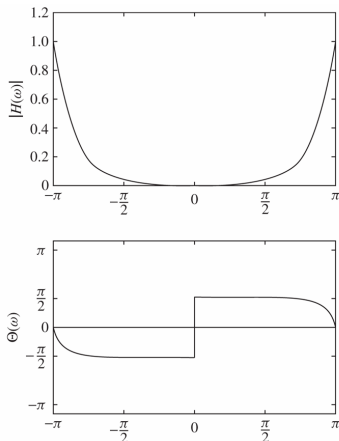
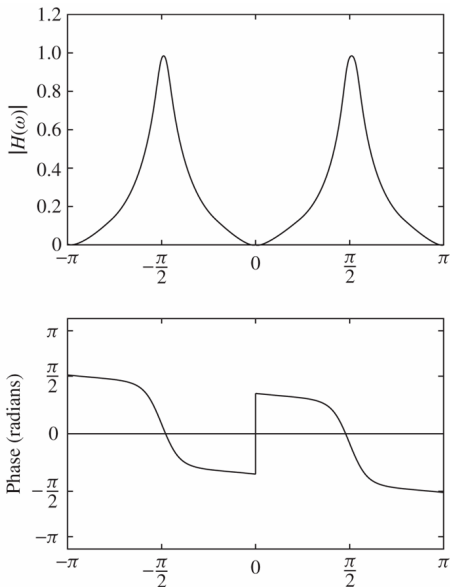


Figure 5.4.4 Magnitude and phase response of a simple highpass filter;  $H(z) = [(1-a)/2][(1-z^{-1})/(1+az^{-1})]$  with  $a = 0.9$ .

# Båndpass filter



**Figure 5.4.5** Magnitude and phase response of a simple bandpass filter in Example 5.4.2;  $H(z) = 0.15[(1 - z^{-2})/(1 + 0.7z^{-2})]$ .

- LTI systemer som frekvens-selektive filtre
  - Ideell filterkarakteristikk & enkle filtre

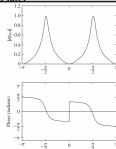


Figure 5.4.5: Magnitude and phase response of a simple bandpass filter in Example 5.4.2:  $H(z) = 0.15(1 - z^{-2}) / (z^2 + 0.7)$

$$H(z) = 0.15 \frac{1 - z^{-2}}{1 + 0.7z^{-2}} = 0.15 \frac{z^2 - 1}{z^2 + 0.7} = 0.15 \frac{(z - 1)(z + 1)}{(z - 0.83j)(z + 0.83j)}$$

# Digital resonator

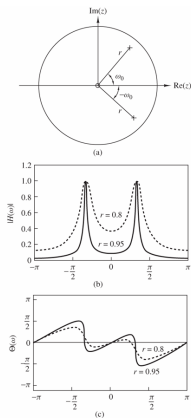


Figure 5.4.6 (a) Pole-zero pattern and (b) the corresponding magnitude and phase response of a digital resonator with (1)  $r = 0.8$  and (2)  $r = 0.95$ .

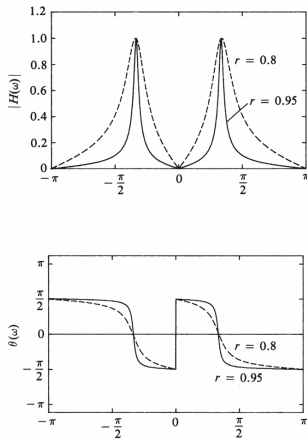


Figure 5.4.7 Magnitude and phase response of digital resonator with zeros at  $\omega = 0$  and  $\omega = \pi$  and (1)  $r = 0.8$  and (2)  $r = 0.95$ .

- LTI systemer som frekvens-selektive filtre
  - Ideell filterkarakteristikk & enkle filtre

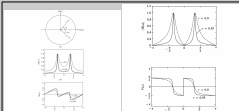


Figure 12.12 (a) Pole-zero plot and (b) the corresponding magnitude and phase responses of a digital resonator with  $r = 0.9$  and  $\omega_0 = \pi/3$ .

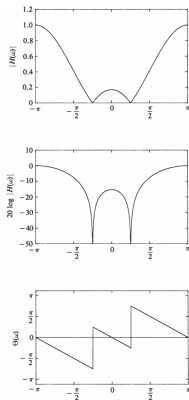
Figure 12.13 Magnitude and phase responses of digital resonators with poles at  $r = 0.9$  and  $r = 0.99$  and  $\omega_0 = \pi/3$  and  $\Omega_0 = \pi/3$ .

## Digital resonator:

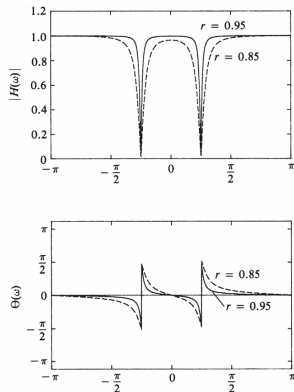
- To-pols bandpass filter med par av komplekskonjugerte poler nær enhetssirkelen:  $p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$   $0 < r < 1$
- I tillegg kan opptil to nullpunkt velges. To opplagte kandidater:  $z_{1,2} \in \{0, \pm 1\}$ .



# Notch filter

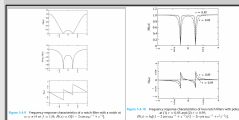


**Figure 5.4.9** Frequency response characteristics of a notch filter with a notch at  $\omega = \pi/4$  or  $f = 1/8$ ;  $H(z) = G[1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}]$ .



**Figure 5.4.10** Frequency response characteristics of two notch filters with poles at (1)  $r = 0.85$  and (2)  $r = 0.95$ ;  
 $H(z) = b_0[(1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}) / (1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2})]$ .

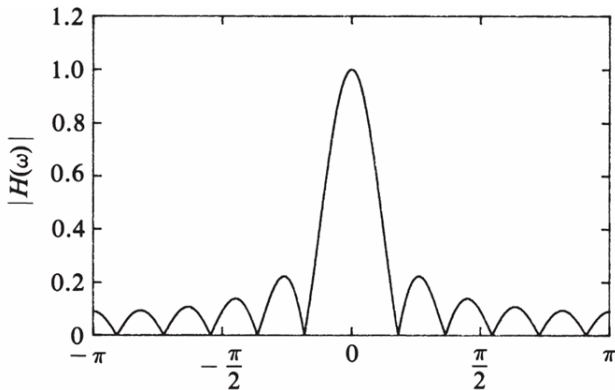
- LTI systemer som frekvens-selektive filtre
  - Ideell filterkarakteristikk & enkle filtre



## Notch filter (“hakk” eller “innsnitt”):

- En eller flere (ideelt) perfekte nuller i frekvensresponsen, dvs. nullpunkt på enhets sirkelen:  $z_{1,2} = e^{\pm j\omega_1}$ .
- For å forbedre responsen kan vi også plassere ut poler:  $p_{1,2} = re^{\pm j\omega_1}$ .

## Kam filter



**Figure 5.4.11** Magnitude response characteristic for the comb filter given by (5.4.34) with  $M = 10$ .

Kam filter

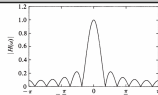


Figure 5.4.11 Magnitude response characteristic for the comb filter given by (5.4.34) with  $M = 10$ .

### Kam (Comb) filter:

- Brukes for å under trykke harmoniske komponenter, dvs. har nullpunkt med faste mellomrom i frekvensresponsen.
- Eksempel: Et moving average filter:

$$y[n] = \frac{1}{M+1} \sum_{k=-M/2}^{M/2} x[n-k]$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{M+1} \frac{\sin(\omega \frac{M+1}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

Mer generelt:

- Ta et FIR filter med  $H(z) = \sum_{k=0}^M h(k)z^{-k}$  og erstatt  $z$  med  $z = z^l$ .

$$H_l(z) = \sum_{k=0}^n h[k]z^{-kl} = H(l\omega)$$

# Allpass filter

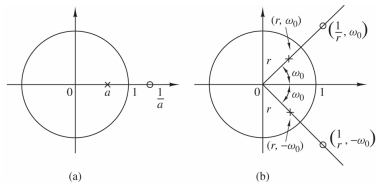


Figure 5.4.16 Pole-zero patterns of (a) a first-order and (b) a second-order all-pass filter.

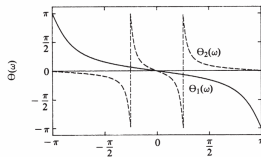
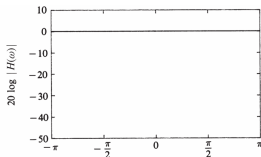
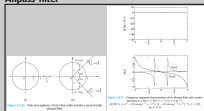


Figure 5.4.17 Frequency response characteristics of an all-pass filter with system functions (1)  $H(z) = (0.6 + z^{-1}) / (1 + 0.6z^{-1})$ , (2)  $H(z) = (r^2 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}) / (1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2})$ ,  $r = 0.9$ ,  $\omega_0 = \pi/4$ .

- └ LTI systemer som frekvens-selektive filtre
  - └ Ideell filterkarakteristikk & enkle filtre

## Allpass filter

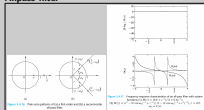


**Allpass filter:** For at et filter skal være allpass så må  $|H(\omega)| = 1$ , eller ekvivalent  $|H(\Omega)| = H(z)H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}} = 1$ .

- Hvis vi f.eks. har poler  $p_{1,2} = re^{\pm j\omega}$  må vi ha nullpunkter i  $z_{1,2} = \frac{1}{r}e^{\pm j\omega}$ .

- └ LTI systemer som frekvens-selektive filtre
- └ Ideell filterkarakteristikk & enkle filtre

Allpass filter



### Minimum og maximum fase filter (et liten notat):

Vi ønsker å analyserer fasen til de påfølgende to FIR systemene:

$$H_1(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} = z^{-1}\left(z + \frac{1}{2}\right) \quad z_1 = -\frac{1}{2} \quad p_1 = 0$$

$$H_2(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} = z^{-1}\left(\frac{1}{2}z + 1\right) \quad z_1 = -2 \quad p_1 = 0$$

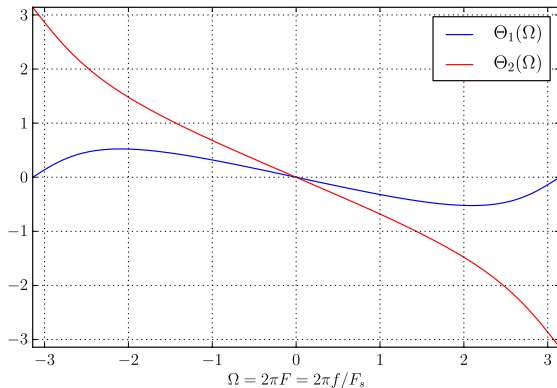
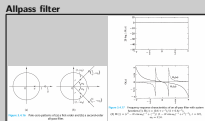
Vi finner faseresponsen til disse ( $\angle$  betyr 'fasen til'):

$$\Theta_1(\Omega) = \angle \left[ e^{-j\Omega} \left( e^{j\Omega} + \frac{1}{2} \right) \right] = -\Omega + \tan^{-1} \left( \frac{\sin \Omega}{\frac{1}{2} + \cos \Omega} \right)$$

$$\Theta_1(\Omega) = \angle \left[ e^{-j\Omega} \left( \frac{1}{2} e^{j\Omega} + 1 \right) \right] = -\Omega + \tan^{-1} \left( \frac{\sin \Omega}{2 + \cos \Omega} \right)$$

Respsen til disse to er plottet på neste side...

LTI systemer som frekvens-selektive filtre  
 Ideell filterkarakteristikk & enkle filtre



Her er det stor forskjell på hvor mye fasen vandrer! To definisjoner er på sin plass:

- $H_1$  er et *minimum-phase system*, siden  $\Theta_1(\pi) - \Theta_1(0) = 0$ .
- $H_2$  er et *maximum-phase system*, siden  $\Theta_2(\pi) - \Theta_2(0) = \pi$ .