



inf

INF3470/4470 Digital signalbehandling
Repetisjon
Sverre Holm



UNIVERSITETET
I OSLO

Contents

- Chapter 1 Overview
- Chapter 2 Discrete Signals
- Chapter 3 Time-Domain Analysis
- Chapter 4 z-Transform Analysis
- Chapter 5 Frequency Domain Analysis
- Chapter 6 Filter Concepts
- Chapter 7 Digital Processing of Analog Signals
- Chapter 8 The Discrete Fourier Transform and Its Applications (kursorisk 8.11-8.12)
- Chapter 9 Design of IIR Filters (kursorisk 9.3-9.5 og 9.7)
- Chapter 10 Design of FIR Filters (kursorisk 10.9-10.10)
- Appendix A Useful Concepts from Analog Theory

- Chapter 2
- Chapter 3
- Chapter 5
- Chapter 6
- Chapter 7
- Chapter 10

Discrete Signals
Time-Domain Analysis
Frequency Domain Analysis
Filter Concepts
Digital Proc. of Analog Signals
Design of FIR Filters

Andre kurs relatert til signalbehandling

Våre kurs:

- INF-GEO4310 - Avbildning (høst)
- INF4480 - Digital signalbehandling II (vår)
- INF5410 - Signalbehandling i rom og tid (vår)

Blogg:

- [Signalbehandling: litt matematikk, litt fysikk og litt informatikk](#)


Andre kurs:

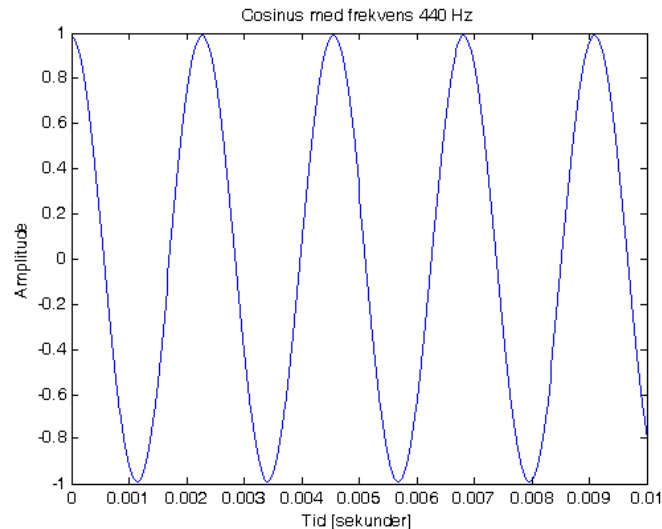
- FYS3240 - PC-basert instrumentering og mikrokontrollere (vår)
- GEO4280 - Seismisk signalbehandling (vår)
- MUS4800 - Lydteori 1 (høst)
- UNIK4170 - Digital kommunikasjon, del 1 (høst)

Signaler: Sinus i tid og frekvens

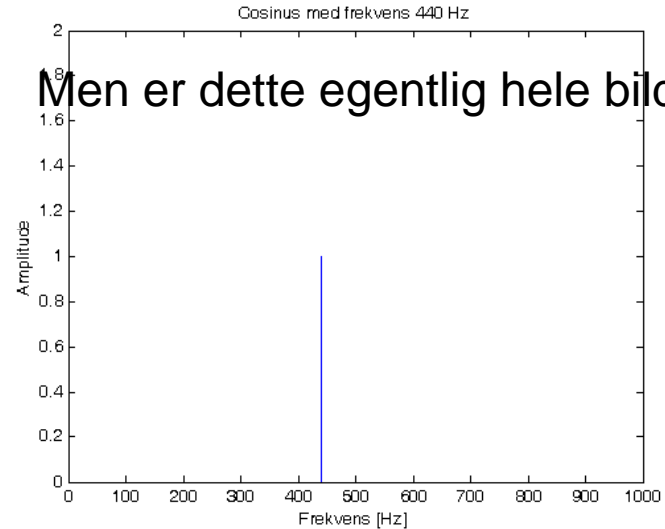
- Cosinus med frekvens f , vinkelfrekvens ω :

$$\cos(2\pi f \cdot t) = \cos(\omega \cdot t)$$

- Enstrøken a: $f=440$ Hz 
- Tidsdomenet:



Frekvensdomenet:

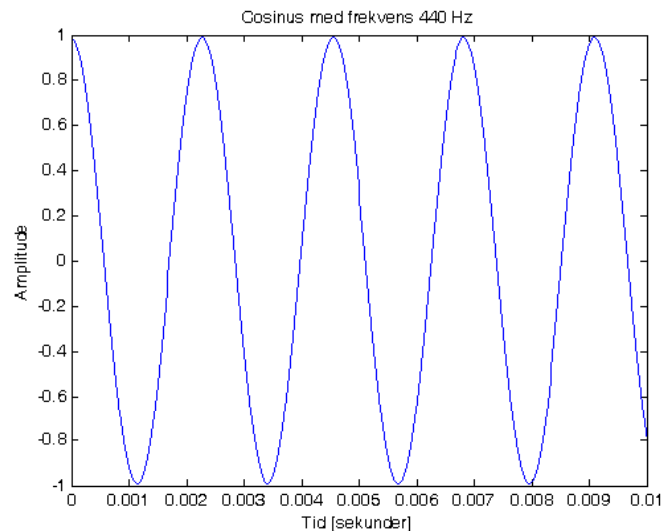


Sinus i tids- og frekvensdomenet

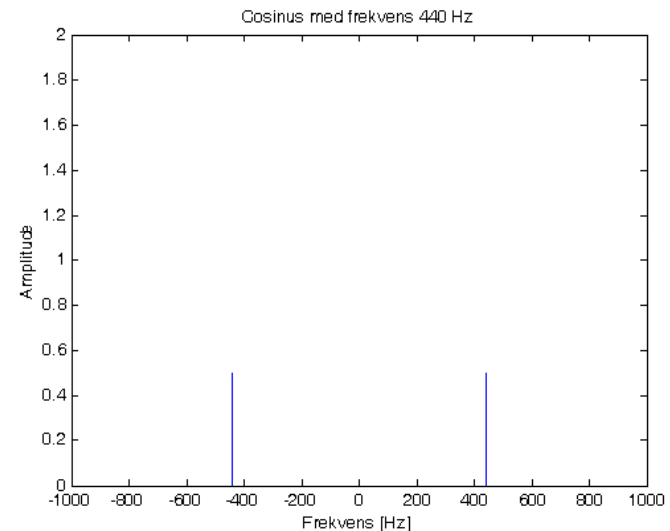
- Kompleks notasjon

$$\cos(2\pi f \cdot t) = \cos(\omega \cdot t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

- Også negative frekvenser
- Tidsdomenet:



- Frekvensdomenet:



Frekvensinnhold i tale og musikk

- Utgangspunkt: 800 Hz
 - Adobe Audition, filtre
- Bedre og bedre gjengivelse:
 - ± 1 oktav: 400-1600
 - ± 2 oktaver: 200-3200
 - ± 3 oktaver: 100-6400
 - ± 4 oktaver: 50-12800
 - ± 5 oktaver: 25-25600



GSM: ~300-3400 Hz



AM: ~50-4000 Hz



Kodet lyd: 20-12...20 kHz



CD: 20-~20000 Hz

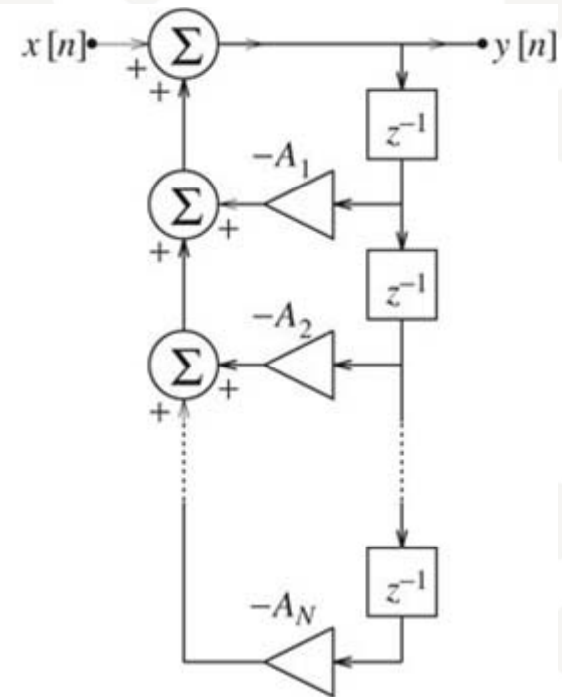


Traktgrammofon:
~300-3000 Hz

http://www.recordedsound.no/documents/sandnes_no.htm

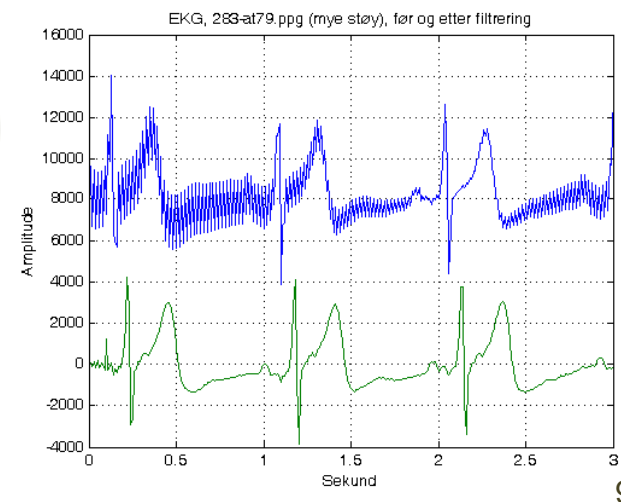
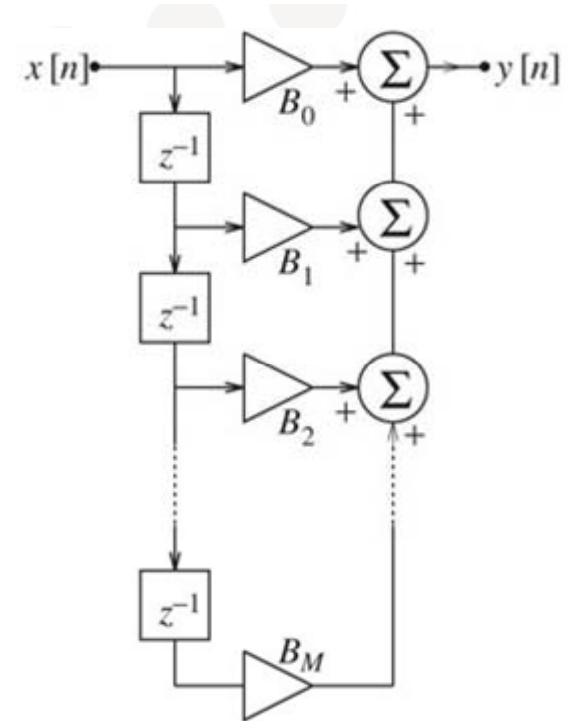
Systemer: IIR Filtre

- IIR – Infinite Impulse Response
 - Transformerer klassiske analoge filtre
- Et IIR filter er rekursivt – har tilbakekopling
 - (Fra fig 3.2)



Systemer: FIR filtre

- FIR – Finite Impulse Response
 - Bare foroverkopling
 - Som regel mer beregninger enn IIR
- Kan lages med *lineær fase*
 - \Leftrightarrow Gruppeforsinkelsen er konstant med frekvens
 - Alle frekvenser forsinkes like mye
 - Viktig for analyse i tidsdomenet, eks EKG
 - Gjør også rekonstruksjonsfilterbanker enklere, eks mp3



4. desember 2012

Signaler

- Høyresidig, venstresidig
- Kausalt, anti-kausalt
 - Viktig begrep for karakterisering av filtre

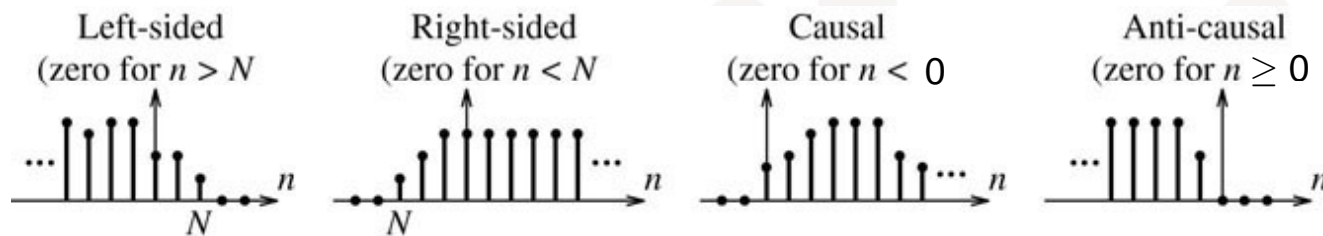


FIGURE 2.1 An infinite-length discrete signal may be left-sided, right-sided, causal, or anti-causal

- Kausal – cause – årsak: begrep fra impulsrespons

Mål på signaler

- Absolutt sum:

$$S_A = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[m]|$$

- Signal energi:

$$E = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[m]|^2$$

- Middeffekt for periodisk signal:

$$P = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |x[m]|^2$$

- Endelig absolutt sum \Leftrightarrow absolutt summerbar

- Endelig E \Leftrightarrow summerbar i kvadrat

- E= ∞ for periodiske signaler

- Middel over N samples i perioden

Er interpolasjon og desimering inverse?

Eks: $x[n]=\{1,2,6,4,8\}$, $N=2$, step-interpolasjon

1. Desimering så interpolasjon

- $\rightarrow \{1,6,8\} \rightarrow \{1,1,6,6,8,8\} \neq x[n]$

2. Interpolasjon så desimering

- $\rightarrow \{1,1,2,2,6,6,4,4,8,8\} \rightarrow \{1,2,6,4,8\} = x[n]$

1. Desimering med N fulgt av interpolasjon med N

2. Interpolasjon med N fulgt av desimering med N

- Desimering opphever interpolasjon, men ikke omvendt
 - Må starte med å øke antall samples, ikke med å kaste dem!

2.5 Tidsdiskrete sinuser

- Analog (co)sinus $x(t)=\cos(2\pi ft)$
- Samples ved t_s der samplingsfrekvensen er $S=1/t_s$ Hz, dvs. $t=n\cdot t_s$
- Gir diskret cosinus: $x[n] = \cos(2\pi f\cdot n\cdot t_s) = \cos(2\pi\cdot n\cdot f/S) = \cos(2\pi\cdot n\cdot F)$
- 4 frekvensbegreper: f , $F=f/S$, og vinkelfrekvens $\omega=2\pi f$ og $\Omega=2\pi F$:

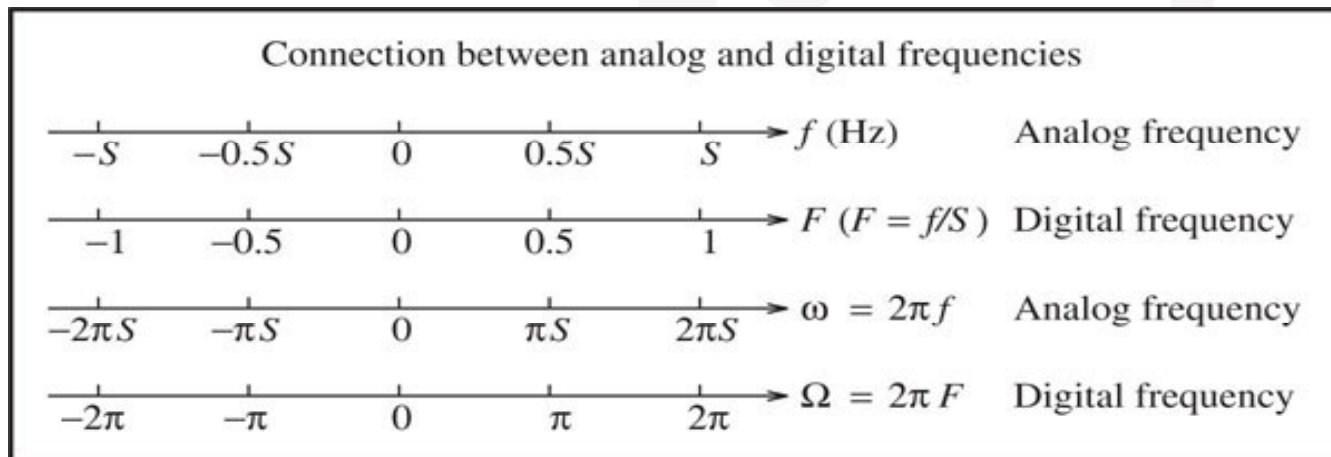


FIGURE 2.5 Comparison of analog and digital frequencies. Note that the digital frequency $F = 1$ corresponds to the sampling frequency $f = S$ because, by definition, the digital frequency $F = f/S$ is the ratio of the analog frequency f and the sampling rate S

13

Sinuser

Analog:

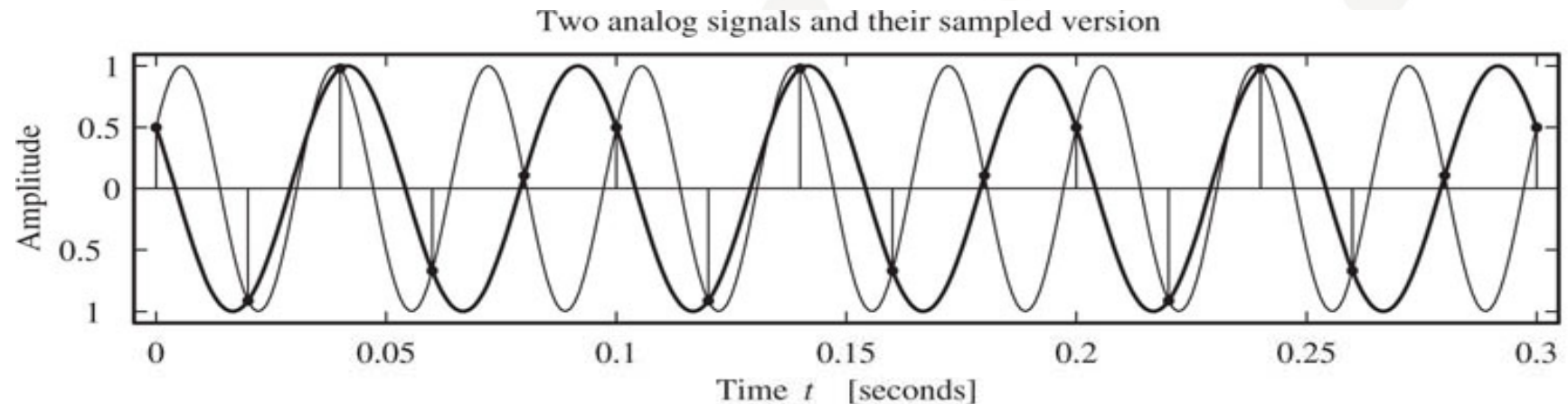
- Er alltid periodisk i tid
- Er aldri periodisk i frekvens

Tids-diskret:

- Er bare periodisk i tid under bestemte vilkår ($F_0 = k/N$ – et rasjonalt tall)
- Er alltid periodisk i frekvens
 - Er basis for aliasing og samplingsteoremet

Eksempel 2.7c: Identiske samples

- To analoge sinuser er samplet og leder til samme samples. Er det aliasing her? Finn det originale og det aliasede signalet. Finn frekvensene.



Systemer: LTI

- LTI = Lineær og tidsinvariant
 - Mer generelt: skift-invariant (også romlige signaler og systemer)
- Forutsetning for beskrivelse med impulsrespons og frekvensrespons (via Fourier-transform)
- **Veldig viktig begrep å forstå!**
- Sjekk av en operator $O\{\cdot\}$:
 - Linearitet:
 - $O\{Ax_1[n] + Bx_2[n]\} = A \cdot O\{x_1[n]\} + B \cdot O\{x_2[n]\}$
 - Tidsinvariant:
 - $O\{x[n]\} = y[n] \Rightarrow O\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0]$

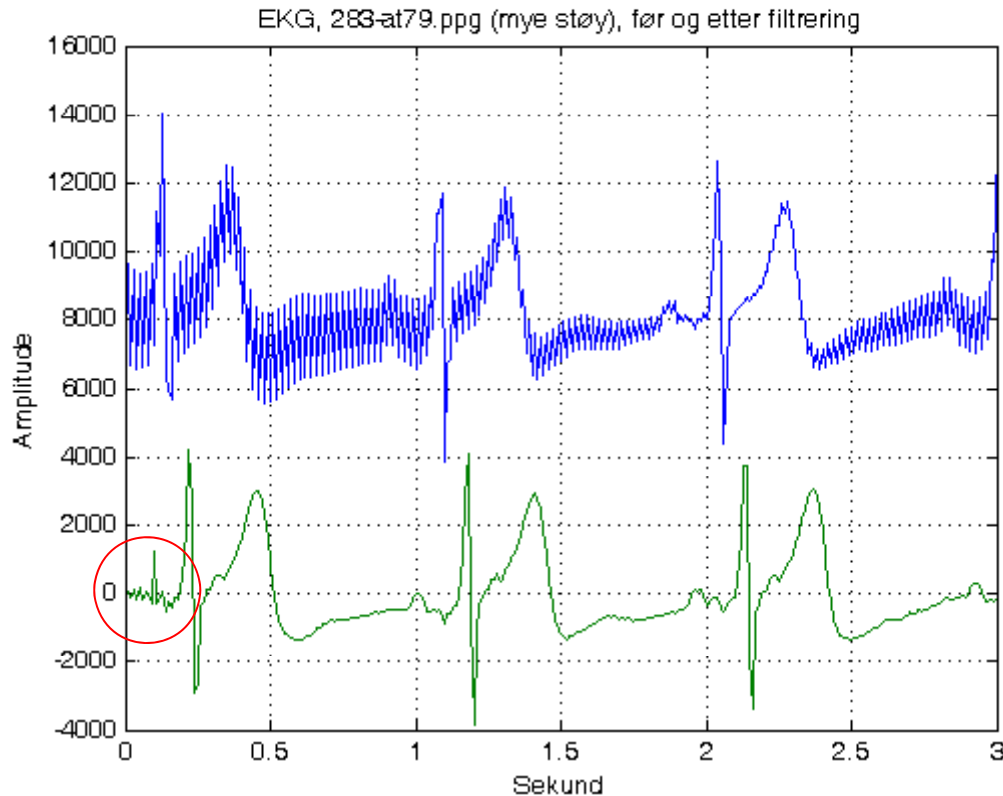
Ikke-rekursivt filter– FIR filter

- Generelt: $y[n] + A_1 y[n-1] + \dots + A_N y[n-N]$
 $= B_0 x[n] + B_1 x[n-1] + \dots + B_M x[n-M]$
- Ikke-rekursivt filter: $y[n] = B_0 x[n] + B_1 x[n-1] + \dots + B_M x[n-M]$
 - Orden M
 - Utgangen dannes fra forsinkede inngangsverdier
 - Kobler ikke tilbake: ikke-rekursivt
 - Kalles også Moving Average (MA)
 - Hvis alle $B_m = 1/(M+1)$ blir det middelværdi
 - Vil vise etter hvert at $h[n] = [B_0, \dots, B_M]$ og at $h[n]$ dermed er endelig: \Rightarrow Finite Impulse Response Filter

Rekursivt filter – IIR filter

- Generelt: $y[n] + A_1 y[n-1] + \dots + A_N y[n-N]$
 $= B_0 x[n] + B_1 x[n-1] + \dots + B_M x[n-M]$
- Rekursivt filter: $y[n] + A_1 y[n-1] + \dots + A_N y[n-N] = B_0 x[n]$
 - Orden N
 - Kobler tilbake: rekursjon, kalles også Autoregressivt (AR)
 - Skal se at $h[n]$ blir ∞ lang: Infinite Impulse Response Filter
- Det mest generelle filteret har også MA-del i tillegg til AR: ARMA (autoregressive – moving average)
 - Utgangen avhenger av tidligere utgangsverdier, y , og også tidligere verdier av inngangen, x

Transient: EKG - Før og etter filtrering



Eks fra første forelesing
Se nøyer på starten av det
filtrerte signalet.

- $F_{\text{sample}}=100$ Hz
- FIR Filterlengde $N=20$
 $20/100$ sek = 200 ms
- Uønskede effekter:
 - Nulling
 - Smell (lyd)
- Blokkprosessering med uønsket effekt ved hver blokkgrense
- Kan bli enda mer med IIR-filter

FIR impulsrespons (ikke-rekursivt filter)

- $y[n] = B_0x[n] + B_1x[n-1] + \dots + B_Mx[n-M]$
 - La $x[n]$ være $\delta[n]$
- Impulsrespons:
 $h[n] = B_0\delta[n] + B_1\delta[n-1] + \dots + B_M\delta[n-M]$
- $h[n] = \{B_0, B_1, \dots, B_M\} = \text{filterkoeffisientene—lett!}$
 - Finite Impulse Response filter
 - Ikke-rekursivt filter
 - Transversalt filter

Impulsrespons for rekursivt filter (IIR)

- Noen få koeffisienter kan generere ∞ lang $h[n]$
- Eks $h[n]$ gitt som et uttrykk
 - Filter gitt ved $y[n] - \alpha y[n-1] = x[n]$
 - Løs $h[n] = \delta[n] + \alpha h[n-1]$ med $h[-1]=0$
 - Rekursjon:
 - $h[0] = 1$ – eneste ledd der inngangen har noen verdi
 - $h[1] = \alpha$
 - $h[2] = \alpha^2$
 - ...
 - $h[n] = \alpha^n u[n]$ (Husk $u[n]$ da løsningen er bare for $n \geq 0$)
 - Hva slags filter? lavpass for $0 < \alpha < 1$, høypass for $-1 < \alpha < 0$

3.9 Diskret konvolusjon

- Metode for å finne responsen fra et filter med 0 initialbetingelser, fra impulsresponsen $h[n]$
- Enkelt konsept:
 - $\delta[n] \Rightarrow h[n]$
 - Har tidligere vist dekomponering: $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$
 - Linearitet og tidsinvarians betyr:
 - Linearitet: $x[0] \delta[n] \Rightarrow x[0]h[n]$
 - Tidsinvarians: $x[1] \delta[n-1] \Rightarrow x[1]h[n-1]$
 - Generelt for LTI: $x[k] \delta[n-k] \Rightarrow x[k]h[n-k]$
$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$
- Betegnelse for konvolusjon: $y[n]=x[n]*h[n]$

Konvolusjon

- Kalles lineær konvolusjon eller konvolusjonssum
- Kan snu om på indeksene (kommutativ):

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

- Altså $y[n]=x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$
- Enkel å regne ut på direkten for enkle x og h , særlig hvis de inneholder sprangfunksjonen $u[n]$ da den bare betyr en begrensning av indeksene i summen

Stabilitet

- LTI systemer beskrevet med differanselikninger:
 - Nødvendig og tilstrekkelig betingelse er at røttene til den karakteristiske likningen har tallverdi < 1
 - Mer om dette når vi kommer til z-transformen

- LTI systemer beskrevet med impulsrespons:

- La $|x[n]| < M$, da er også $|x[n-k]| < M$
- Da er konvolusjonssummen $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \Rightarrow$

$$|y[n]| < \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]| < M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

- Altså er det nok at $|h[n]|$ må være absolutt summerbar for BIBO stabilitet

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

3.12 Kausalitet

- Ingen utgang før det kommer noen inngang
 - Årsak \Rightarrow virkning
 - Systemet kan ikke gjette fremtiden
- $\Leftrightarrow h[n]=0$ for $n<0$
 - Fra tidligere: Startindeksen til y = summen av startindeksene til x og h
 - Så da starter $y[n]$ tidligst på samme tid som $x[n]$

Z-transform

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m}$$

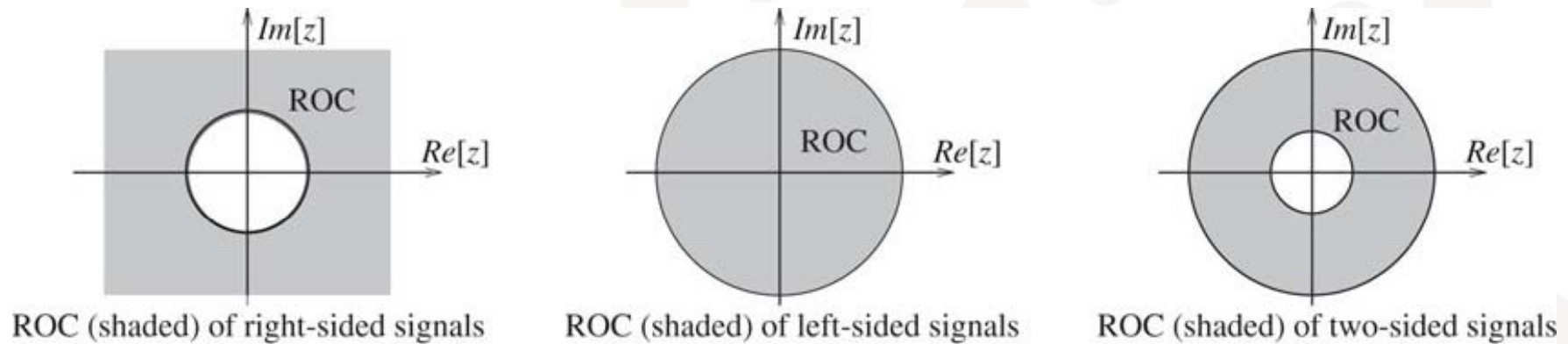


FIGURE 4.1 The ROC (shown shaded) of the z-transform for various sequences. For a right-sided signal or causal signal, the ROC lies outside a circle of finite radius. For a left-sided signal or anti-causal signal, the ROC lies inside a circle of finite radius. For a two-sided signal, the ROC is an annular region

Konvolusjon \Leftrightarrow produkt av z-transformer

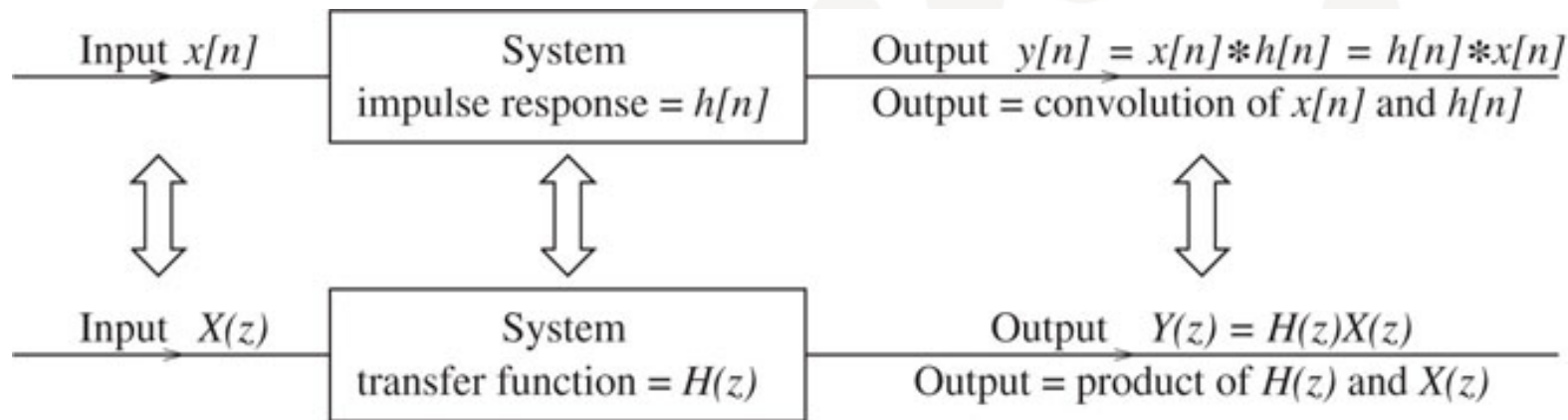
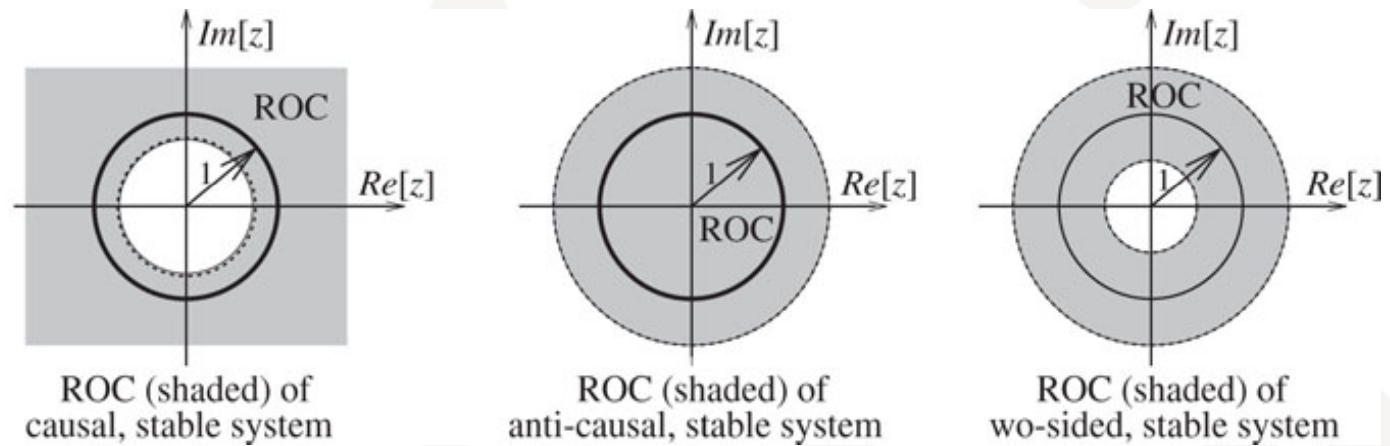


FIGURE 4.3 System description in the time domain and z-domain. In the time domain, the system output is found by the convolution of $x[n]$ and $h[n]$. In the z-domain, the transformed output $Y(z)$ is found by the product of $X(z)$ and $H(z)$. Convolution in one domain transforms to multiplication in the other

Stabilitet og kausalitet

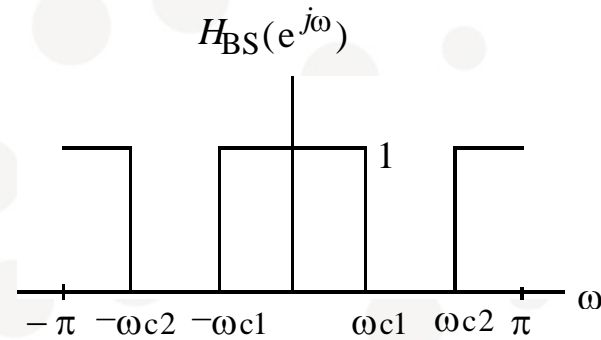
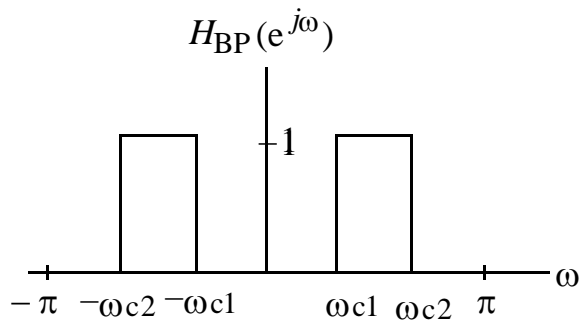
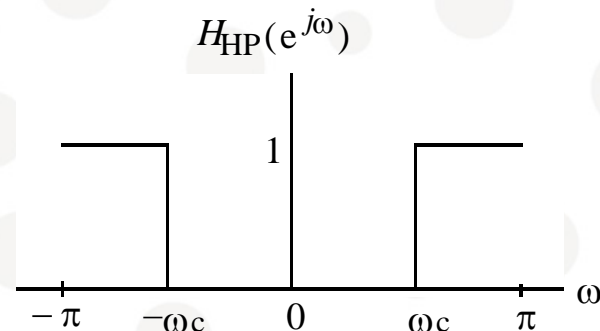
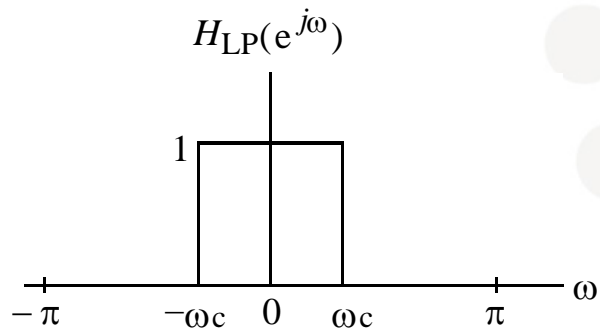
$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m}$$

FIGURE 4.8 The ROC of stable systems (shown shaded) always includes the unit circle



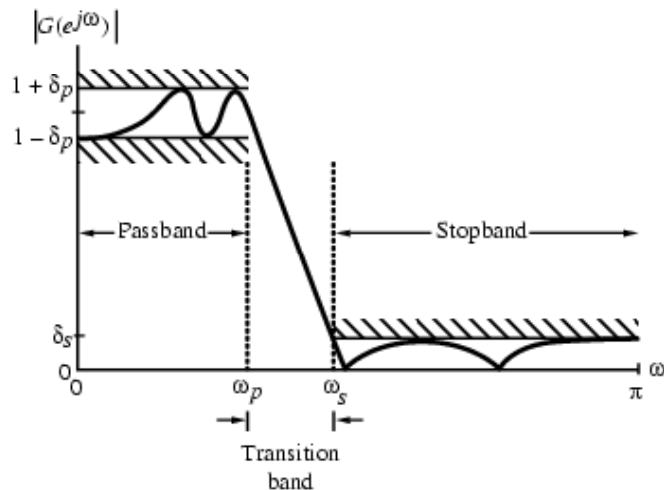
Ideelle filtre

- Lavpass, høypass, båndpass, båndstopp



Filterspesifikasjon

- Magnituderespons:
 - Pass-, stopp-, transisjonsbånd



- Faserespons:
 - Lineær fase
 - Ikke-lineær fase

- **Lineær forvrengning:**

- Amplitude distorsjon: Ikke-flat respons i passbånd
- Fasedistorsjon: Avvik fra lineær fase
- Veier eller forsinker forskjellige frekvenser ulikt

- **Ulineær forvrengning:**

- Genererer nye frekvenskomponenter
- Ikke-lineært system
- Ingen LTI-filtre kan gi ulineær forvrengning
- Høres lett!

Lineær fase \Leftrightarrow Ren tidsforsinkelse

- Cosinus som faseforsinkes med ϕ :
 - $\cos(\omega t + \phi) = \cos(\omega(t + \phi/\omega)) = \cos(\omega(t - t_p))$
 - Hvis $\phi = -\omega t_p$ – lineær fase – så er det det samme som konstant tidsforsinkelse
- Viktig sammenheng: fase og tidsforsinkelse!
- Faseforsinkelse: $t_p(F_0) = -\phi/\omega = -\angle H(F_0)/(2\pi F)$
- Gruppeforsinkelse: $t_g(F_0) = -d\angle H(F_0)/(2\pi dF)$
 - Forsinkelse av en informasjon som er modulert inn på signalet
 - I det enkle cos-eksemplet er $t_p = t_g$

FIR lineær fase – nullpunkter

- Ren forsinkelse endrer ikke nullpunkter
 - $h[n]$ har samme egenskaper som den ikke-kausale, symmetriske $a[n]$

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]z^{-m}$$

1. Reell $h[n]$

- $\Leftrightarrow H(z) = H^*(z)$: nullpunkt i $r \Rightarrow$ nullpunkt i r^*

2. Symmetri $a[n] = a[-n]$, $h[n+M/2] = h[n-M/2]$

- $\Leftrightarrow H(z) = H(1/z)$: nullpunkt i $r \Rightarrow$ nullpunkt i $1/r$

3. Altså $H(z) = H^*(z) = H^*(1/z) = H(1/z)$: reell

Symmetri & like/odde antall koeffisienter

- Type 1: Filter med odde antall koeffisienter:
 - Eks: {0.25 0.5 0.25}
 - Like antall nullpunkt bestående av 4-er grupper + 2-er grupper, ingen enslige nullpunkt i $z = \pm 1$
 - Analogi: 2. grads ligning har 3 koeffisienter (odde antall) og 2 løsninger (like antall)
- Type 2: Filter med like antall koeffisienter:
 - Eks: {0.5 0.5}
 - Odde antall nullpunkt bestående av 4-er grupper, 2-er grupper + *et obligatorisk enslig nullpunkt.*
 - *Det enslige nullpunktet må være i $z = -1$ da nullpunkt i $z = 1$ krever asymmetri (se neste slide) - (ikke HP-filter)*

Odde symmetri i lineær fase filter

- Antisymmetrisk filter: $h[n] = -h[-n] \Rightarrow$ imaginær $H(F)$
 - $H(F) = jA(F)e^{-j2\pi\alpha F} \stackrel{d}{=} A(F)e^{-j(2\pi\alpha F - \pi/2)}$ der $A(F)$ er reell
- Fasen består av konstant $e^{j\pi/2}$ som får et lineær fase tillegg pga forsinkelse med halve lengden
- Vil alltid ha nullpunkt i $z=1$ da $H(0)=0$ pga $\sum h[n]=0$
- Mye mindre viktig enn de to like-symmetriske filtrene

Lineær fase filtre: Oppsummering

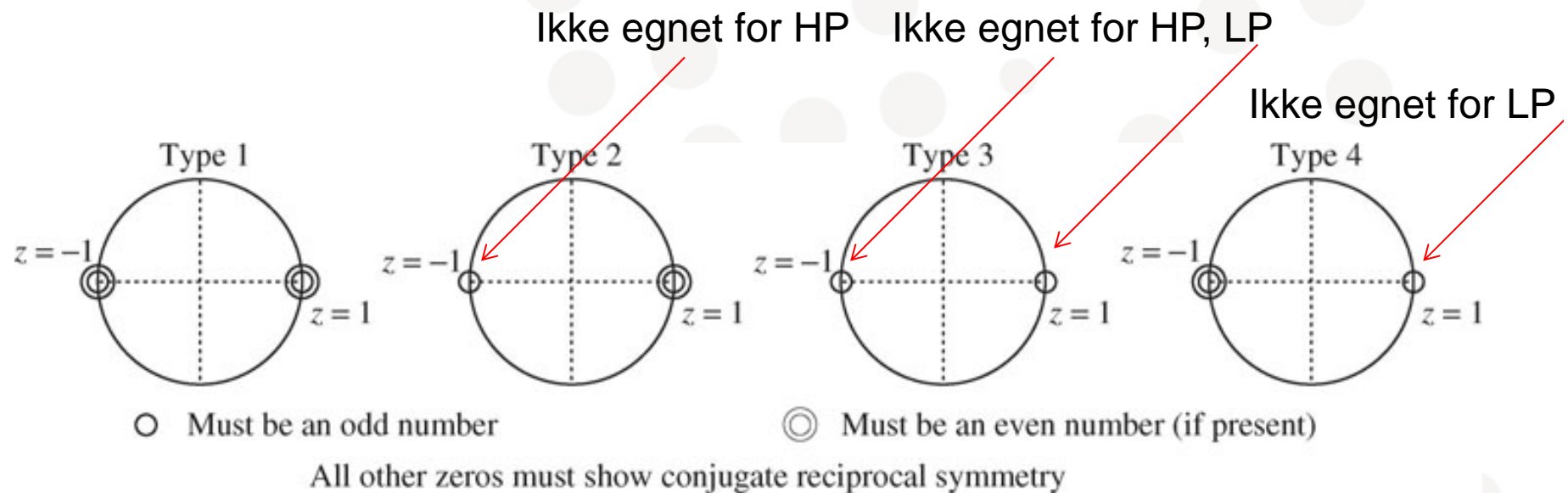
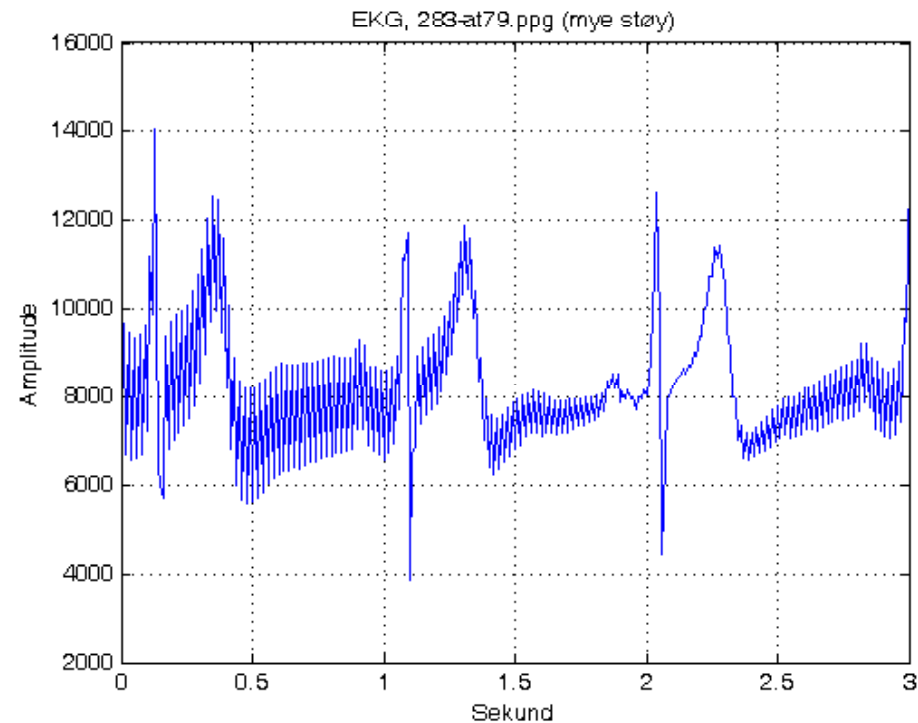


FIGURE 6.5 Identifying the sequence type from its zeros at $z = \pm 1$. Type 2 sequences *require* an odd number of zeros at $z = -1$, type 4 sequences *require* an odd number of zeros at $z = 1$, and type 3 sequences *require* an odd number of zeros at both $z = 1$ and $z = -1$. The number of zeros (if present) at the locations $z = \pm 1$ (other than the ones required) must be even. Naturally, any zeros elsewhere must satisfy conjugate reciprocal symmetry

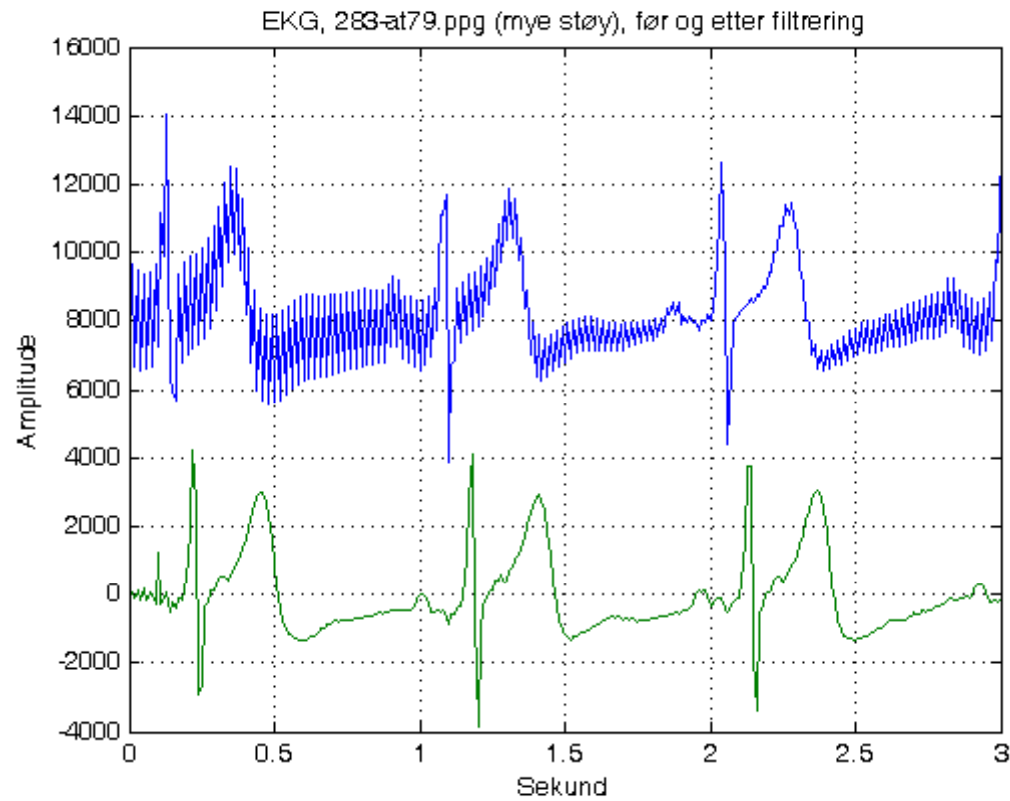
Støyfiltrering på EKG-signal

- Matlab: [Aase.m](#) - Filtrere bort 50 Hz fra EKG-signal

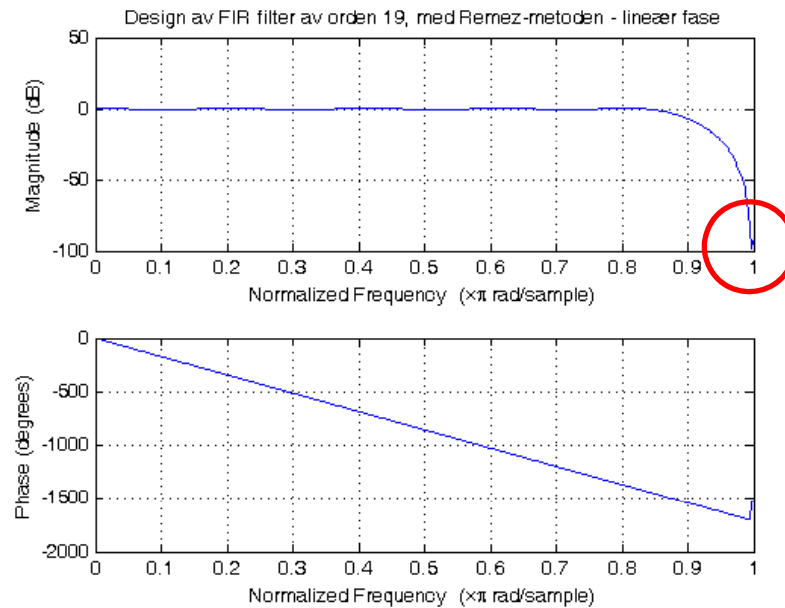
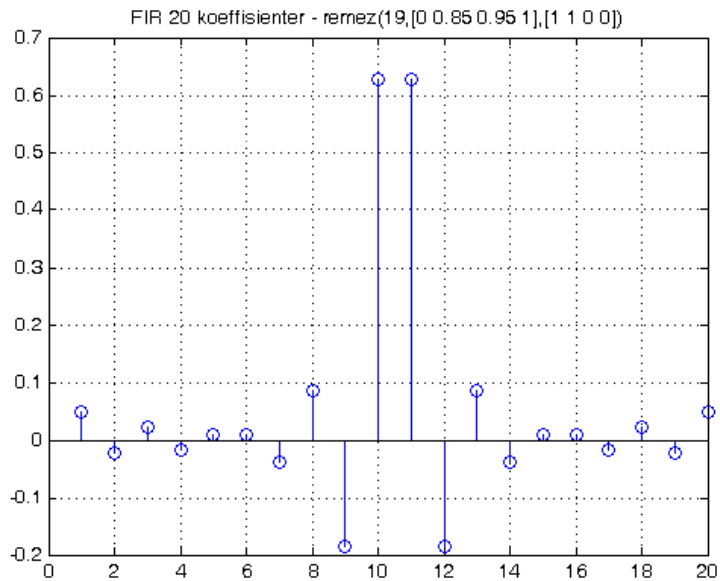
- Data fra Ottar Aase, Kardiologi, Ullevål Universitetssykehus



EKG: Før og etter filtrering



EKG: Filter for støyfiltrering



Symmetrisk, like antall koeffisienter (N=20): type 2.
Alltid nullpunkt i $z=-1$, dvs $F=0.5$. Velegnet som lavpassfilter

6.2.3 Midlingsfiltre

- Kausalt N-punkts midlingsfilter (moving average)
 - $y[n] = (x[n] + x[n-1] + \dots + x[n-(N-1)]) / N$
 - Like symmetri: Type 1 eller 2

- Transferfunksjon:

$$H(F) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] e^{-j2\pi kF} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (e^{-j2\pi F})^k = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j2\pi NF}}{1 - e^{-j2\pi F}}$$

- Ikke sentrer sum nr 2 og legg sammen til cosinuser!
- Trick, ta ut halve eksp.faktoren i teller/nevner:

$$H(F) = \frac{1}{N} \left(\frac{e^{-j\pi NF}}{e^{-j\pi F}} \right) \cdot \left(\frac{e^{j\pi NF} - e^{-j\pi NF}}{e^{j\pi F} - e^{-j\pi F}} \right) = e^{-j\pi(N-1)F} \cdot \frac{\sin(\pi NF)}{N \sin(\pi F)}$$

Midlingsfiltre

$$H(F) = e^{-j\pi(N-1)F} \cdot \frac{\sin(\pi NF)}{N \sin(\pi F)}$$

Lineær fase + et ledd som er reelt

- Siste ledd: Dirichlet kjerne, aliased sinc-funksjon
 - $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$
- Midlingsfilter, egenskaper:
 - $H(0) = 1$ (l'Hôpitals regel eller Taylor-rekke)
 - Nullpunkter: $\sin(\pi NF)=0 \Leftrightarrow \pi NF=k\pi \Rightarrow F=k/N$
 - $N-1$ nullpunkter innenfor $0.5 < F \leq 0.5$
 - Egentlig N stk, men nullpunktet i $F=0$ kanselleres av en pol
 - $|H(0.5)|=0$ for N like – type 2 filter
 - $k=N/2 \Rightarrow F=(N/2 / N)= 0.5$

Regler for pol-nullpunktsplassering

1. Kompleks konjugerte par \Leftrightarrow reell $h[n]$
 2. Kausalitet: Antall nullpunkt \leq antall poler
 3. Poler/nullpunkter i origo påvirker ikke $|H(F)|$
 4. Stabilitet: Alle poler for $|z|<1$
 - Jo nærmere $|z|=1 \Rightarrow$ Jo større og smalere topp
 - **Passbånd:** poler nær $|z|=1$
 - Tommelfingerregel, smalbåndsfiler: Båndbredde $\Delta\Omega \leq 0.2 \Rightarrow$ poler ved $z = R_p \cdot \exp(\pm j \Omega_0)$ der $R_p \approx 1 - 0.5\Delta\Omega$
 5. Minimum fase: Nullpunkter kan være overalt, men bare $|z| \leq 1$ gir minimum fase
 - Nullpunkter på $|z|=1$ gir nullpunkter i $|H(F)|$
 - **Stoppbånd:** nullpunkter nær $|z|=1$
 6. **Transisjonsbånd:** pol og null nær hverandre
 7. Pol-null interaksjon: jo nærmere hverandre jo mer
- Begrensning: Kan bare designe enkle filtre med disse reglene

Spektra ved ideell sampling

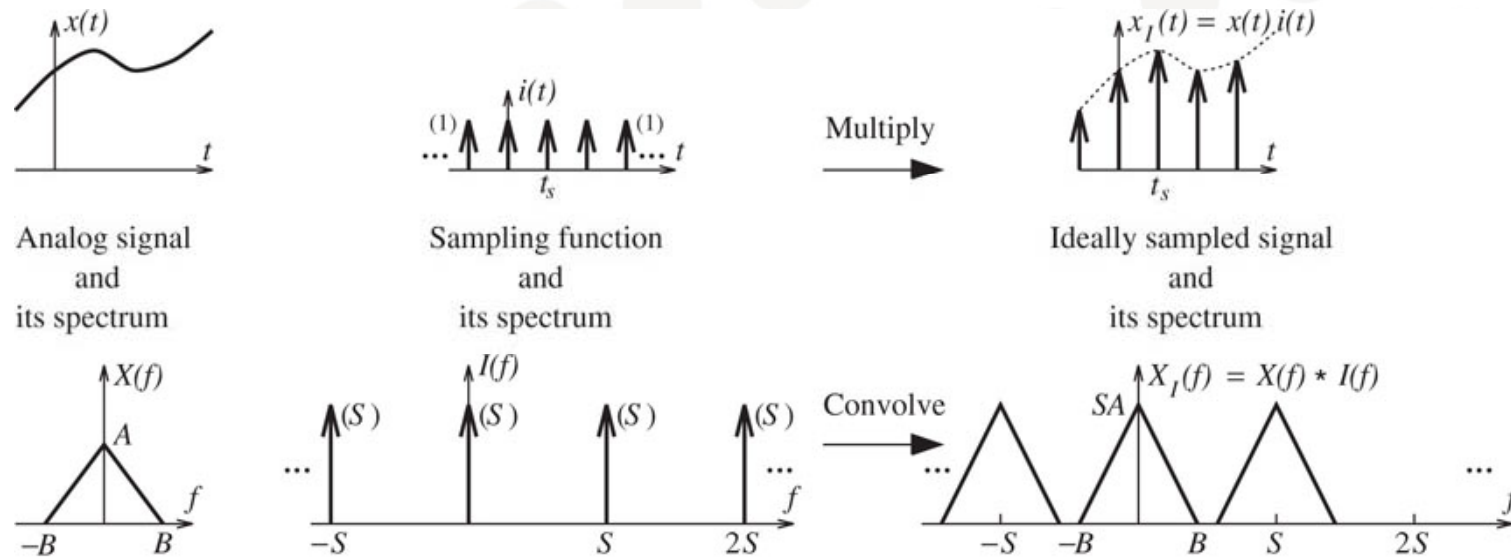


FIGURE 7.2 Spectra of the signals for ideal sampling. The spectrum $X(f)$ of the analog signal is assumed to be bandlimited to B . The spectrum of the impulse sampling function is also a periodic impulse train with equal strengths. Multiplication of the analog signal and the ideal sampling function results in the convolution of their respective spectra. The spectrum of the sampled signal thus consists of replicas of $X(f)$ at multiples of the sampling rate S

- Multiplikasjon i tidsdomenet \Leftrightarrow Konvolusjon i frekvensdomenet
- Konvolusjon med impulser \Leftrightarrow forskjøvede kopier \Rightarrow periodisk

Sampling i tid og frekvens: formler

- Sampling \Leftrightarrow multiplikasjon med impulstog

$$x_I(t) = x(t)i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nt_s)$$

- Fourier transformen til impulstog:
 - Analog signalbehandling, Appendiks A5.6
 - Et nytt impulstog, $S=1/t_s$:

$$I(f) = S \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kS)$$

- Spektrum av samplet signal:

$$X_I(f) = X(f) * S \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - kS) = S \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kS)$$

- Dvs $X(f)$ og kopier av den med avstand S

Over-, undersampling, kritisk sampling

- Båndbredde B vs. samplingsfrekvens S
- Replikaer av originalt spektrum, kan overlappe

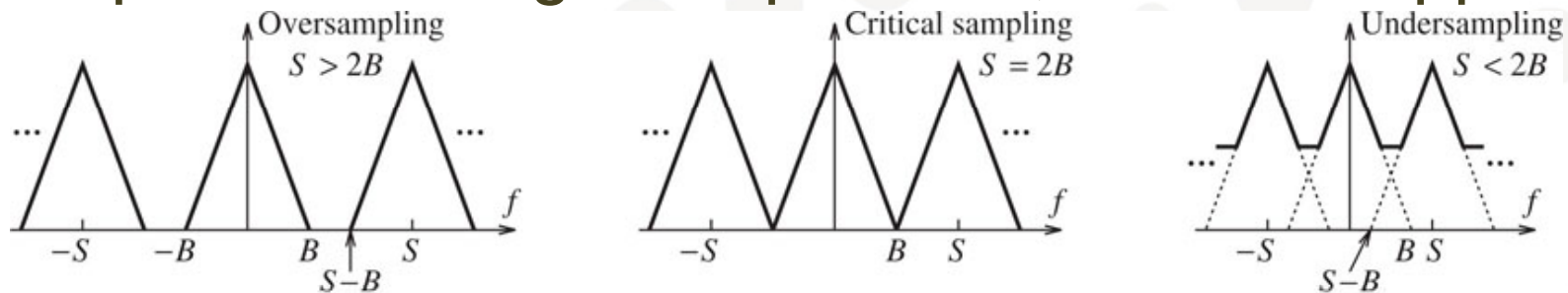


FIGURE 7.3 Spectrum of an ideally sampled signal for three choices of the sampling frequency S . The spectrum $X(f)$ of the analog signal is bandlimited to B . If $S > 2B$ (oversampling), the periodic spectrum of the sampled signal shows non-overlapping replicas of $X(f)$. If $S < 2B$ (undersampling), the replicas overlap and one period of the periodic spectrum no longer matches $X(f)$. The critical case $S = 2B$ forms the transition between oversampling and undersampling

- Samplingsteoremet: $S \geq 2B$: Taper ikke info
 - $S=2B$: Nyquist rate, $t_N=1/2B$: Nyquist intervallet

Aliasing for samplet sinus

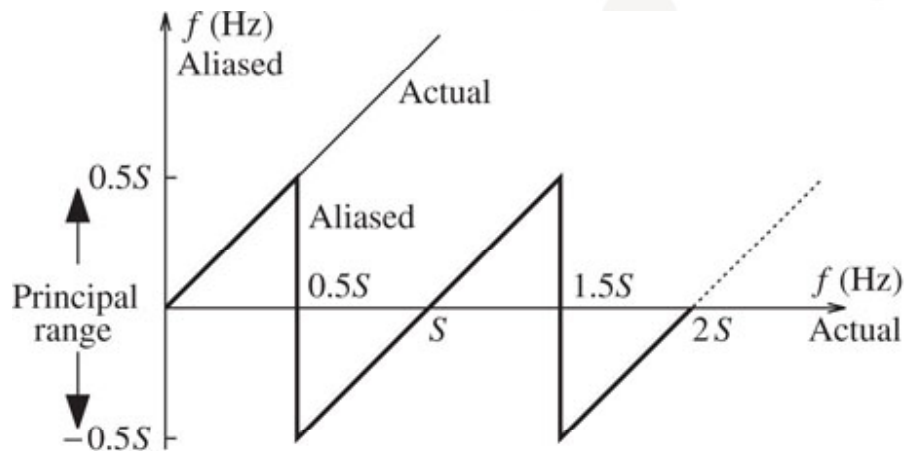


FIGURE 7.4 Relation between the actual and aliased frequency. There a unique correspondence between the actual and aliased frequency only if $f < 0.5S$. If the actual frequency exceeds $0.5S$, it gets aliased to a lower frequency between $-0.5S$ and $0.5S$. The frequency $0.5S$ at which the aliased frequency flips (changes sign) is called the folding frequency

- $f_0 = S/2 + \epsilon$: sprang på S
- $f_0 = f_a + NS$: flertydighet

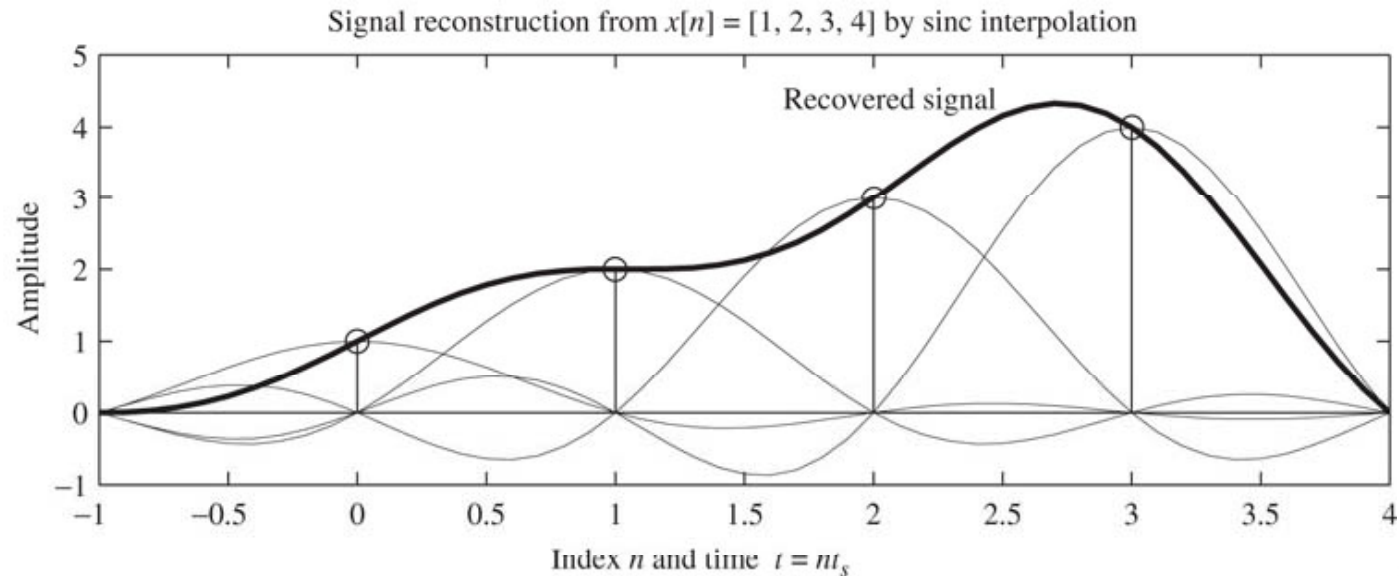
4. desember 2012

45

Sinc interpolasjon

$$x(t) = \sum_n x[n]h(t - nt_s) = \sum_n x[n]\text{sinc}\left(\frac{t-nt_s}{t_s}\right)$$

FIGURE 7.12 Ideal recovery of an analog signal by sinc interpolation. The recovered signal is the sum of sinc functions centered at the sampling instants. The zeros of these sinc functions occur at multiples of the sampling interval



- Merk:
 - I et sampletidspunkt, $t=nt_s$: bare bidrag fra en sample
 - Må kjenne alle samples, $-\infty < n < \infty$, for gjenvinning
 - Sinc er den korrekte interpolasjon, alle andre interpolatorer må måles mot den

0. eller 1. ordens hold

- Trinn-interpolasjon (0-te ordens hold), allerede analysert:

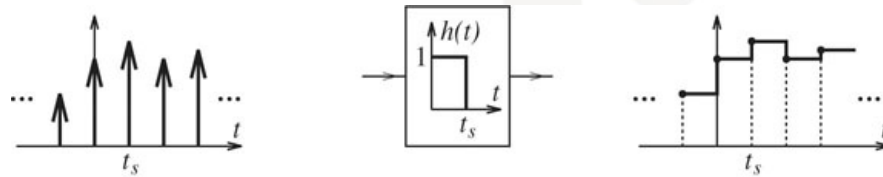


FIGURE 7.13 Step interpolation is just a zero-order-hold operation on an ideally sampled signal. It produces a staircase approximation of the original analog signal

- Lineær interpolasjon: trenger en sample inn i fremtiden

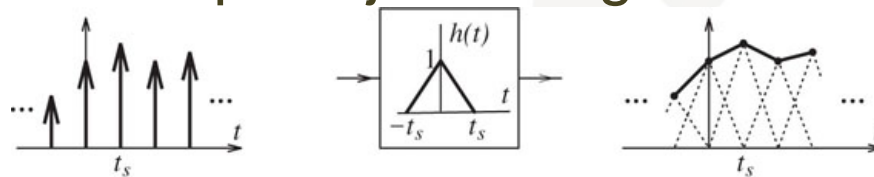


FIGURE 7.14 Linear interpolation is equivalent to using tri functions centered at the sampling instants of an ideally sampled signal to produce a piecewise linear approximation of the original analog signal

- Generelt: $g(t)\text{sinc}(t/t_s)$ der $g(t)$ er en vindusfunksjon
 - $g(0)=1$ og $g(t) \rightarrow 0$ for store $|t|$

Oppsampling: Anti-imaging filter

- Sett inn $N-1$ nuller mellom samplene
- \Rightarrow komprimert spektrum; også replikaer som må filtreres bort ($\Leftrightarrow (N-1)/N$ av energien fjernes)
- Anti-imaging filter med kutt ved $0.5/N$, Gain N

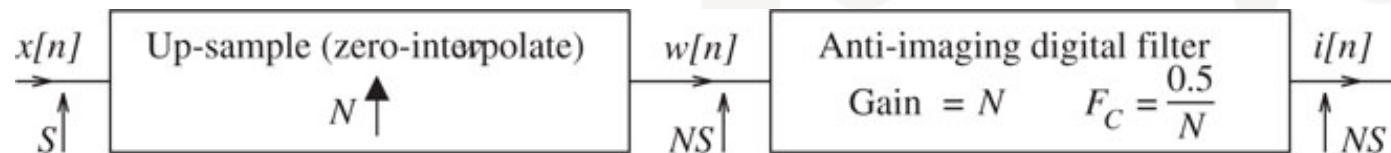


FIGURE 7.17 Sampling rate increase by an integer factor N requires zero interpolation followed by lowpass filtering. Zero interpolation results in N -fold compression of the spectrum. The central period contains N compressed images. All but one is filtered out by the anti-imaging filter with cutoff frequency $F_C = 0.5/N$. This produces a signal sampled at N times the original rate

Nedsampling: Anti-aliasing filter

- Digital lavpass, kutt ved $=0.5/M$
- Kast $M-1$ samples mellom hver sample

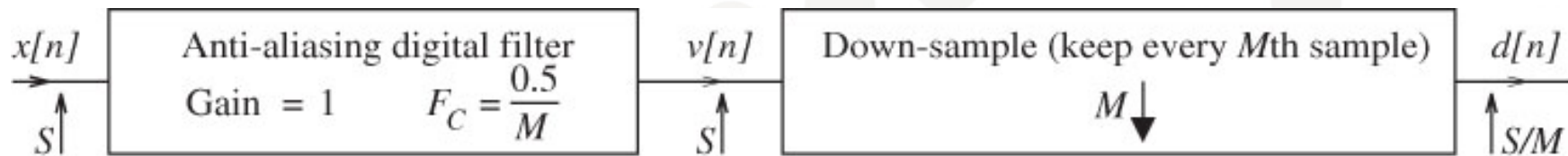


FIGURE 7.19 Sampling rate reduction by an integer factor M requires a lowpass filter followed by decimation (down-sampling). The lowpass filter bandlimits the signal to $F = 0.5/M$. Decimation by M stretches the spectrum and produces a signal sampled at $1/M$ times the original rate

Kvantisering

- Hva skjer hvis inngangsverdi er over maks-verdien?
- Klipping
 - Metning eller nulling

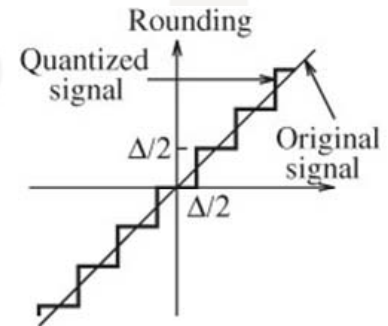
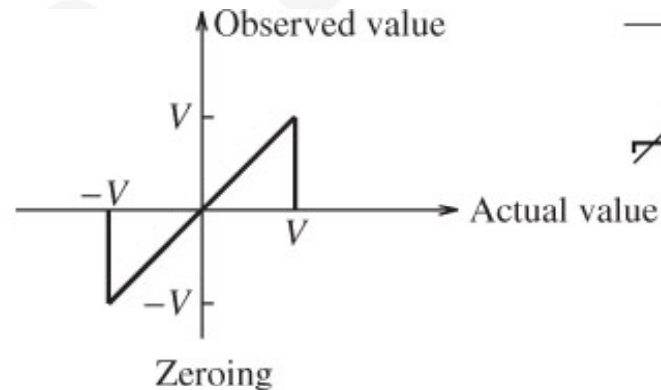
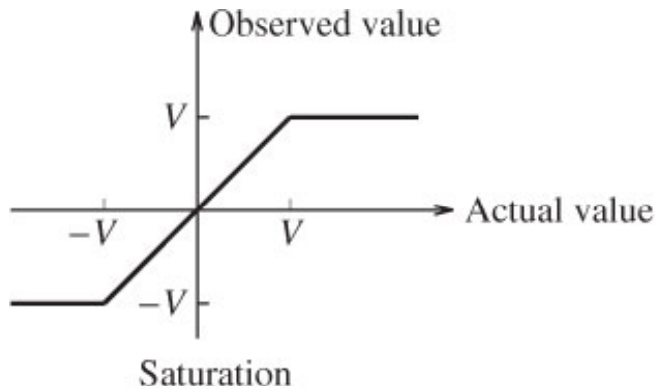


FIGURE 7.23 Two overflow characteristics. In saturation, values outside the full-scale range are set to the full-scale value itself. In zeroing, values outside the full-scale range are set to zero

- Demo: kvantisering.m

Kvantiseringssfeilen

- Effekt i kvantiseringssstøyen
- pdf: $f(\epsilon) = 1/\Delta$ for $|\epsilon| < \Delta/2$
- Støyeffekt = variansen:

$$P_N = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon^2 f(\epsilon) d\epsilon = \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \epsilon^2 d\epsilon = \frac{\Delta^2}{12}$$

- $\Delta = D/L$:
- $10\log(P_N) = 10\log(D^2/12L^2) = 20\log D - 20\log L - 10.8$

Signal-støy forhold, B-bits kvantisering

- Signal til støy forhold: $SNR = P_S / P_N$:

$$SNR = 10 \log(P_S / P_N) = 10 \log(P_S) + 20 \log(L) - 20 \log(D) + 10.8$$

- Uttrykt ved antall bit, $20 \log(L) = 20 \log(2^B) = 6B$:

$$SNR = 10 \log(P_S / P_N) = 10 \log(P_S) + 6B - 20 \log(D) + 10.8$$

- $SNR \propto 6B$: 6 dB økning i SNR og dynamikk pr bit
- Hvis D er for stor \Rightarrow faller SNR, dvs hvis maks nivå sjelden overskrides faller SNR
- Avveining mellom mer kvantiseringsstøy eller flere feil pga metning av A/D-omformer

IIR kontra FIR

- IIR filtre er mer effektive enn FIR – færre koeffisienter for samme magnitudespesifikasjon
- Men bare FIR kan gi eksakt lineær fase
 - Lineær fase \Leftrightarrow symmetrisk $h[n]$
 - \Rightarrow Nullpunkter symmetrisk om $|z|=1$
 - Lineær fase IIR? \Rightarrow Poler utenfor enhetssirkelen \Rightarrow ustabil
- IIR kan også bli ustabile pga avrunding i aritmetikken, det kan ikke FIR

IIR Designmetode

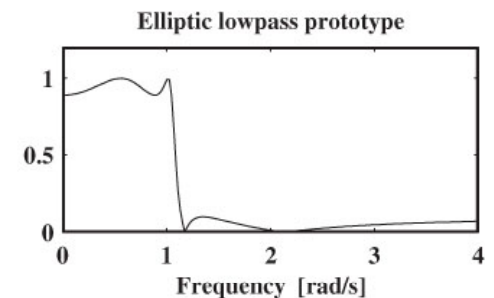
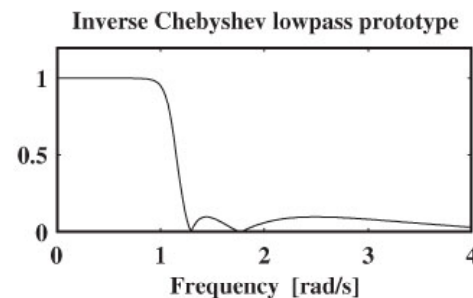
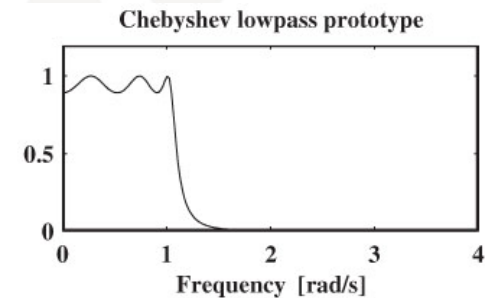
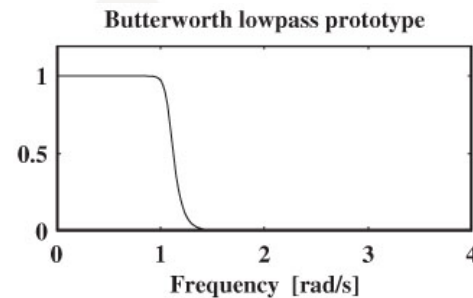
1. Analogt prototypfilter

1. Start med analogt lavpass prototypfilter
2. Konverteres til digitalt filter
3. Konverteres eventuelt til digitalt høypass, båndpass, båndstopp

2. Direkte design

Sammenligning

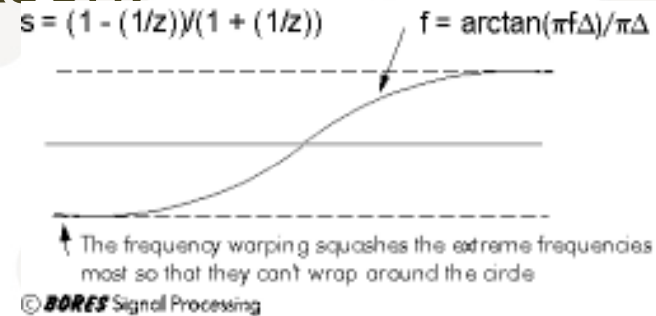
- Butterworth: maksimalt flat amplitude
- Bessel: maksimalt flat gruppeforsinkelse
- Sammenlignet med Tshebysjef/elliptisk, faller Butterworth langsommere og krever høyere orden for å oppnå en viss stoppbåndsspesifikasjon.
- Tshebysjef filtre er skarpere (smalere transisjonbånd) enn Butterworth, men ikke så skarpe som elliptiske.
- Elliptiske filtre er skarpere enn alle andre filtre, men de har også rippler over hele båndbredden.



Bilineær transform

- Ingen aliasing, beholder stabilitet og kausalitet, men forvrenger frekvensaksen:

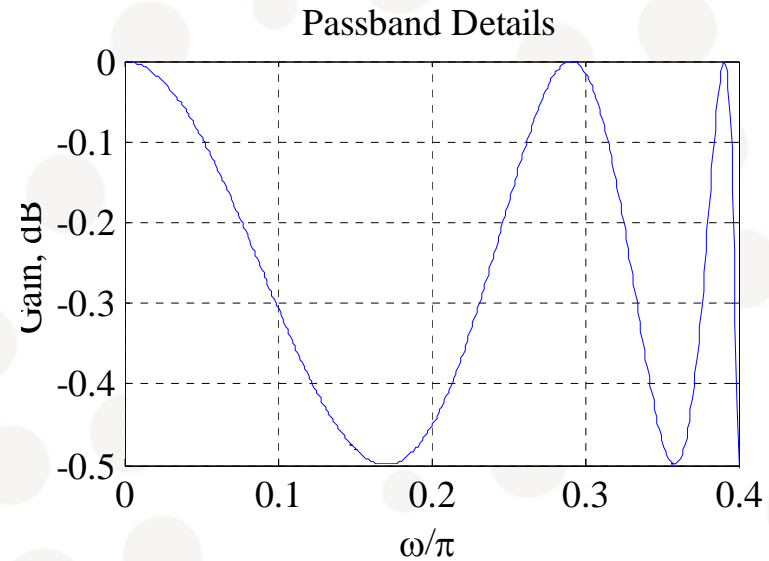
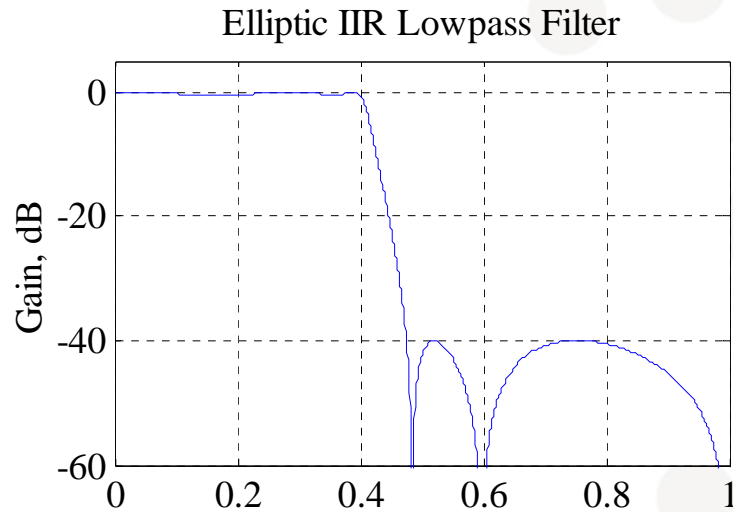
$$\Omega = \frac{2}{T_d} \tan(\omega/2)$$



- Best for lavpass, ettersom passbåndet da blir minst forvrenget
- Derfor designes først prototyp lavpassfiltre
 - For HP, BP etc: Start med analog LP => digital LP => digital HP etc

http://www.bores.com/courses/intro/iir/5_warp.htm

Matlab IIR Filterdesign



- **Sammenligning av orden:**

- `buttord(0.8/(4/2), 1/(4/2), 0.5, 40) ⇒ N=18`
- `cheb1ord(0.8/(4/2), 1/(4/2), 0.5, 40) ⇒ N=8`
- `cheb2ord(0.8/(4/2), 1/(4/2), 0.5, 40) ⇒ N=8`
- `ellipord(0.8/(4/2), 1/(4/2), 0.5, 40) ⇒ N=5`
- FIR: `firpm([0.8 1],[1 0],[10^(0.5/20)-1 10^(-40/20),4]) ⇒ N=28`