



inf

IIR filterdesign
Sverre Holm



UNIVERSITETET
I OSLO

Filterspesifikasjon

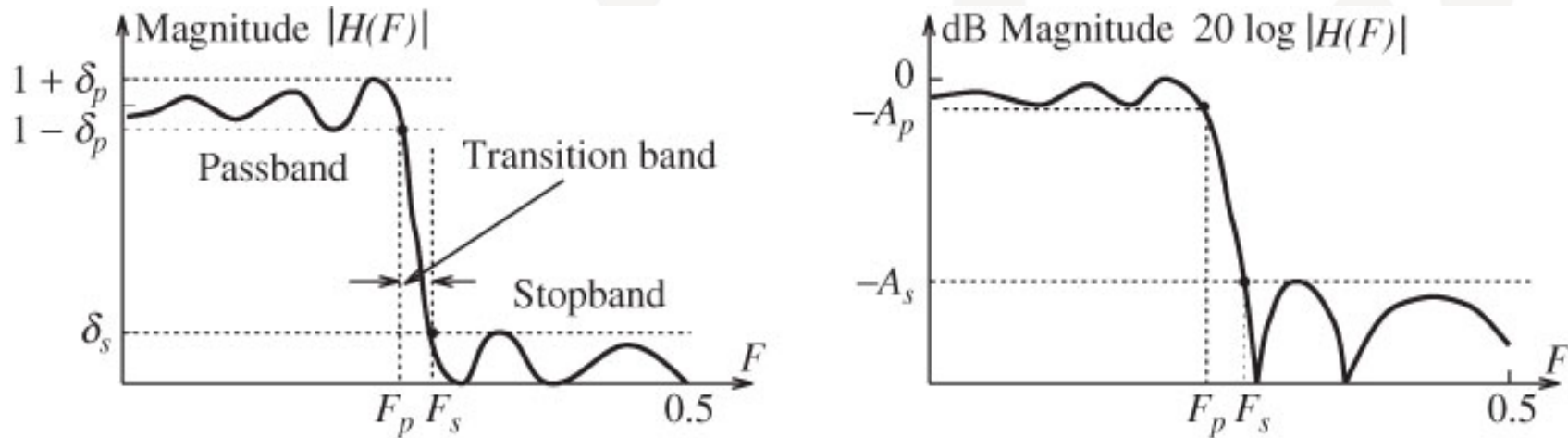


FIGURE 9.1 The features of a typical lowpass digital filter. Up to the passband edge F_p , the gain is nearly unity, with small variations about unity measured by the passband ripple δ_p . Past the stopband edge F_s , the gain is nearly zero, with a maximum variation measured by the stopband ripple δ_s . On the decibel scale, unit gain corresponds to 0 dB. The *maximum* passband attenuation and *minimum* stopband attenuation are measured by A_p -dB and A_s -dB, respectively. These correspond to a *minimum* passband gain of $-A_p$ -dB and a *maximum* stopband gain of $-A_s$ -dB, respectively

IIR kontra FIR

- IIR filtre er mer effektive enn FIR – færre koeffisienter for samme magnitudespesifikasjon
- Men bare FIR kan gi eksakt lineær fase
 - Lineær fase \Leftrightarrow symmetrisk $h[n]$
 - \Rightarrow Nullpunkter symmetrisk om $|z|=1$
 - Lineær fase IIR? \Rightarrow Poler utenfor enhetssirkelen \Rightarrow ustabil
- IIR kan også bli ustabile pga avrunding i aritmetikken, det kan ikke FIR

IIR Designmetode

1. Analogt prototypfilter

1. Start med analogt lavpass prototypfilter
2. Konverteres til digitalt filter
3. Konverteres eventuelt til digitalt høypass, båndpass, båndstopp

2. Direkte design

Standard analoge filtre

- Butterworth filter
 - Ikke ripple i passbånd eller i stoppbånd, stor transisjonsbåndbredde
- Tsjebysjef filter (Type I)
 - Ikke ripple i stoppbånd, midlere transisjonsbåndbredde
- Tsjebysjef filter (Invers eller type II)
 - Ikke ripple i passbånd, midlere transisjonsbåndbredde
- Elliptisk filter
 - Gainripple i både pass- og stoppbånd, smalt transisjonsbånd
- Andre:
 - Bessel filter
 - Lite ripple i gruppeforsinkelsen, ikke gainripple i verken pass- eller stoppbånd, stor transisjonsbåndbredde
 - Linkwitz-Riley filter (=2 Butterworth etter hverandre)
 - Brukes i høyttalersystemer for deling mellom høyttalerelementer

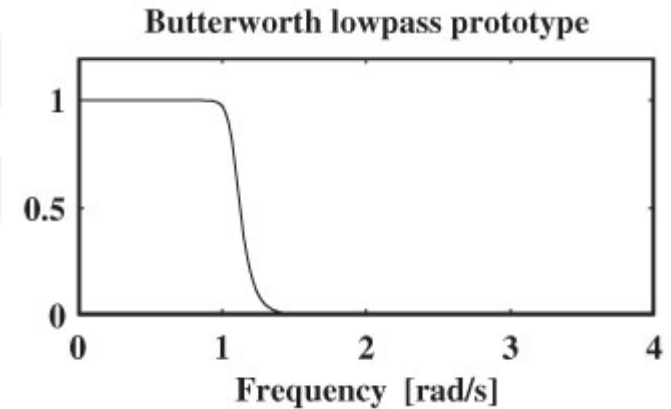
Filterflanker

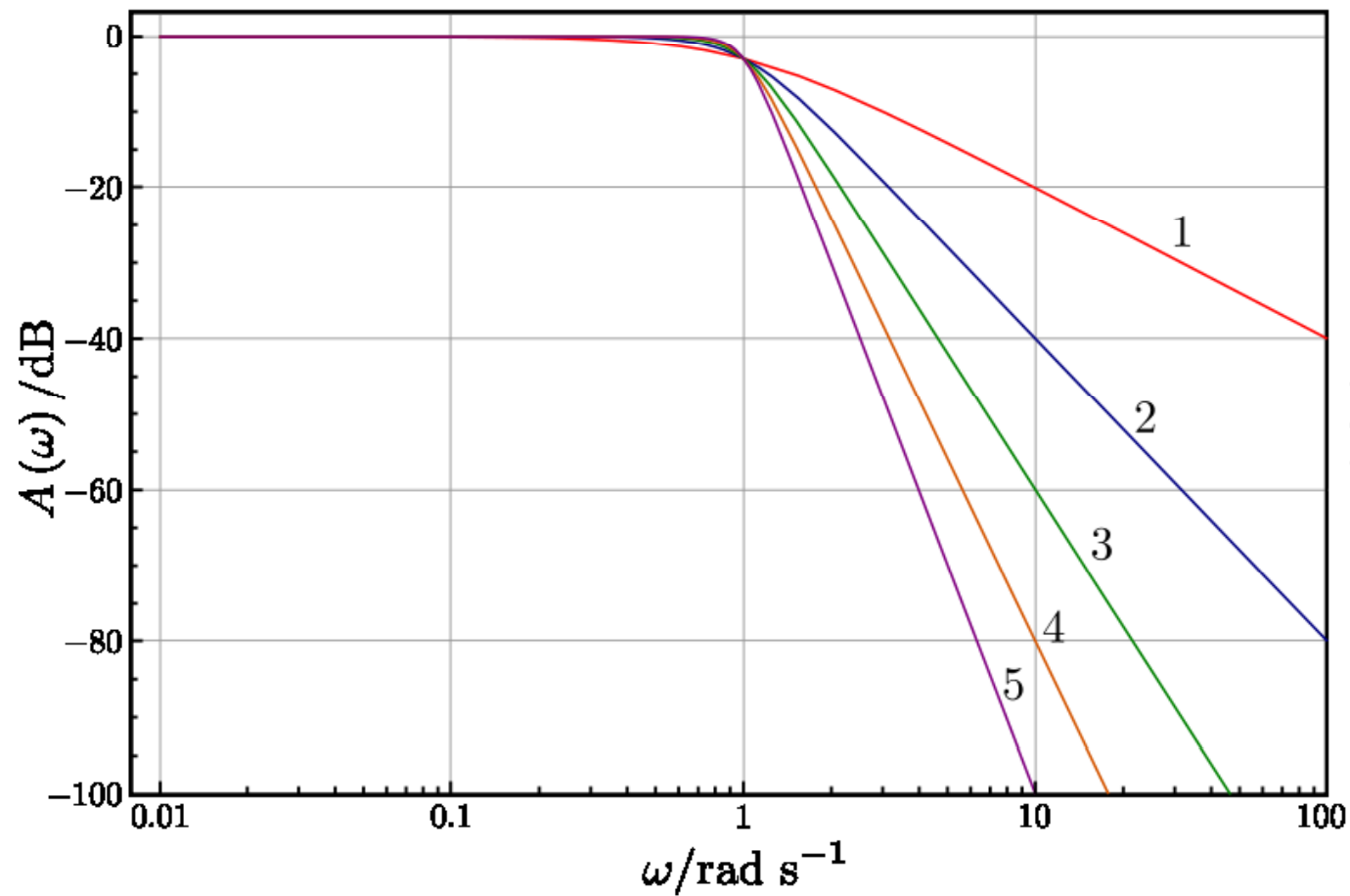
- **Dekade:** 10 x frekvens, f.eks. 100 Hz \rightarrow 1 kHz er en dekade
- **Oktav:** 2 x frekvens (oktav=8 \Leftrightarrow hvite pianotangenter), f.eks. 100 Hz \rightarrow 200 Hz
 - 1. ordens filter: faller av med 6 dB pr oktav (20 dB pr dekade)
 - 2. ordens filter: responsen faller med 12 dB pr oktav (40 dB pr dekade)
 - 3. ordens: 18 dB, ...



Butterworth filter

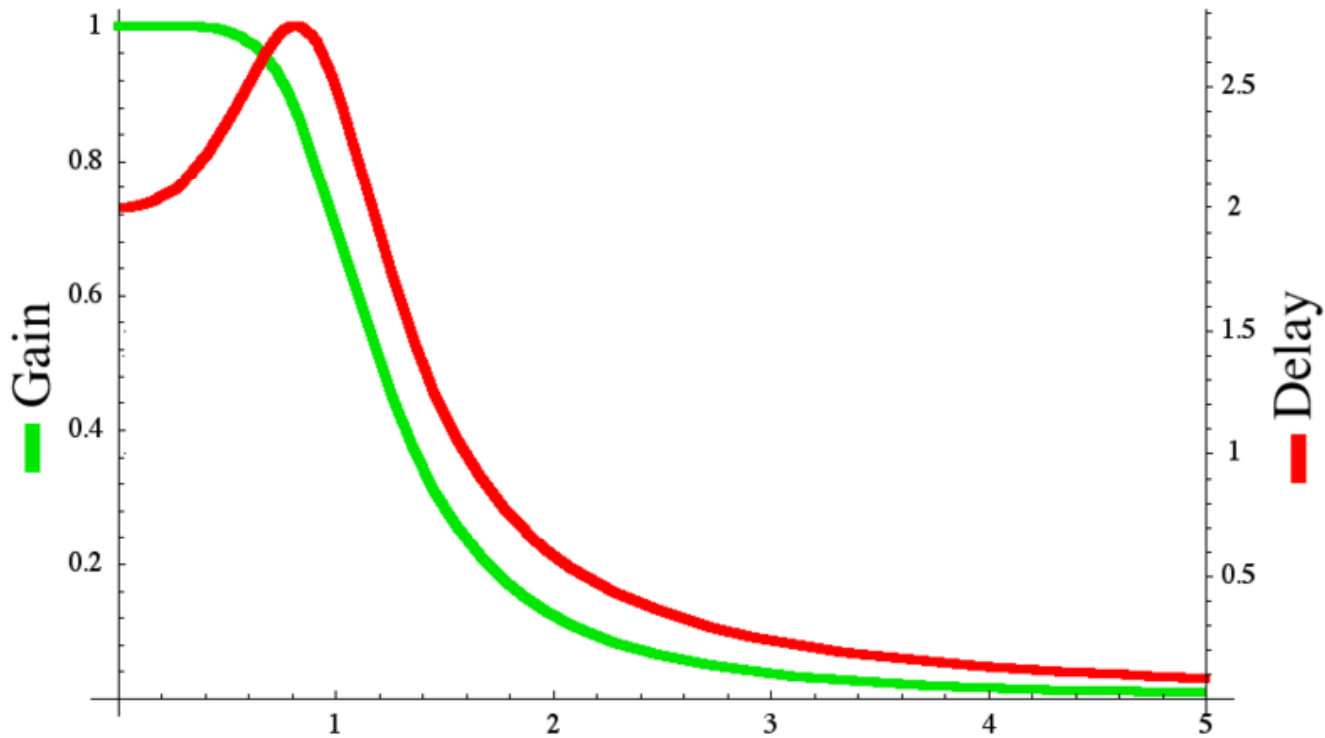
- Maximalt flatt (ingen ripple) i passbåndet, faller av mot 0 i stoppbåndet.
- Butterworth filtre faller monotont med ω .
- Først beskrevet av britiske Stephen Butterworth i "On the Theory of Filter Amplifiers", Wireless Engineer, vol. 7, 1930, pp. 536-541.
- Nte ordens filter: alle deriverte til $|H(j\omega)|^2$ opp til og med den $2N-1$ deriverte er 0 ved $\omega=0$, dvs maksimalt flat.
- I dB: Faller av mot høye frekvenser med $20n$ dB/dekade $\Leftrightarrow 6n$ dB/oktav





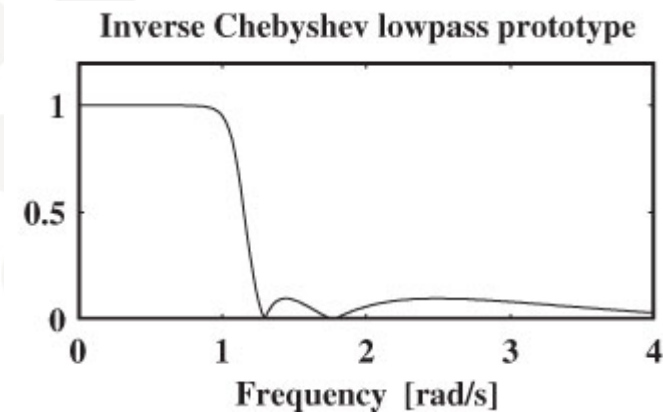
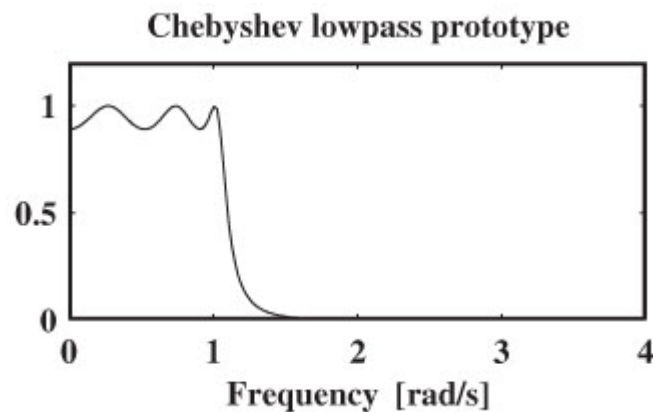
Plott av gain til Butterworth lavpass filtre av orden 1 til 5.
 Merk at de faller av med $20n$ dB/dekade der n er filter orden.

3. ordens Butterworth, $\omega_p=1$

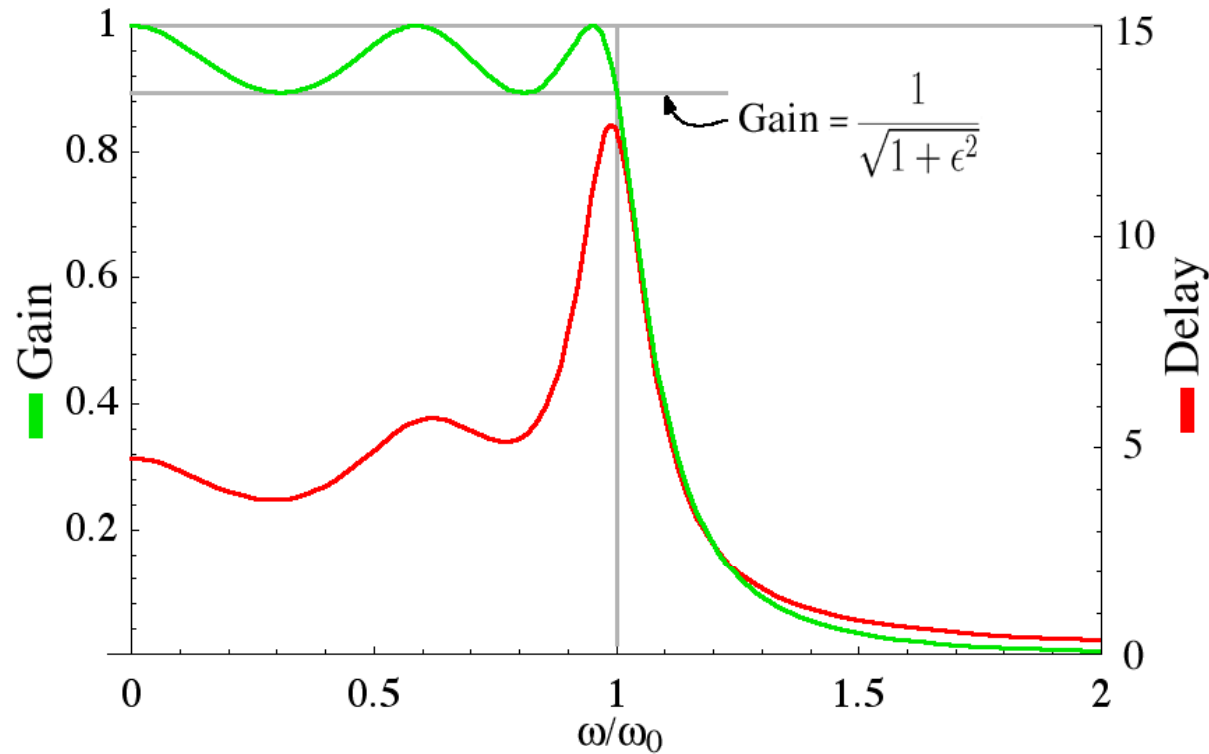


Tsjebysjef filter

- Type I: Ripple i passbånd
- Type II: Ripple i stoppbånd (invers Tsjebysjef)
- Smalere transisjonsbånd og mer passbåndsripple (type I) eller stoppbåndsripple (type II) enn Butterworth
- Definert ved hjelp av Tsjebysjef polynomer
- Pafnutij Tsjebysjef (1821-1894), russisk matematiker

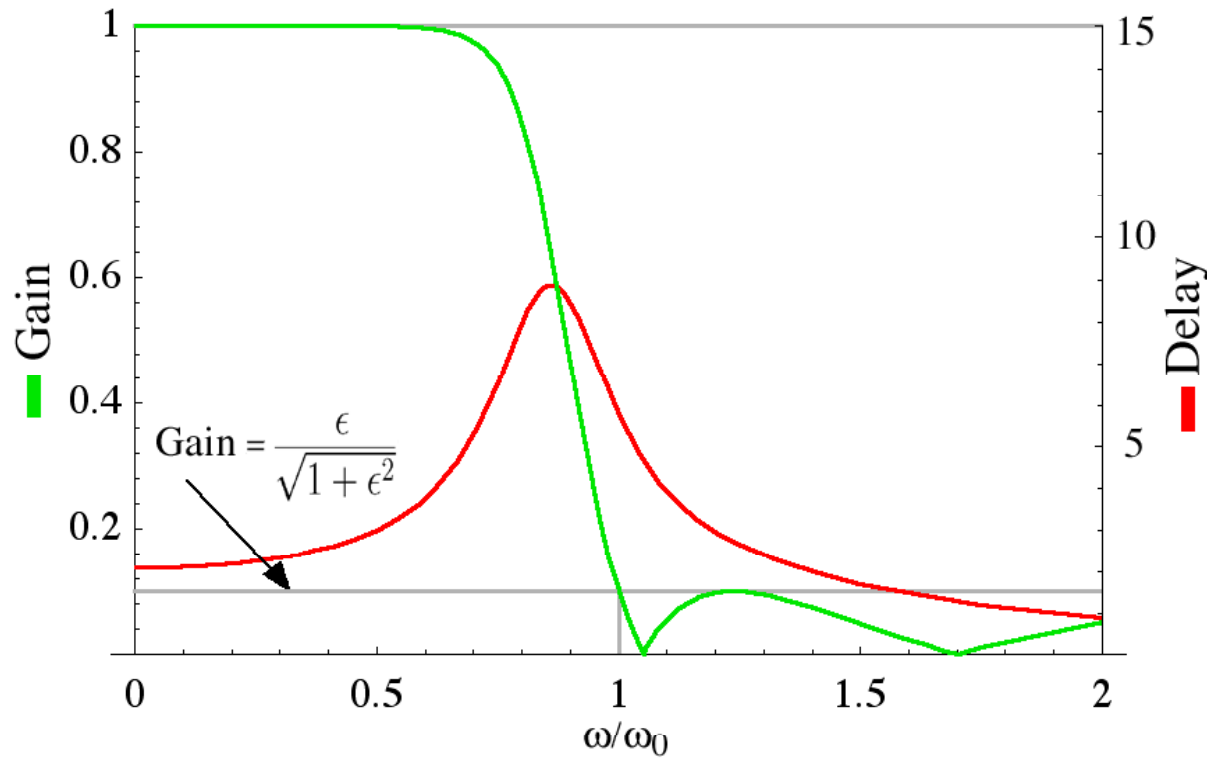


5. Ordens Tsjebysjef, type I ($\epsilon=0.5$)



Ripple i magnitude og i gruppeforsinkelse i passbåndet, men ikke i stoppbåndet

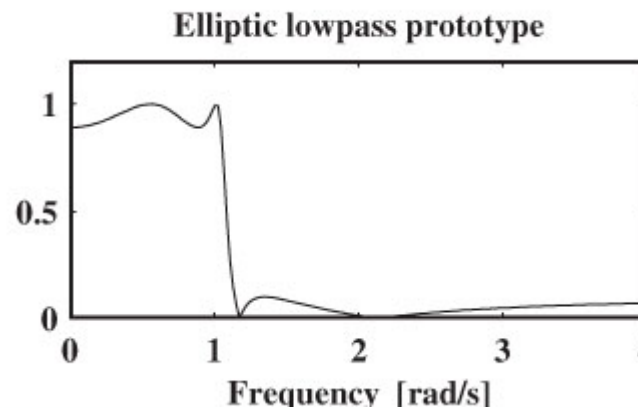
5. Ordens Tsjebysjef, type II ($\epsilon=0.1$)



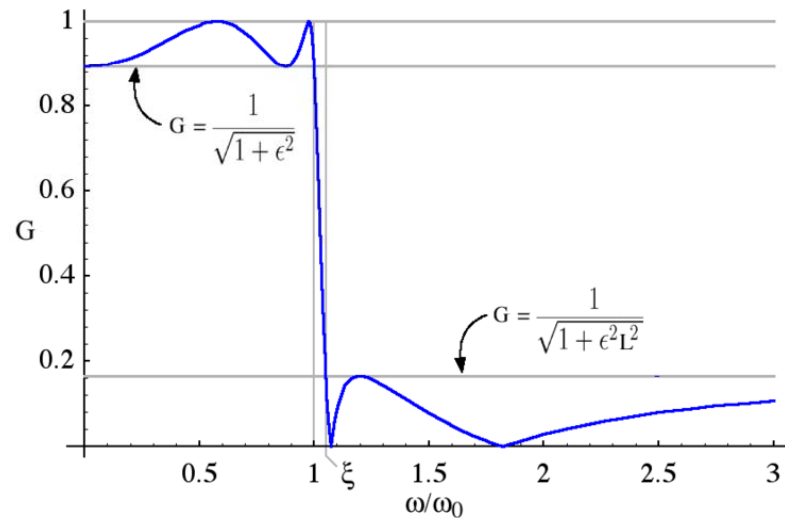
Ripple i magnitude i stoppbåndet, men ikke i passbåndet.

Elliptisk filter (Cauer filter)

- Et elliptisk filter har samme ripple (equiripple) i både passbåndet og stoppbåndet.
- Mengden av ripple i hvert bånd kan justeres uavhengig
- Det mest effektive filtret siden intet annet filter av samme orden kan ha raskere transisjon mellom passbånd og stoppbånd for en gitt verdi for ripple
- Filter uttrykkes ved hjelp av Jacobi elliptiske funksjoner



4. Ordens elliptisk filter

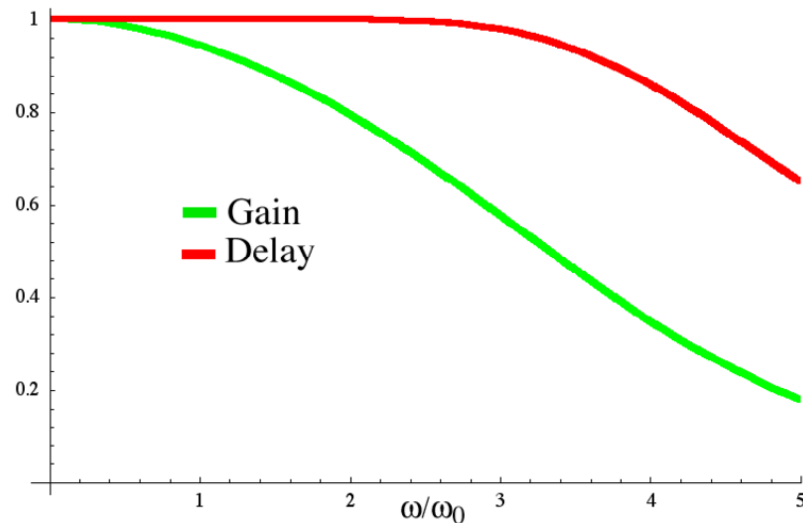


- 4. ordens elliptisk lavpass filter ($\epsilon=0.5$, $\xi=1.05$)
- Viser også laveste gain i passbånd og maksimalt gain i stoppbånd
- Transisjonsbånd mellom normalisert frekvens 1 og ξ

Bessel filter

- Bessel filter: Maksimalt flat gruppeforsinkelse (\approx lineær fase).
- Analoge Bessel filtre har nesten konstant gruppeforsinkelse over hele passbåndet.
- Det filteret som best bevarer kurveformen til filtrerte signaler i passbåndet.
- Friedrich Bessel (1784–1846): Filterpolynomet uttrykkes ved hjelp av Bessel funksjoner

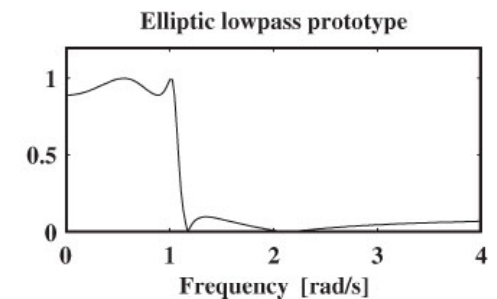
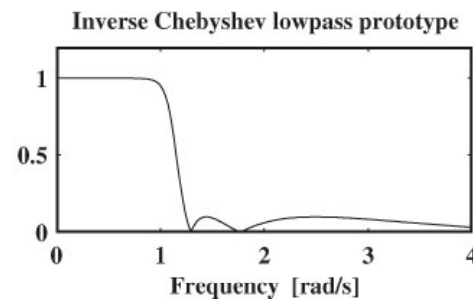
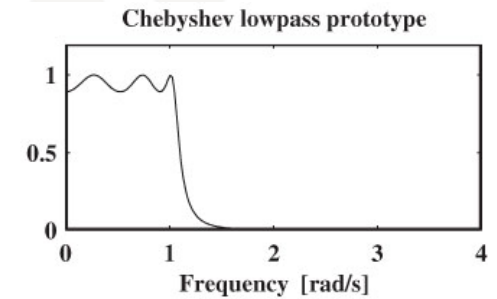
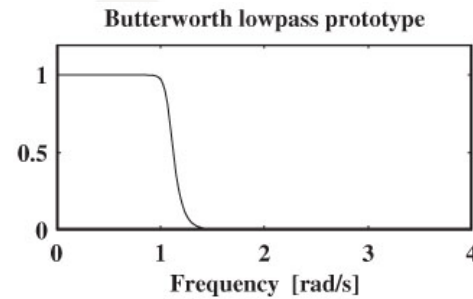
4. Order Bessel Filter



- Gain og gruppeforsinkelse for 4. ordens Bessel filter.
- Merk at transisjonen fra pass- til stoppbånd er langsommere enn for andre filtre
- Merk også at gruppeforsinkelsen er så og si konstant i passbåndet.
- Besselfiltrets gruppeforsinkelse har maksimal flathet ved $\omega = 0$.

Sammenligning

- Butterworth: maksimalt flat amplitude
- Bessel: maksimalt flat gruppeforsinkelse
- Sammenlignet med Tshebysjef/elliptisk, faller Butterworth langsommere og krever høyere orden for å oppnå en viss stoppbåndspesifikasjon.
- Tshebysjef filtre er skarpere (smalere transisjonbånd) enn Butterworth, men ikke så skarpe som elliptiske.
- Elliptiske filtre er skarpere enn alle andre filtre, men de har også rippler over hele båndbredden.



IIR Design:

Transform mellom analog og digital

- Rett fram: sampling av impulsresponsen, $h(t)$ til $h_s[n]$ \Leftrightarrow Impulsinvarians-metoden
- Konsekvens: aliasing for alle deler av frekvensresponsen som er over $F=S/2$

Impulsinvarians (kap 9.2)

- $S=1/t_s \Rightarrow h_s[n]=h(nt_s)$
- Laplace-transform:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt \approx H_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kt_s)\delta[t-kt_s]e^{-st} dt = t_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kt_s)e^{-skt_s} dt$$

- Z-transform:

$$H_d(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_s[k]z^{-k}$$

- $H_a(s) = t_s H_d(z) \Leftrightarrow z = e^{st} = e^{\sigma t_s} e^{j\Omega t_s}$

Impulsinvarians

- $z = e^{st} = e^{\sigma t_s} e^{j\Omega t_s}$

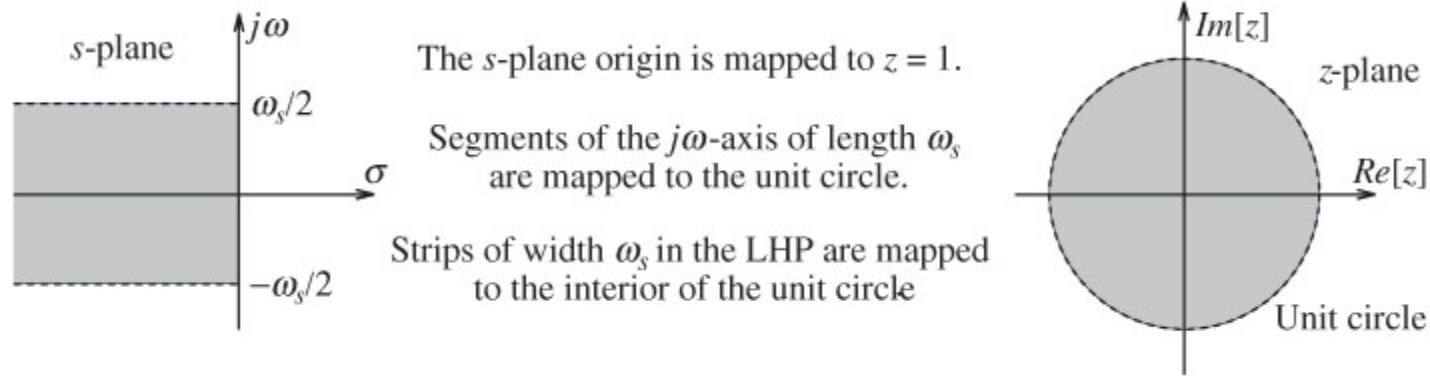


FIGURE 9.2 Characteristics of the mapping $z \Rightarrow \exp(st_s)$. Each strip of width ω_s in the left half of the s -plane is mapped to the interior of the unit circle in the z -plane. Each segment of the $j\omega$ -axis in the s -plane of length ω_s maps to the unit circle itself. Clearly, the mapping is not unique

- Frekvensaksen $s=j\Omega$ transformeres til $|z|=1$
- Stabilitet, kausalitet beholdes
- $\Omega=0 \Leftrightarrow \omega=0$ alltid: LP \Leftrightarrow LP
- Aliasing for alle frekvenser over $S/2$

Bilineær transform (kap 9.6)

- La $\Omega=0$ bli transformert til $\omega=0$
- La $\Omega=\infty$ bli transformert til $\omega=\pi$
- Ikke-lineær transform fra $H(s)$ til $H(z)$:

$$s = \frac{2}{T_d} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

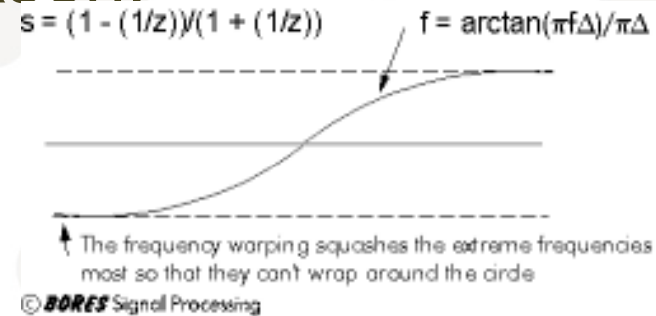
- Ekvivalent transform mellom frekvenser:

$$\Omega = \frac{2}{T_d} \tan(\omega/2)$$

Bilineær transform

- Ingen aliasing, beholder stabilitet og kausalitet, men forvrenger frekvensaksen:

$$\Omega = \frac{2}{T_d} \tan(\omega/2)$$



- Best for lavpass, ettersom passbåndet da blir minst forvrenget
- Derfor designes først prototyp lavpassfiltre
 - For HP, BP etc: Start med analog LP => digital LP => digital HP etc

http://www.bores.com/courses/intro/iir/5_warp.htm

Matlab IIR Filterdesign

- Ordensestimat
- MATLAB programmer for å finne orden og analog båndgrense for IIR filter design med bilineær transform:

```
[N, Wn] = buttord(Wp, Ws, Rp, Rs);
```

```
[N, Wn] = cheb1ord(Wp, Ws, Rp, Rs);
```

```
[N, Wn] = cheb2ord(Wp, Ws, Rp, Rs);
```

```
[N, Wn] = ellipord(Wp, Ws, Rp, Rs);
```

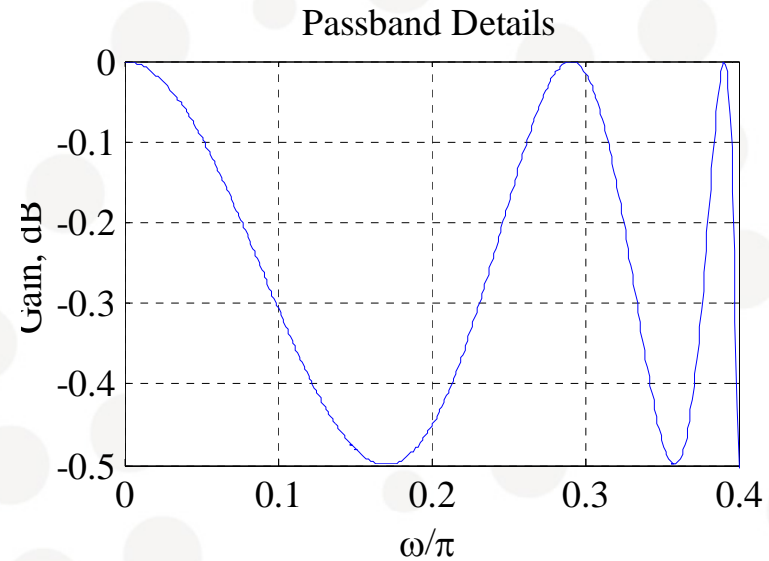
Matlab IIR Filterdesign

- Filter Design
- MATLAB for bilineær filterdesign:
 - `[b, a] = butter(N, Wn)`
 - `[b, a] = cheby1(N, Rp, Wn)`
 - `[b, a] = cheby2(N, Rs, Wn)`
 - `[b, a] = ellip(N, Wn, Rp, Rs)`
- Trenger ikke tenke på bilineær transform
- Transferfunksjonen kan beregnes med `freqz(b, a, w)` der `w` er et sett av vinkelfrekvenser

Matlab IIR Filterdesign

- Lag et elliptisk IIR lavpassfilter med
 - $F_p=0.8$ kHz, $F_s=1$ kHz, $F_{\text{sample}}=4$ kHz, $\alpha_p = 0.5$ dB, $\alpha_s=40$ dB
- Kodebiter:
 - `[N,Wn] = ellipord(0.8/(4/2), 1/(4/2), 0.5, 40);`
 - Resultat: N=5. orden
 - `[b, a] = ellip(N, 0.5, 40, Wn);`

Matlab IIR Filterdesign



- **Sammenligning av orden:**
- `buttord(0.8/(4/2), 1/(4/2), 0.5, 40) ⇒ N=18`
- `cheb1ord(0.8/(4/2), 1/(4/2), 0.5, 40) ⇒ N=8`
- `cheb2ord(0.8/(4/2), 1/(4/2), 0.5, 40) ⇒ N=8`
- `ellipord(0.8/(4/2), 1/(4/2), 0.5, 40) ⇒ N=5`
- FIR: `firpm([0.8 1],[1 0],[10^(0.5/20)-1 10^(-40/20),4]) ⇒ N=28`

9.8 Effekter av endelig ordlengde

- Koeffisienter blir avkortet
 - Som regel blir det en liten endring av frekvensrespons
 - Katastrofal feil: en pol innenfor $|z|=1$ kan havne utenfor (bare IIR)
- Aritmetikken foregår med endelig presisjon
 - Filteret blir et ikke-lineært system
 - Kvantiseringsstøy og avrundingsstøy
 - Feil pga overstyring
- Limit cycles: Oscillasjoner på utgangen uten inngang
 - Bare i IIR da det trenger tilbakekobling
 - Fullskala oscillasjoner hvis overstyring folder rundt ($x > x_{\max} \Rightarrow -x_{\max}$) i stedet for metning ($x > x_{\max} \Rightarrow x_{\max}$)
 - Små oscillasjoner hvis avrunding istedet for avkorting
 - <http://cnx.org/content/m11928/latest/>