



ifj

Kap 7:
Digital prosessering av analoge signaler

Sverre Holm



UNIVERSITETET
I OSLO

Temaer

1. Sampling og rekonstruksjon
2. Finne spektret til samplet signal
3. Gjenvinning med forskjellige interpolasjoner
4. Nullinnsetting og spektrumskompresjon
5. Digital økning eller senking av samplingsrate
6. Kvantisering og kvantiseringsfeil
7. Design av anti-aliasing og anti-imaging filtre
8. Forstå endel lydeffekter
9. Delta-sigma

Rep: 2.6 Samplingsteoremet

- Hvordan sørge for at det samplede signalet fullt og helt representerer det analoge?
- Analogt signal: $\cos(2\pi f_0 t + \theta)$
- Sampling ved S (Hz) \Rightarrow digital frekvens $F_0 = f_0/S$
- Digital frekvens må ligge i det prinsipale området
 $|F_0| < 0.5 \Rightarrow S > 2|f_0|$
- Altså: Samplingsraten må være større enn 2 x høyeste frekvens i det analoge signalet

7.1 Ideell sampling

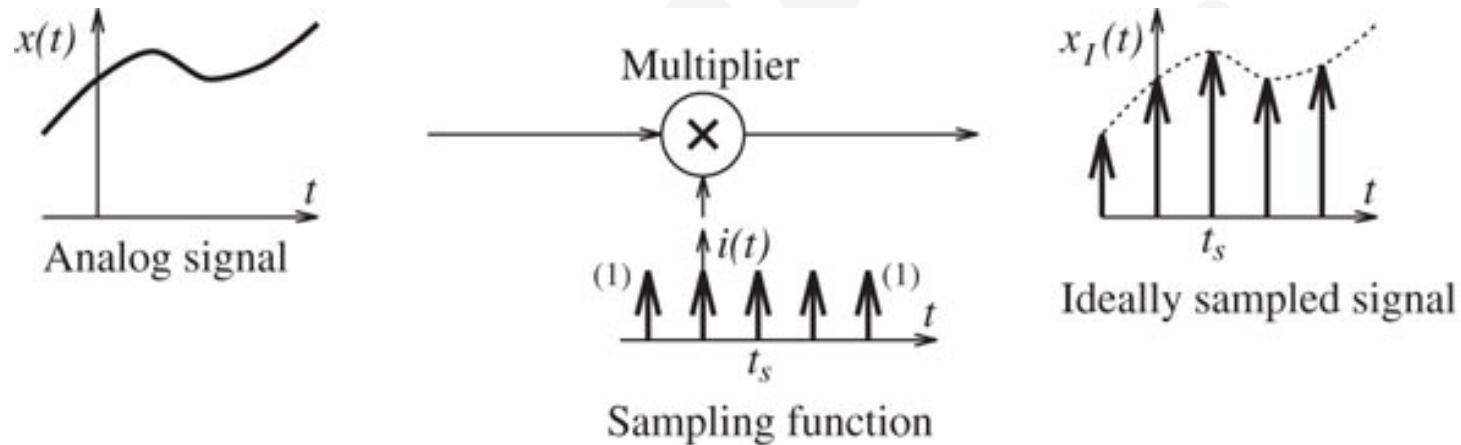


FIGURE 7.1 The ideal sampling operation. An analog signal multiplied by a periodic impulse train (the ideal sampling function) results in a train of impulses whose strengths match the values of the analog signal at the sampling instants

Spektra ved ideell sampling

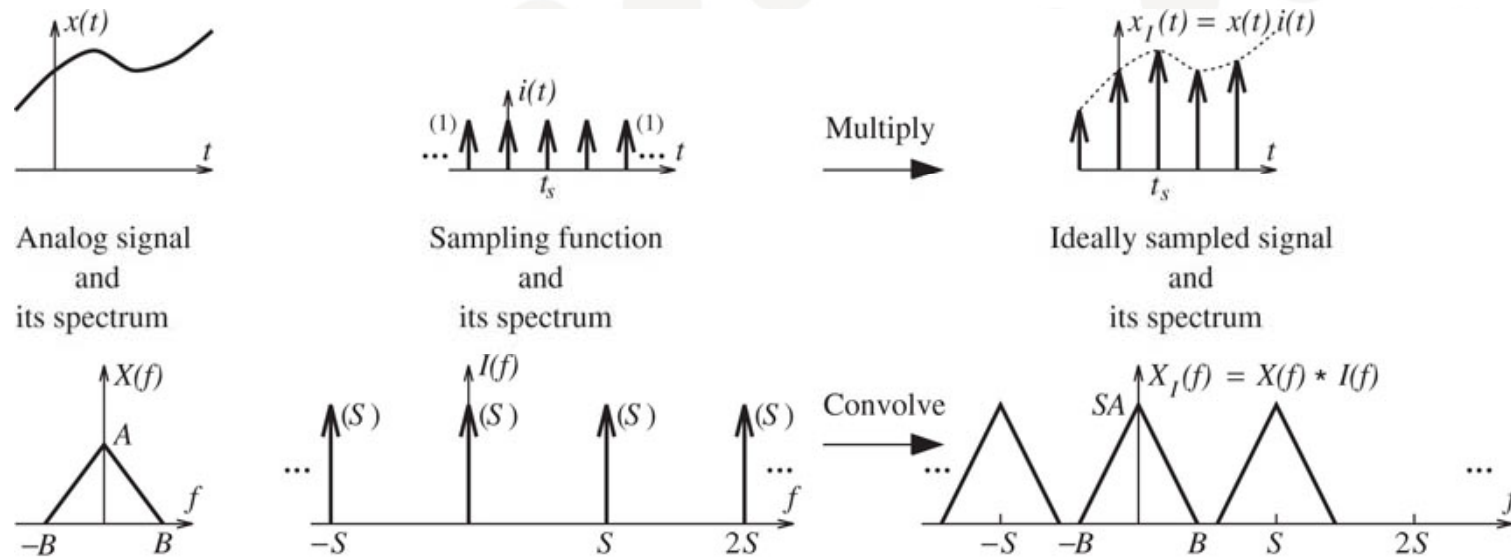


FIGURE 7.2 Spectra of the signals for ideal sampling. The spectrum $X(f)$ of the analog signal is assumed to be bandlimited to B . The spectrum of the impulse sampling function is also a periodic impulse train with equal strengths. Multiplication of the analog signal and the ideal sampling function results in the convolution of their respective spectra. The spectrum of the sampled signal thus consists of replicas of $X(f)$ at multiples of the sampling rate S

- Multiplikasjon i tidsdomenet \Leftrightarrow Konvolusjon i frekvensdomenet
- Konvolusjon med impulser \Leftrightarrow forskjøvede kopier \Rightarrow periodisk

Sampling i tid og frekvens: formler

- Sampling \Leftrightarrow multiplikasjon med impulstog

$$x_I(t) = x(t)i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nt_s)$$

- Fourier transformen til impulstog:
 - Analog signalbehandling, Appendiks A5.6
 - Et nytt impulstog, $S=1/t_s$:

$$I(f) = S \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kS)$$

- Spektrum av samplet signal:

$$X_I(f) = X(f) * S \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kS) = S \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kS)$$

- Dvs $X(f)$ og kopier av den med avstand S

Over-, undersampling, kritisk sampling

- Båndbredde B vs. samplingsfrekvens S
- Replikaer av originalt spektrum, kan overlappe

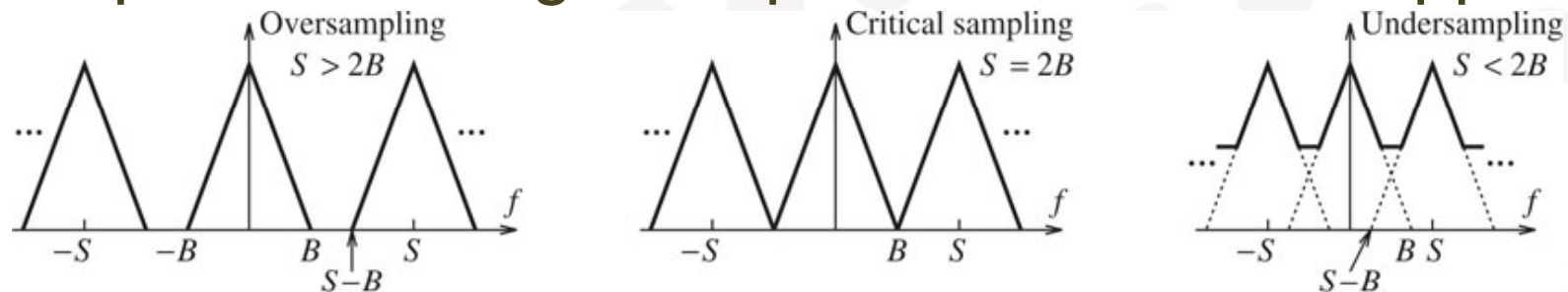


FIGURE 7.3 Spectrum of an ideally sampled signal for three choices of the sampling frequency S . The spectrum $X(f)$ of the analog signal is bandlimited to B . If $S > 2B$ (oversampling), the periodic spectrum of the sampled signal shows non-overlapping replicas of $X(f)$. If $S < 2B$ (undersampling), the replicas overlap and one period of the periodic spectrum no longer matches $X(f)$. The critical case $S = 2B$ forms the transition between oversampling and undersampling

- Samplingsteoremet: $S \geq 2B$: Taper ikke info
 - $S=2B$: Nyquist rate, $t_N=1/2B$: Nyquist intervallet

12. oktober 2012

7

7.1.1 Sinuser og periodiske signaler

- Sinus med frekvens f_0 :
 - Høyeste (=eneste) frekvens $B=f_0 \Leftrightarrow$ sampling: $S \geq 2f_0$
- Minst to samples pr periode
 - NB! Farlig med akkurat to pr periode: kan treffe nullgjennomganger: unngå kritisk sampling
- Oversamplet, $S > 2f_0$: Impulser ved $\pm f_0$
- Undersamplet, $S < 2f_0$: Impulser i $\pm f_a$, $|f_a| < S/2$
 - Finner f_a ved å trekke et helt antall S fra f_0 : $f_a = f_0 - N \cdot S$ der N er slik at $|f_a| < S/2$: Alltid: $f_a \leq f_0$
 - Denne formelen er litt uvanlig, må itereres. Som regel er N liten så det kan gjøres enkelt.

Aliasing for samplet sinus

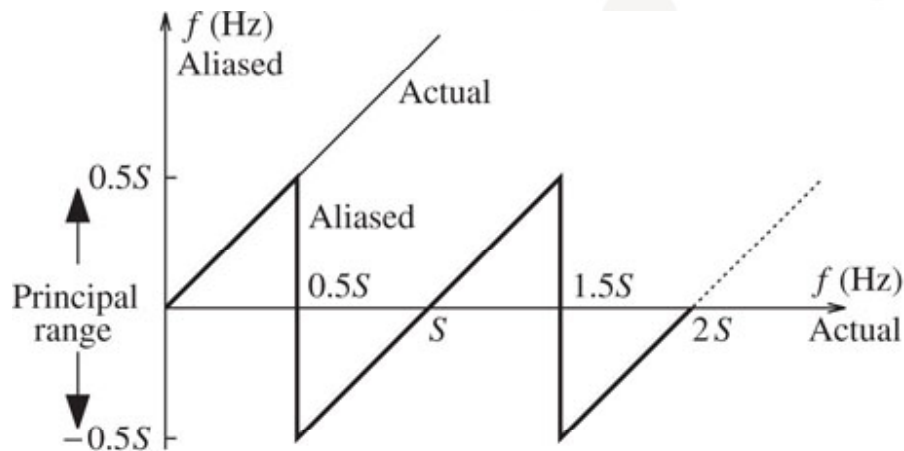


FIGURE 7.4 Relation between the actual and aliased frequency. There a unique correspondence between the actual and aliased frequency only if $f < 0.5S$. If the actual frequency exceeds $0.5S$, it gets aliased to a lower frequency between $-0.5S$ and $0.5S$. The frequency $0.5S$ at which the aliased frequency flips (changes sign) is called the folding frequency

- $f_0 = S/2 + \epsilon$: sprang på S
- $f_0 = f_a + NS$: flertydighet

12. oktober 2012

9

Aliasing - eksempler

Sinus på $f_0=100$ Hz

1. $S=300$ Hz:

- Ingen aliasing

2. $S=80$ Hz $< 2f_0$:

- $f_a=f_0-N\cdot S=100-N\cdot 80=20$ ($N=1$)

3. $S=60$ Hz $< 2f_0$:

- $f_a=f_0-N\cdot S=100-N\cdot 60=-20$ ($N=2$) [$N=1 \Rightarrow 40 > S/2$]
- Nå blir opprinnelige positive frekvenser aliaset til negative og omvendt, dvs fase reversering.

Aliasing - eksempler

- Sum av sinuser:
- $8\cos(2\pi t) + 6\cos(8\pi t) + 4\cos(22\pi t) + 6\sin(32\pi t) + \cos(58\pi t) + \sin(66\pi t)$
 - Fundamental ($f_0=1$) + 4., 11., 16., 29. og 33. harmoniske
 - Korrekt samplet ved $S > 66$ Hz
- Sampling ved $S=10$ Hz:
 - Frekvenser: $f_0=1$, $f_{0,4}=4 < S/2$
 - Alle andre, dvs $f_{0,n}=11, 16, 29$ og 33 blir aliaset
 - $11 \rightarrow 11 - 1 \cdot S = 1$; $16 \rightarrow 16 - 2 \cdot 10 = -4$
 - $29 \rightarrow 29 - 3 \cdot S = -1$; $33 \rightarrow 33 - 3 \cdot 10 = 3$

7.1.2 Samplingskop: utnytter aliasing

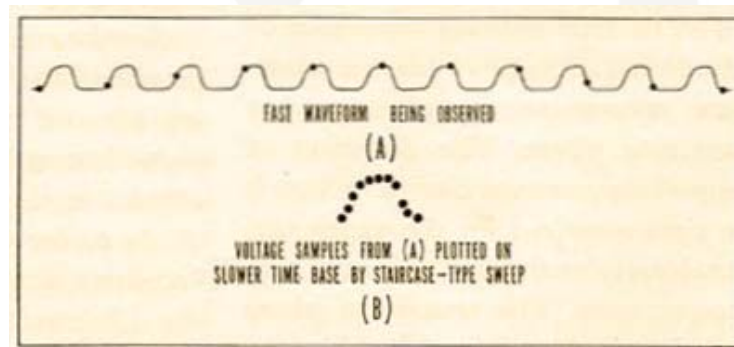
- Anta periodisk signal – gjentar seg: kan måle mange ganger
- Båndbegrenset
- Får en strukket versjon av signalet ved å sample litt senere for hver periode
 - Samme prinsipp: 3D avbildning av hjertet med ultralyd gatet mot EKG: endel av bildet i hver periode
 - Stroboskop



Gruppens akustikk-lab: <http://www.ifi.uio.no/research/centres/sfa/laboratory.html>

Samplingskop

- Undersampling av periodisk bølgeform
 - Høy frekvens samples langsomt ved å bruke mer tid



- The Signal Sampling Principles, March 1962, Hewlett Packard Journal
- http://www.hpmemory.org/wb_pages/wall_b_page_02.htm

Samplingsoskop

- Signal: $1 + \cos(2\pi f_0 t)$: $f_0 = 100$ MHz
- Nyquistsampling $S > 200$ MHz
 - Lav båndbredde så man kan undersample i stedet
- Eks: $S = 98$ MHz, aliaser til $100 - 98 = 2$ MHz
- Tidsstrekking med $\alpha = f_0 / f_a = f_0 / (f_0 - S) = 100 / 2 = 50$
 - Jo mer $S \rightarrow f_0$, jo lenger tidsstrekking

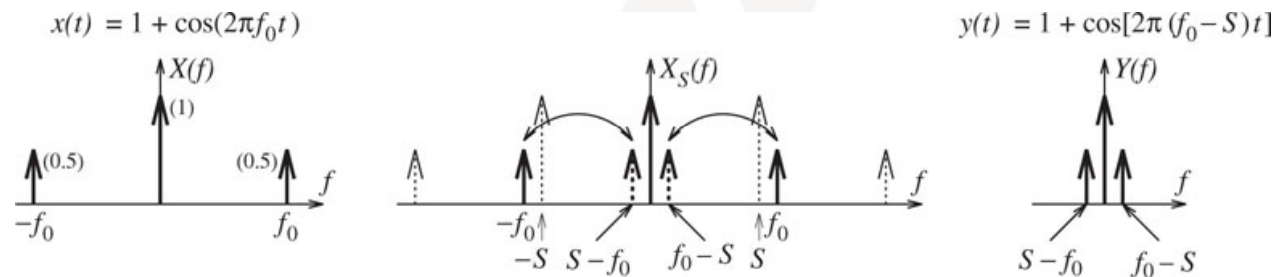


FIGURE 7.5 The principle of the sampling oscilloscope. A high-frequency sinusoid is sampled at a rate far less than the Nyquist rate. The spectrum of the sampled signal corresponds to a much lower frequency and the signal can be displayed on a conventional oscilloscope

7.1.3 Båndpass-sampling

- Nyquist: $S > 2B$ der B er båndbredden.
- To måter å sample på:
 - Lavpass: $B_1 = f_H$ – ut fra høyeste frekvens
 - Båndpass: bare energi mellom f_L og f_H , $B_2 = f_H - f_L$
 - Kan bruke lavere samplingsrate
- Båndpassampling: for smalbåndssignaler med informasjon sentrert om en høy frekvens:
 - kommunikasjon
 - radar
 - ultralydinstrumenter

Eksempel: båndpassampling

- Båndpass fra $f_L=4$ kHz til $f_H=6$ kHz, $B=2$ kHz
 - Lavpass-sampling $S>12$ kHz
 - Kan sample med S så lav som $2B=4$ kHz
 - Besparelse: $4/12=1/3$ antall samples
- Ikke alle samplingsrater $S>2B$ er like bra
 - Avhengig av at samplerate S og øvere og nedre frekvens skal stå i spesielle forhold til hverandre
 - Betingelse: S må være slik at både f_H og f_L kommer på samme side i spektret etter sampling

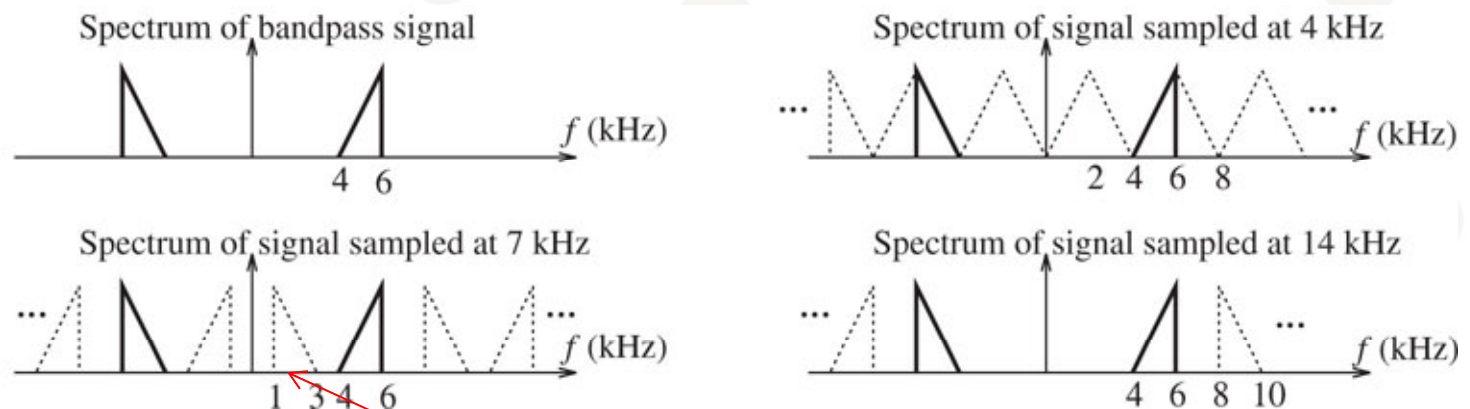
Båndpassamplring

- Betingelse for å bevare all informasjon ...
- La $N = \text{int}(f_H/B)$
 - forholdet mellom høyeste frekvens og båndbredden
- Laveste mulige samplingsrate er
 - $S = 2f_H/N = 2f_H/\text{int}(f_H/B)$: $S \approx 2B$ avrundet oppover
- Det finnes mange mulige samplerater, høyere enn dette:
 - La $k = 1, 2, \dots, N$:
$$2f_H/k \leq S \leq 2f_L/(k-1)$$
 - Den høyeste er for $k=1$, da blir $S \geq 2f_H$, dvs vanlig Nyquist

Eksempel: båndpass-sampling

- Eks: $f_L=4$ kHz, $f_H=6$ kHz \Rightarrow $B=2$ kHz, $N=6/2=3$ (eksakt)
 - $k=1$: $12 \leq S$: Lavpass-sampling
 - Figur $S=14$ kHz
 - $k=2$: $6 \leq S \leq 8$: fase reversering
 - Figur: $S=7$ kHz
 - $k=3$: $4 \leq S \leq 4$, dvs $S=4$ kHz som i figur
 - Forsøk $S=5$ kHz!

FIGURE E.7.4
Spectra of bandpass signal and its sampled versions for Example 7.4



12. oktober 2012

19

7.1.5 Sampling/gjenvinning: 0-te ordens hold

- Praktiske A/D-D/A-omformere må samle over et endelig tidsintervall: Her holdes verdien et helt sampleintervall

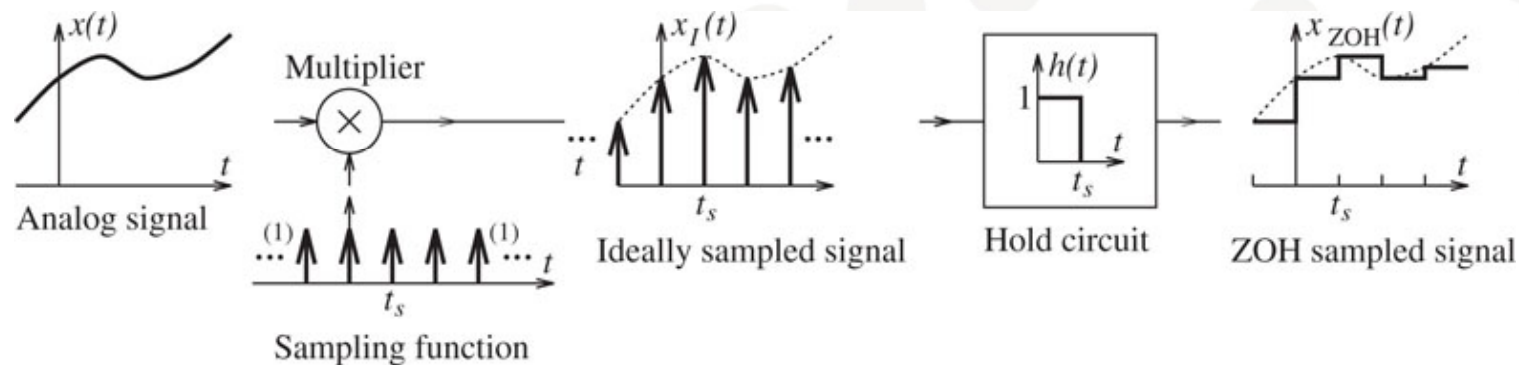


FIGURE 7.8 Zero-order-hold sampling is equivalent to ideal sampling followed by a hold operation. Multiplying an analog signal by a periodic-impulse train (the ideal sampling function) results in a train of impulses whose strengths match the values of the analog signal at the sampling instants. The hold operation (convolution of the impulses with a rectangular pulse) produces a staircase approximation of the analog signal

- Ekvivalent med sampling fulgt av filter
- Viktigere ved gjenvinning med D/A enn ved sampling med A/D

0-te ordens hold

- Respons til hold-filteret,
 - $h(t) = \text{rect}[t-0.5t_s/t_s]$, dvs 1 for $0 < t < t_s$
- Dette filteret er analogt og må analyseres med kontinuerlig Fourier transform (App. 5, tabell A.6)
- Minner litt om N-punkts midlingsfilter som har:

$$H(F) = e^{-j\pi(N-1)F} \cdot \frac{\sin(\pi NF)}{N \sin(\pi F)}$$

- Hold-filterets frekvensrespons:

$$H(f) = t_s \text{sinc}(ft_s) e^{-j\pi ft_s} = \frac{1}{S} \text{sinc}(f/S) e^{-j\pi ft_s}, \text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$$

0-te ordens hold \Leftrightarrow filter

$$H(f) = t_s \text{sinc}(ft_s) e^{-j\pi ft_s} = \frac{1}{S} \text{sinc}(f/S) e^{-j\pi ft_s}, \text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$$

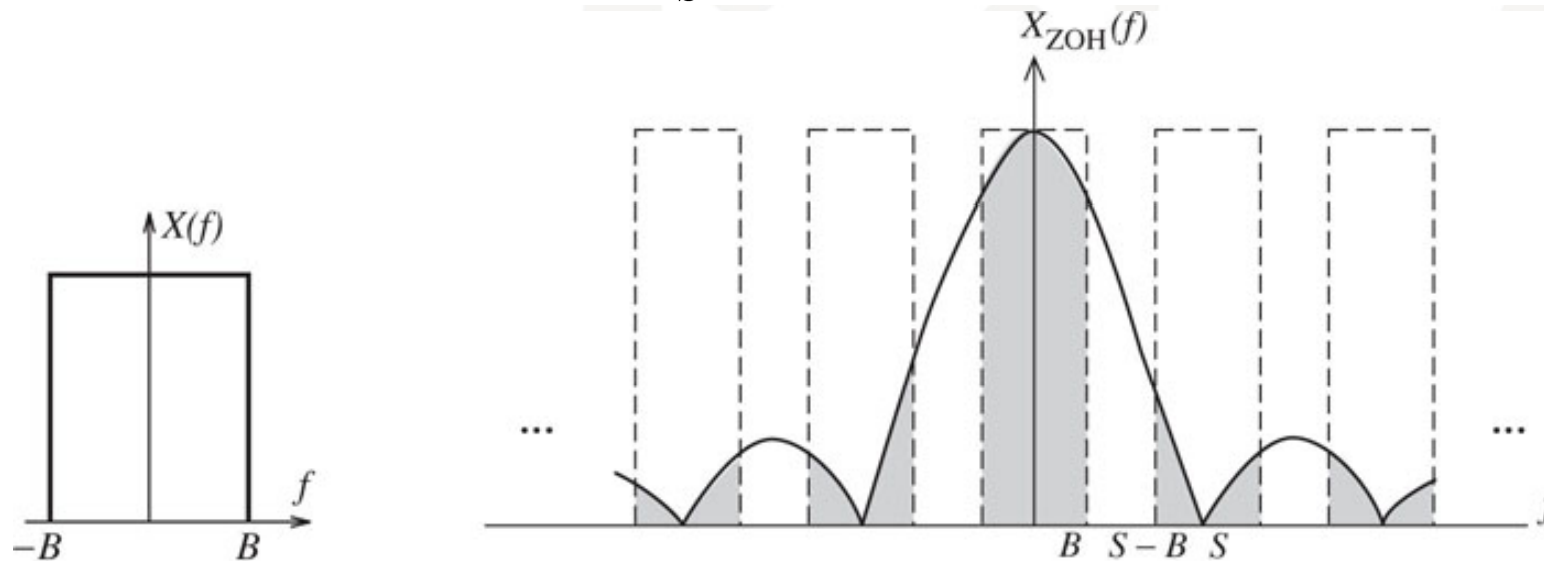


FIGURE 7.9 Illustrating the spectrum of a zero-order-hold sampled signal. The spectrum of the analog signal is $X(f)$. The spectrum of the ideally sampled signal (images of $X(f)$) is multiplied by the spectrum of the hold system (a sinc with a main lobe and sidelobes) to produce the spectrum of the ZOH signal (shown shaded). Note how the sinc shape results in distortion of the images

0-te ordens hold: sinc-forvrengning

- Må motforvrengne for å oppheve sinc-funksjonen
 - Ideelt LP for å gjenvinne analogt signal fra samplene
 - Fulgt av kompensasjonsfilter
 - Eks: D/A-konverterer i CD-spiller



FIGURE 7.10 Spectrum of a filter that compensates for sinc distortion. To undo its effects, the filter gain is chosen as the reciprocal of the sinc (in the principal range). The filter is chosen to have linear phase

0-te ordens hold: motforvrengning (eks)

- Hvor mange dB er maks kompensasjon i et system som er samplet ved Nyquist-raten (worst-case)?

$$H(f) = t_s \text{sinc}(ft_s) e^{-j\pi ft_s} = \frac{1}{S} \text{sinc}(f/S) e^{-j\pi ft_s}, \text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$$

- $\text{sinc}(0)=1$
- $\text{sinc}(f_{\max}/S) = \text{sinc}(0.5) = \sin(\pi/2)/(\pi/2) = 2/\pi$
- I dB: $20\log[(2/\pi)/1] \approx \underline{\underline{-3.9 \text{ dB}}}$

7.2 Sampling – gjenvinning

- Hvordan skal man fylle inn mellom samplene – interpolasjon?

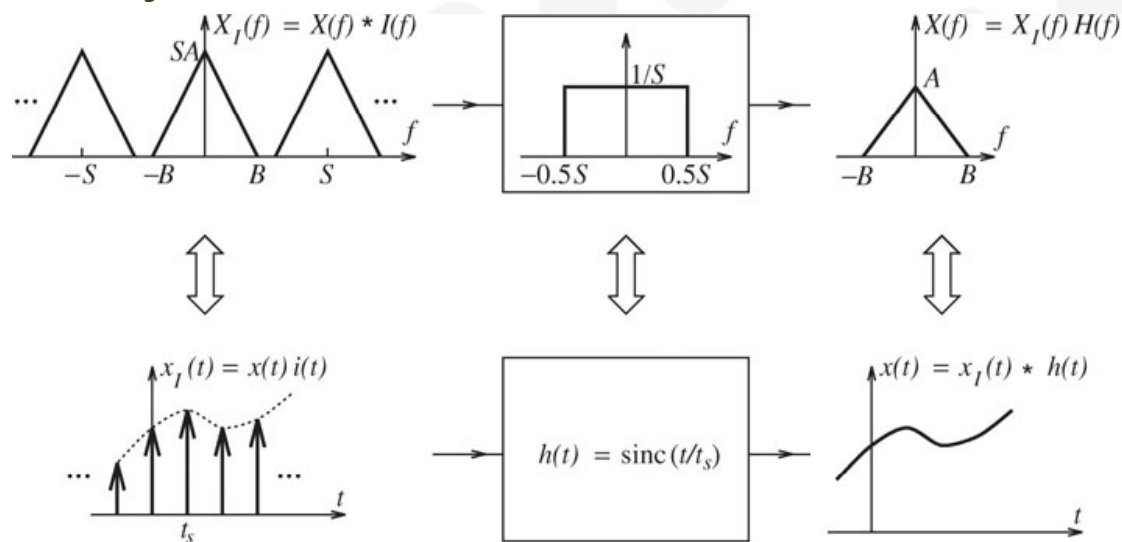


FIGURE 7.11 Recovery of an analog signal from its sampled version. Ideal recovery uses an ideal lowpass filter that extracts the central period of the periodic spectrum of the sampled signal. The equivalent operation in the time domain corresponds to the convolution of the sampled signal with the impulse response of the ideal filter. If the sampling rate exceeds the Nyquist rate, the central period contains just the spectrum of the original signal, and we recover the original signal

Interpolasjonsfilter

- Ideelt lavpassfilter - "Mursteinsfilter"
 - Analogt filter: $H(f)=1$ for $|f|<S/2 \Leftrightarrow h(t)=\text{sinc}(t/t_s)$
- Analog konvolusjon: $x(t)=x_I(t) * h(t)$:

$$x(t) = \int_{\tau} x_I(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{\tau} \sum_n x[n]\delta(\tau - nt_s)h(t - \tau)d\tau$$

- Ser ut som en tids-diskret konvolusjon:

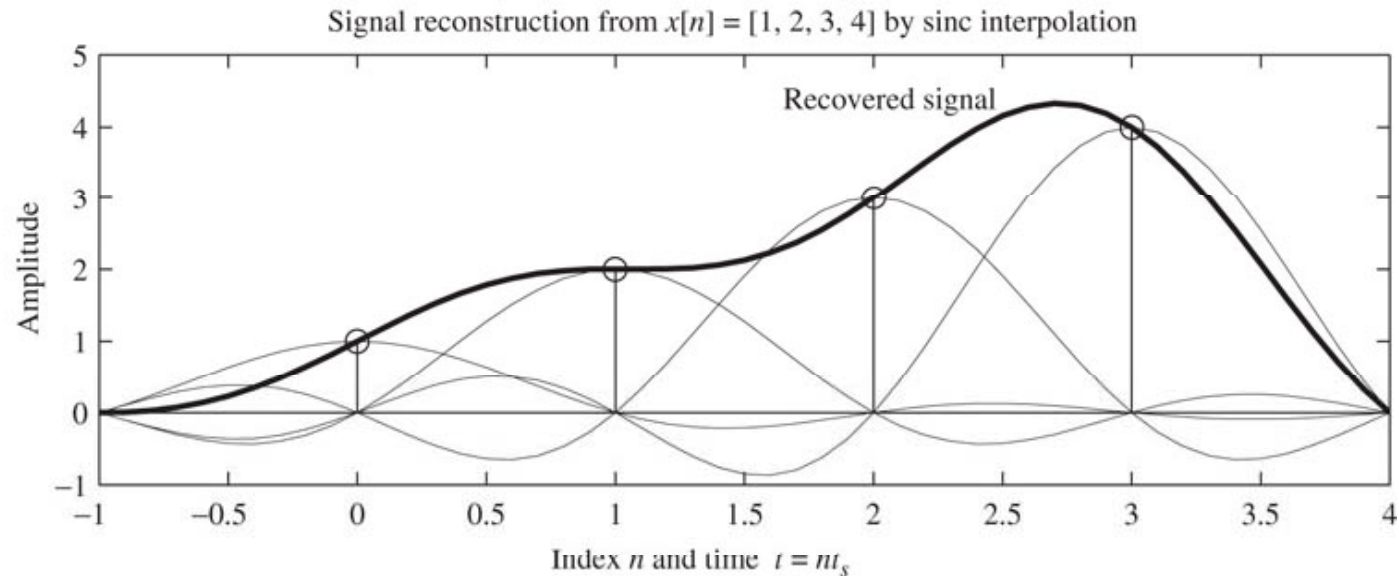
$$x(t) = \sum_n x[n]h(t - nt_s) = \sum_n x[n]\text{sinc}\left(\frac{t-nt_s}{t_s}\right)$$

- Forflyttede versjoner av sinc-funksjoner over all tid

Sinc interpolasjon

$$x(t) = \sum_n x[n]h(t - nt_s) = \sum_n x[n]\text{sinc}\left(\frac{t-nt_s}{t_s}\right)$$

FIGURE 7.12 Ideal recovery of an analog signal by sinc interpolation. The recovered signal is the sum of sinc functions centered at the sampling instants. The zeros of these sinc functions occur at multiples of the sampling interval



- Merk:
 - I et samletidspunkt, $t=nt_s$: bare bidrag fra en sample
 - Må kjenne alle samples, $-\infty < n < \infty$, for gjenvinning
 - Sinc er den korrekte interpolasjon, alle andre interpolatorer må måles mot den

Uendelig lang sinc i praksis

- CD, $f_s = 44100 \text{ Hz} = 1/t_s$, 16 bit
- Hvis sinc-ens verdi blir lavere enn én bit holder det
- 16 bit \Leftrightarrow +/- 32768
- $|\text{sinc}(t/t_s)| = |\sin(\pi t/t_s)/(\pi t/t_s)| < t_s/(\pi t) = 1/32768$
- Det gir $t = 0.237 \text{ s}$ for $t_s = 1/44100$
- Ingen vits med filter som er lenger enn +/- 0.237 sek

Tilnærminger til sinc-interpolasjon

Krav:

- Må treffe eksakt i sampletidspunktene, $t=nt_s$
 - $h_i(t)=1$, $t=0$ og $h_i(t)=0$ for $t=nt_s$
- Må unngå at den er ∞ lang
- $h_i(t)$ må være absolutt integrerbar så den ikke blir ∞ mellom sampletidspunkter

0. eller 1. ordens hold

- Trinn-interpolasjon (0-te ordens hold), allerede analysert:

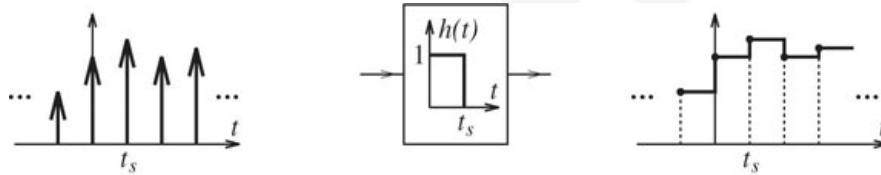


FIGURE 7.13 Step interpolation is just a zero-order-hold operation on an ideally sampled signal. It produces a staircase approximation of the original analog signal

- Lineær interpolasjon: trenger en sample inn i fremtiden

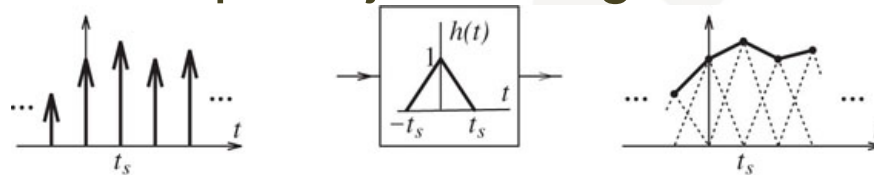


FIGURE 7.14 Linear interpolation is equivalent to using tri functions centered at the sampling instants of an ideally sampled signal to produce a piecewise linear approximation of the original analog signal

- Generelt: $g(t)\text{sinc}(t/t_s)$ der $g(t)$ er en vindusfunksjon
 - $g(0)=1$ og $g(t) \rightarrow 0$ for store $|t|$