

UiO : **University of Oslo**

Repetisjon

Jo Inge Buskenes

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

INF3470/4470, høst 2012



Dagens temaer

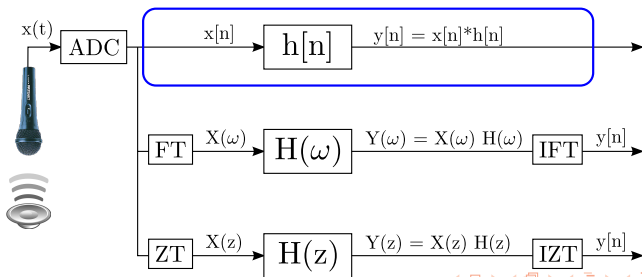
Tema

3 domener

Digitale systemer kan analyseres i tids-, frekvens- eller z-domenet...

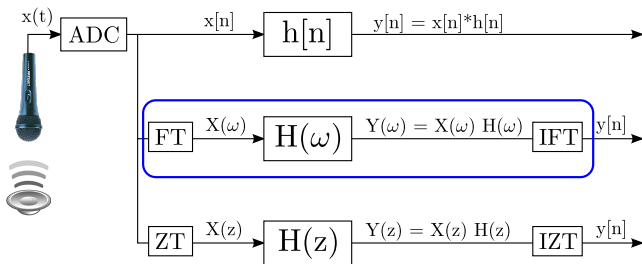
1. Tidsdomenet, eller n -domenet:

- ▶ Domenet for sekvenser, impulsresponser og differens likninger.
- ▶ Signaler er generert og prosessert i dette domenet.
- ▶ Filtre er implementert i dette domenet.



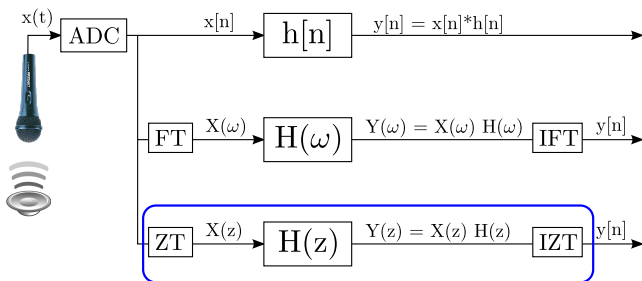
3 domener

- ▶ Vi kan analysere digitale systemer i tre forskjellige domener:
 - ▶ Ω -domain eller frekvensdomenet
 - ▶ Domenet for frekvensresponsen & spektrumrepresentasjon, og tolking av disse!
 - ▶ Viktig for analyse av f.eks lyd, men sjelden benyttet til implementasjon (i HW).



3 domener

- ▶ Vi kan analysere digitale systemer i tre forskjellige domener:
 - ▶ z-domenet
 - ▶ Domenet for z-transformasjonen, operatører, poler & nullpunkter.
 - ▶ Eksisterer primært fordi det muliggjør en matematisk analyse & syntese.



Hvorfor flere domener???

- ▶ Flere domener *kan* gi bedre innsikt ...
- ▶ Eksempel:
Finne responsen $y[n]$ til et inngangssignal $x[n]$ som passerer gjennom et LTI-system: $x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$
 - ▶ n -domenet: Må bruke konvolusjon (en krevende operasjon).
 - ▶ I z -domenet: Polynoms multiplikasjon.

Stabilitet:

- ▶ n -domenet: Bounded Input Bounded Output (BIBO).
- ▶ z -domenet: Dersom enhetssirkelen ligger i "Region of Convergence" (**viktig**).

Kausalitet

- ▶ n -domenet: Kun benytte tidligere og nåtids sampler.
- ▶ z -domenet: Alle poler innenfor enhetssirkelen.

Definisjon av z-transformasjonen

$$\blacktriangleright X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

hvor $z = r e^{j2\pi F} = r e^{j\Omega}$ er en kompleks variabel.

- ▶ En uendelig potensrekke; eksisterer kun for de verdiene av z hvor rekken konvergerer

⇒ **Region Of Convergence (ROC)**;

den mengden av argumenter hvor $X(z)$ antar en endelig verdi.

- ▶ Notasjon:

$$x[n] \stackrel{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} X(z)$$

$$x[n] \leftarrow \boxed{\text{ZT}} \Rightarrow X(z)$$

Definisjon av z-transformasjonen ...

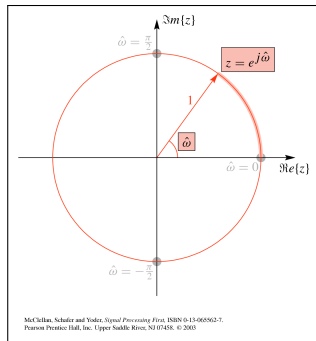
- ▶ z-transformasjonen er en funksjon av en kompleks variabel; illustreres i det komplekse z-planet.

- ▶
$$\begin{aligned} z^{-n} &= r e^{-j2\pi f T_s n} = r e^{-j2\pi \frac{f}{f_s} n} \\ &= r e^{-j\Omega n} \end{aligned}$$

- ▶ z-transformasjonen evaluert på **enhetssirkelen** tilsvarer DTFT (tema for kapittel 5):

$$X(e^{j\Omega}) = X(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

- ▶ Hvis DTFT'en eksisterer, så ligger enhetssirkelen i ROC

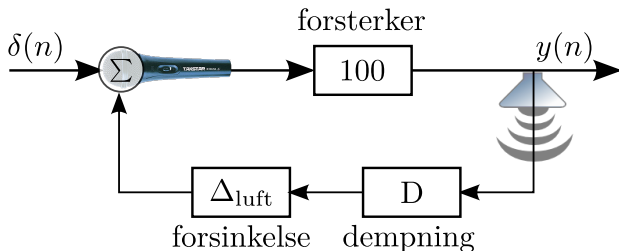


ROC ...

- ▶ ROC generelt en **annulus** på formen $\alpha < |z| < \beta$.
 - ▶ Hvis $\alpha = 0$, kan ROC også inneholde punktet $z = 0$.
 - ▶ Hvis $\beta = \infty$, kan ROC også inneholde punktet $z = \infty$.
- ▶ Endelig tid signaler
 - ▶ Kausal: Hele z -planet untatt $z = 0$.
 - ▶ Anti-kausal: Hele z -planet untatt $z = \infty$.
 - ▶ Tosidig: Hele z -plane untatt $z = 0$ og $z = \infty$.
- ▶ Uendelig lengde signaler
 - ▶ Kausal: $r_1 < |z|$
 - ▶ Anti-kausal: $|z| < r_2$
 - ▶ Tosidig: $r_1 < |z| < r_2$

Et annet case..

Hvorfor får man av og til 'pipelyd' i høyttalerne på en scene?



- ▶ For hvilke verdier av D er dette systemet stabilt?
- ▶ Hvis det er stabilt, hvordan vil $y[n]$ da se ut?
- ▶ Hvorfor kan dette systemet bli ustabil, men ikke gitaren?

Egenskaper

- ▶ *Linearitet:* $Z\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$
ROC: minst $\text{ROC}_{x_1} \cap \text{ROC}_{x_2}$.
- ▶ *Tidsskift:* $Z\{x[n - k]\} = z^{-k}X(z)$
ROC = ROC_x , men mulig unntak av $z \in \{0, \infty\}$
- ▶ *Konvolusjon:* $Z\{x_1[n] * x_2[n]\} = X_1(z)X_2(z)$
ROC: minst $\text{ROC}_{x_1} \cap \text{ROC}_{x_2}$.
- ▶ *Skalere z-plan:* $Z\{a^n x[n]\} = X(\frac{z}{a})$
ROC = ROC_x skalert med $|a|$.
- ▶ *Kompleks konjugering:* $Z\{x^*[n]\} = X^*(z^*)$
ROC = ROC_x .

Invers z-transformasjon

Tre mulige tilnærmelser

- ▶ Konturintegral: $x[n] \equiv \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{j2\pi} \oint_{\Gamma} X(z)z^{n-1} dz$.
 - ▶ Krever kunnskap i kompleks analyse. Ikke benyttet i vårt kurs.
- ▶ Fra potensrekken; den opplagte måten!
 - ▶ Siden $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$, hvor

$$x[n] = \cdots + x_{-2}\delta[n+2] + x_{-1}\delta[n+1] + x_0\delta[n] + x_1\delta[n-1] + \cdots$$
 kan $x[n]$ leses rett fra $X(z)$.
 - ▶ Virker for endelige rekker.
 - ▶ De første leddene i uendelige høyre- eller venstre-sidige rekker kan finnes ved lang divisjon eller fra differense likning.
- ▶ Delbrøksoppspalting.

Koblede systemer

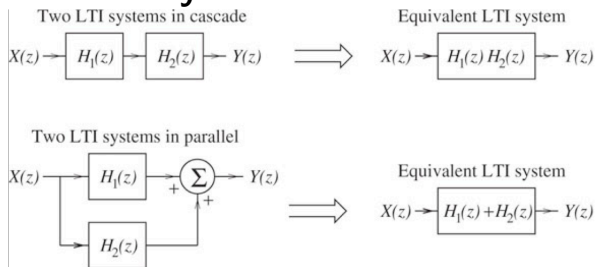


FIGURE 4.4 The equivalent transfer function of systems in cascade is the product of the individual transfer functions. The equivalent transfer function of systems in parallel is the sum of the individual transfer functions

Tema

De fire Fourier rekkene/transformasjonene

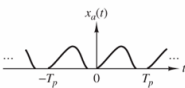
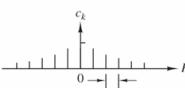
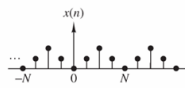
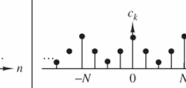
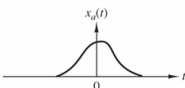
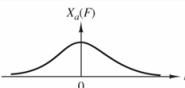
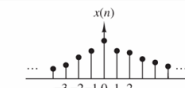
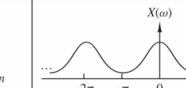
		Continuous-time signals		Discrete-time signals	
		Time-domain	Frequency-domain	Time-domain	Frequency-domain
Periodic signals Fourier series	 $c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x_a(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$ $F_0 = \frac{1}{T_p}$	 $x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$	 $c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi(n/N)kn}$	 $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j(2\pi/N)kn}$	
	Continuous and periodic	Discrete and aperiodic	Discrete and periodic	Discrete and periodic	
Aperiodic signals Fourier transforms	 $X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt$	 $x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF$	 $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$	 $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$	
	Continuous and aperiodic	Continuous and aperiodic	Discrete and aperiodic	Continuous and periodic	

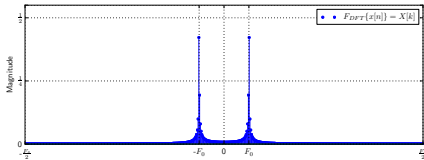
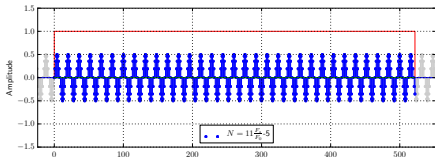
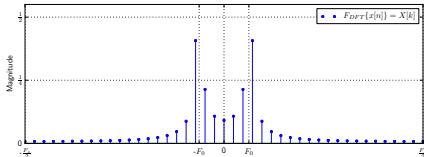
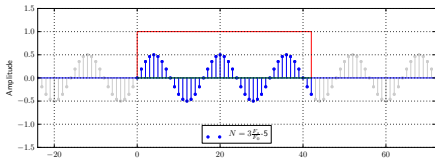
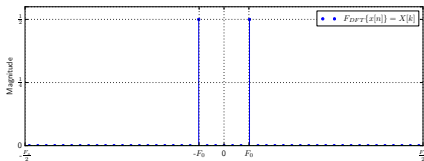
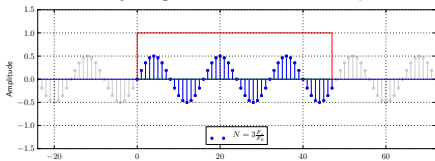
Figure 4.3.1 Summary of analysis and synthesis formulas.

Endelig lengde data

- ▶ Hvis vi definerer et vindu $w[n] = \begin{cases} 1, & n \in 0, 1, \dots, N-1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$
- ▶ og et periodisk signal $x_p[n], \quad n \in -\infty \dots \infty$
- ▶ så vil produktet av disse $x[n] = x_p[n] w[n]$ beskrive en tidsbegrenset versjon av $x_p[n]$.
- ▶ Tar vi DFT'en av $x[n]$ vil vi kunne få problemer med:
 - ▶ Spektral lekkasje (når $N \neq kT_s, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$)
 - ▶ Glatting

Endelig lengde data

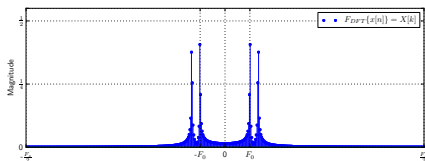
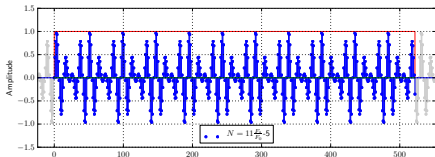
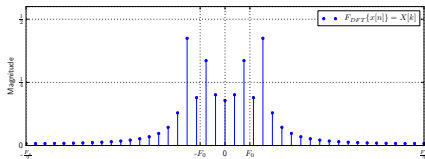
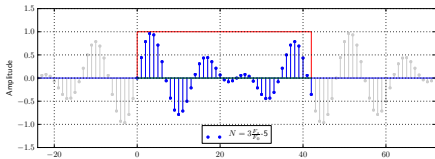
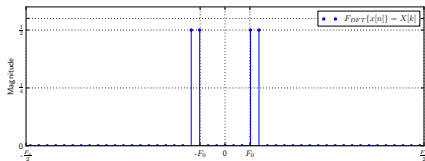
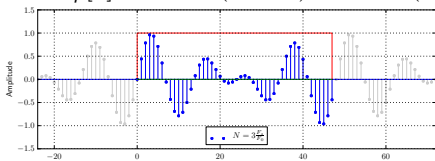
Forskjellige utsnitt fra det periodiske signalet $x_p[n] = 0.5 \sin(2\pi F_0 n)$:



Endelig lengde data

Forskjellige utsnitt fra det periodiske signalet

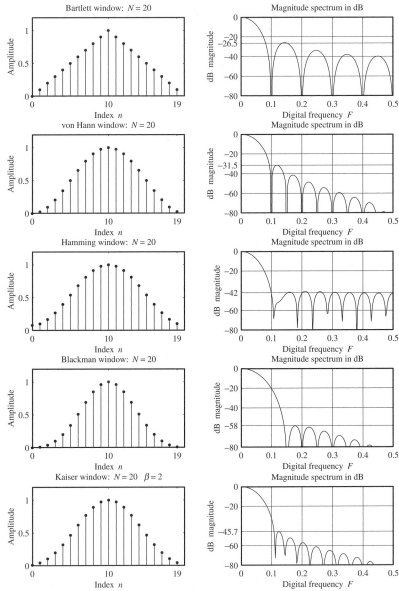
$$x_p[n] = 0.5 \sin(2\pi F_0 n) + 0.5 \sin(2\pi F_1 n):$$



Noen typiske vinduer

- ▶ De forskjellige vinduene gir oss forskjellig kompromiss mellom oppløsning og lekkasje

FIGURE 8.8
Commonly used DFT windows and their spectral characteristics



Tema

Tema

Ideelle filtre

FIGURE 10.1
Spectrum of an
ideal lowpass filter

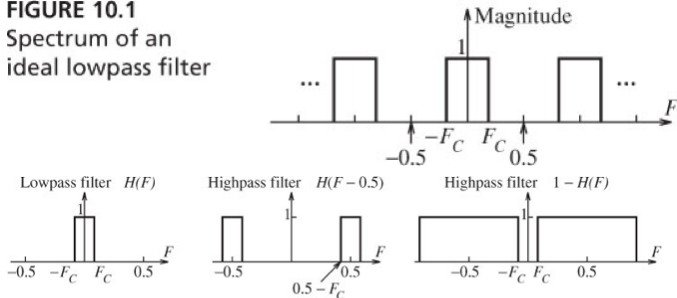


FIGURE 10.2 Two lowpass-to-highpass transformations. The first transformation shifts the lowpass spectrum $H(F)$ to $H(F - 0.5)$. The second transformation subtracts the lowpass spectrum $H(F)$ from unity.

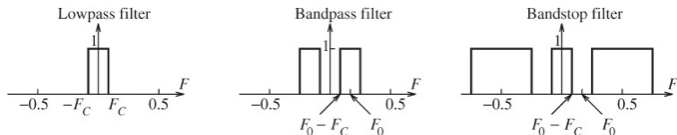


FIGURE 10.3 Transforming a lowpass filter to a bandpass or bandstop filter. The bandstop transformation shifts the lowpass spectrum $H(F)$ by F_0 and $-F_0$. The bandstop filter is found by subtracting the bandpass spectrum from unity

Frekvens transformasjon

- ▶ Mulig å transformere et digitalt lavpassfilter til båndpass-, båndstopp- og høypassfilter.
- ▶ Den enkleste (?) transformasjonen: Lavpass til høypass og vv.
 $H_{hp}(\Omega) = H_{lp}(\Omega - \pi)$, i.e.
 $h_{hp}[n] = (e^{j\pi})^n h_{lp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n]$.
- ▶ I de aller fleste tilfeller trenger man kun å betrakte lavpass filterdesign.
- ▶ Lavpass prototype kan så bli transformert til annen type (høypass-, båndpass- eller båndstoppfilter).

Lavpass- and høypassfiltre

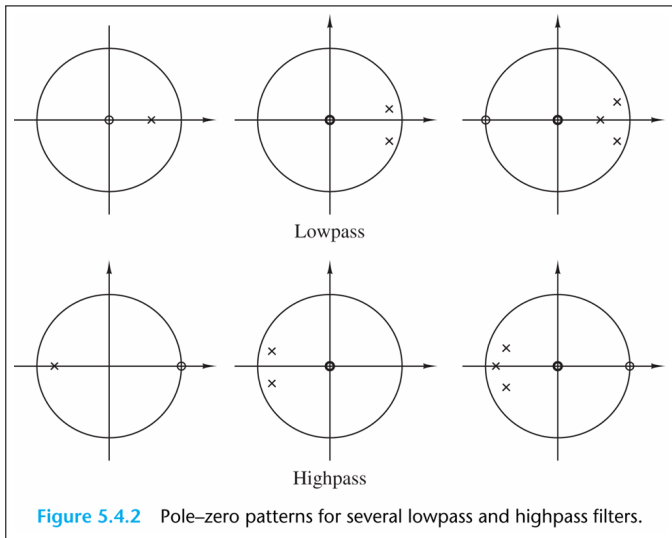


Figure 5.4.2 Pole-zero patterns for several lowpass and highpass filters.

Trunkering og vinduer

- ▶ Rektangulært vindu; $W_D(F)$ kalles **Dirichlet kjerne**
- ▶ Trekantet vindu; $W_F(F) = \frac{1}{M} W_D^2(F)$ kalles **Fejer kjerne**

FIGURE 10.4 The Dirichlet kernel is the spectrum of a rectangular window

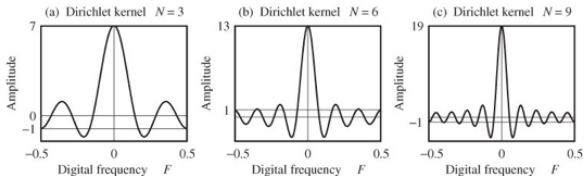
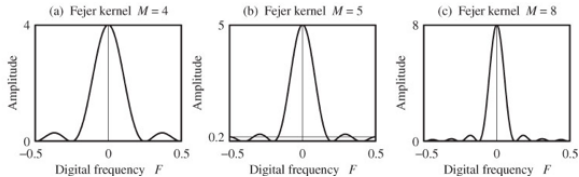
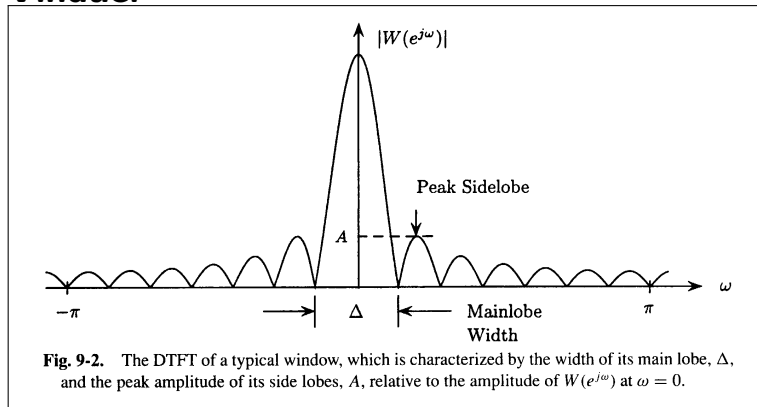


FIGURE 10.5 The Fejer kernel is the spectrum of a triangular window



Vinduer



Noen vanlige lineær fase FIR vinduer ...

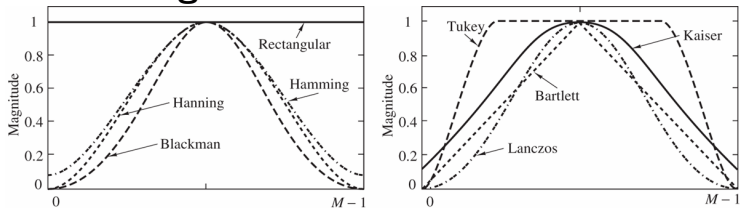


Figure 10.2.3 Shapes of several window functions.

Window	Side-Lobe Amplitude (dB)	Transition Width (Δf)	Stopband Attenuation (dB)
Rectangular	-13	$0.9/N$	-21
Hanning	-31	$3.1/N$	-44
Hamming	-41	$3.3/N$	-53
Blackman	-57	$5.5/N$	-74

Tema

Valg av filtertype

- ▶ Den $H(z)$ som appr. frekvensresponsen spesifikasjonen skal være kausal.
- ▶ For IIR digital filterdesign er (IIR) transferfunksjonene en reel rasjonell funksjon av z^{-1} :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{M-1} z^{-M-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}$$

- ▶ $H(z)$ må være stabil og av minste mulig orden N for å redusere beregningsbyrden/kompleksiteten.
- ▶ For FIR digital filterdesign er (FIR) transferfunksjonen et polynom i z^{-1} med reelle koeffisienter:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] z^{-n}$$

- ▶ Hvis lineær fase, må filterkoeffisientene tilfredstille kravet:
 $h[n] = \pm h[M-1-n], \quad n = 0, 1, \dots, M-1.$

▶ Fordeler, FIR filtre:

1. Kan ha eksakt lineær fase
2. Filterstrukturer er alltid stabile for kvantiserte koeffisienter
3. Design metoder er generelt lineære.
4. Kan bli realisert effektivt i HW.
5. Start transient har endelig lengde.

▶ Ulemper, FIR filtre:

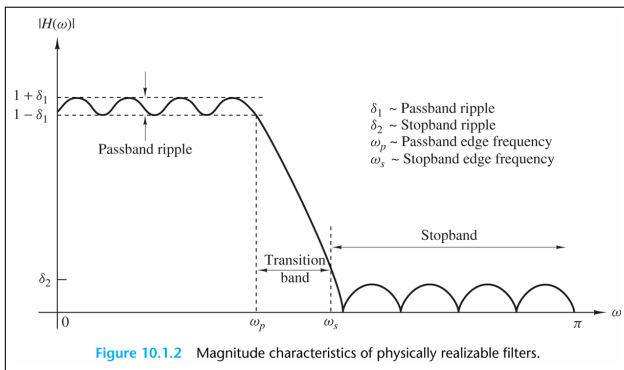
Lengden til et FIR filter vil, i de fleste tilfeller, være betydelig lengre enn lengden til et tilsvarende IIR filter som oppfyller de samme spesifikasjonene. FIR filteret har dermed større beregningsbyrde/kompleksitet.

Standard tilnærmelser ...

- ▶ FIR filterdesign er basert på direkte approksimasjoner av spesifisert magnituderrespons.
 - ▶ Ofte med ekstra krav om lineær fase.
- ▶ Design av $M - 1$ 'te ordens FIR filter gjøres ved
 - ▶ enten å finne en M -lengde impulsrespons $\{h[n]\}$
 - ▶ eller M sampler av frekvensresponsen $H(e^{j\Omega})$.
- ▶ De tre vanligste tilnærmelsene er
 1. Vindusbasert design.
 2. Frekvenssamplingmetode.
 3. Datamaskin basert optimalisering

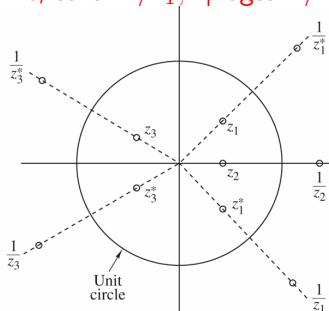
Digital filterspesifikasjon — lavpassfilter

- ▶ Mulig å approksimere det ideelle filteret så nøyaktig som ønskelig.
 - ▶ Tillate ripple (viggling??) i passbånd og stoppbånd
 - ▶ Tillate endelig bredde på transisjonsbånd.

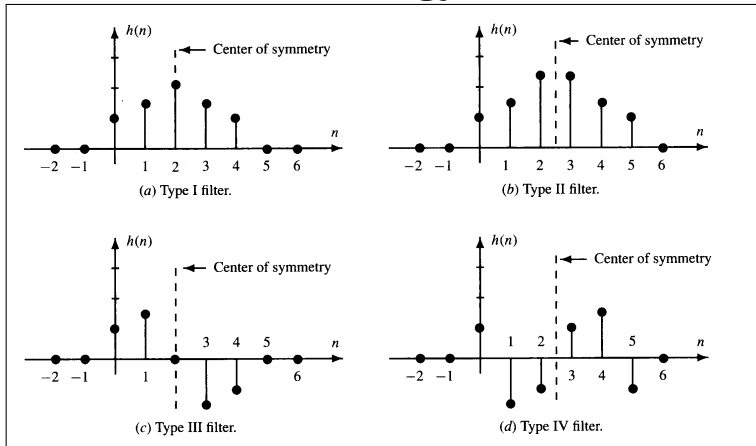


Repetisjon: Nullpunkt plassering for FIR filtre

- ▶ Hvis $h[n]$ er symmetrisk/anti-symmetrisk, så gjelder
 - ▶ $h[n] = \pm h[M-1-n]$, $n = 0, 1, \dots, M-1$
 - ▶ $z^{-(M-1)}H(z^{-1}) = \pm H(z)$.
 - ▶ Hvis z_0 rot, så er $1/z_0$ også rot (resiprok par).
- ▶ Hvis $h[n]$ reell, så gjelder
 - ▶ $H(z) = H^*(z^*)$
 - ▶ Hvis z_1 kompleks rot, så er z_1^* også rot (kompleks konjugerte røtter)
- ▶ Lineær fase reellt FIR-filte:
 - Hvis z_1 nullpunkt, så er $1/z_1, z_1^*$ også $1/z_1^*$ nullpunkt.



Lineær fase filtre deles gjerne i fire klasser ...



Lineær fase filtre

Linear phase filter type	Filter order	Symmetry of Coefficients	$H(f=0)$	$H(f=1)$ (Nyquist)
Type I	Even	$h[n] = h[M-1-n], n = 0..M-1$	No rest.	No rest.
Type II	Odd	$h[n] = h[M-1-n], n = 0..M-1$	No rest.	$H(1) = 0$
Type III	Even	$h[n] = -h[M-1-n], n = 0..M-1$	$H(0) = 0$	$H(1) = 0$
Type IV	Odd	$h[n] = -h[M-1-n], n = 0..M-1$	$H(0) = 0$	No rest.

- ▶ Gruffeporsinkelsen er konstant over frekvensbåndet.
 - ▶ For et $M-1$ -ordens filter (lengde M), er forsinkelsen $(M-1)/2$.
- ▶ Matlab: funksjonene *fir1*, *fir2*, *firls*, *firpm*, *fircls*, *fircls1* og *firrcos* lager Type I and II lineær fase FIR filtre som default.
 - ▶ Både *firls* og *firpm* lager Type III and IV gitt 'hilbert' eller 'differentiator' flagg.
 - ▶ Ikke mulig å lage ulike orden (odd) Type II høypass og båndstopp filtre!

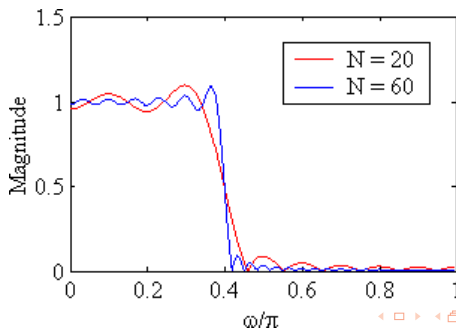
Tema

Lineær fase FIR filtre ved bruk av vinduer

- ▶ Velg et ideelt filter, $h_d[n]$, og trunker det med et vindu $w[n]$.
 - ▶ $h[n] = h_d[n]w[n]$.
 - ▶ $w[n]$ endelig lengde vindu, symmetrisk om midtpunktet.
 - ▶ $H(\Omega) = H_d(\Omega) \otimes W(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\nu) W(\Omega - \nu) d\nu$.
- ▶ Hvor godt $H(\Omega)$ approksimerer $H_d(\Omega)$ bestemmes av
 1. Bredden på hovedloben til $W(\Omega)$.
 2. Maksimal sidelobenivå til $W(\Omega)$.
- ▶ Pro: Enkel
- ▶ Con: Mangler presis kontroll på Ω_p og Ω_s .

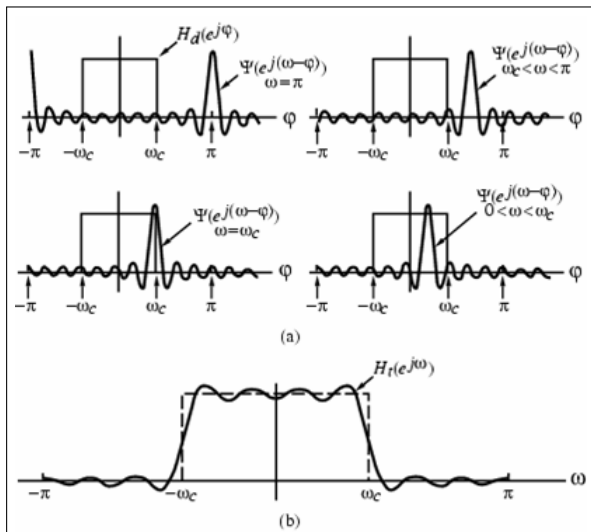
Gibbs effekt

- ▶ Oscillerende oppførsel i magnituderesponsen til kausale FIR filtre funnet ved trunkering av filterkoeffisientene til et ideelt filter.
- ▶ Med økende lengde av filteret vil antall “topper” (ripples) i passbånd og stoppbånd øke og bredden til “toppene” vil minske tilsvarende.
- ▶ Høyden på den største toppen forblir uendret uavhengig av filterets lengde (gitt samme vektingsfunksjon)!



Gibbs effekt ...

- ▶ Fra $h_t[n] = h[n]w[n]$.
- ▶ og $H_t(\Omega) = H_d(\Omega) \circledast \Psi(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\phi) \Psi(\Omega - \phi) d\phi$.



Gibbs effekt ...

- ▶ Hovedloben til $\Psi_R(\Omega)$ er karakterisert av bredden $4\pi/(2M - 1)$ som definerer første nullpunkt på begge sider av $\Omega = 0$.
- ▶ Med økende M , vil hovedlobebredden minske som ønsket.
- ▶ Arealet under sidelobene vil forbli konstant selv om bredden til hver sidelobe minsker med økende M .
- ▶ Ringingen i $H_t(\Omega)$ rundt diskontinuiteten vil opptre mer konsentrert, men amplituden vil ikke påvirkes av økende M .
- ▶ Gibbs fenomen kan bli redusert ved enten
 1. bruke et vindu med “myke” ender, eller
 2. påse at transisjonen i magnitudespesifikasjonen mellom passbånd og stoppbånd er glatt.

Noen lineær fase FIR vinduer

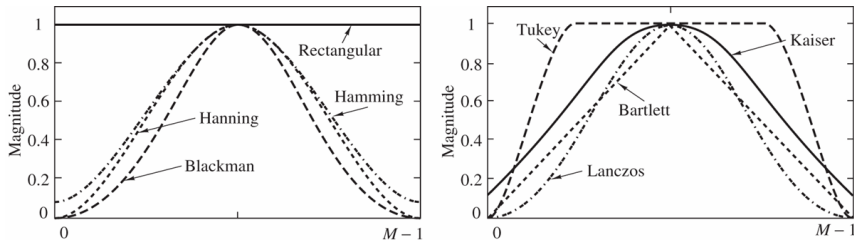


Figure 10.2.3 Shapes of several window functions.

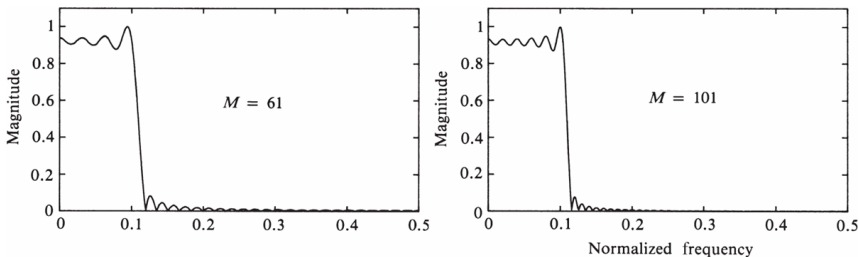


Figure 10.2.7 Lowpass filter designed with a rectangular window: (a) $M = 61$ and (b) $M = 101$.

Responen til noen lineær fase FIR vinduer

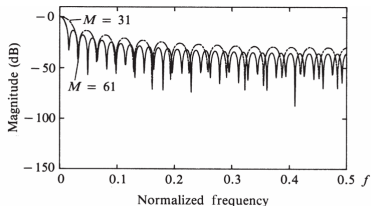


Figure 10.2.2 Frequency response for rectangular window of lengths (a) $M = 31$, (b) $M = 61$.

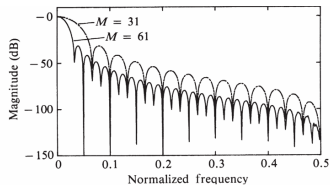


Figure 10.2.4 Frequency responses of Hanning window for (a) $M = 31$ and (b) $M = 61$.

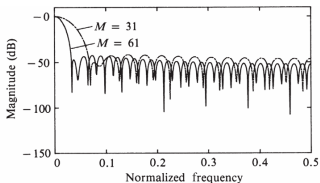


Figure 10.2.5 Frequency responses for Hamming window for (a) $M = 31$ and (b) $M = 61$.

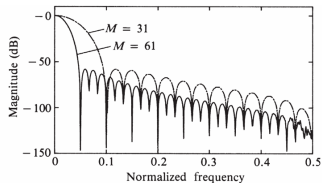


Figure 10.2.6 Frequency responses for Blackman window for (a) $M = 31$ and (b) $M = 61$.

Kunsten å velge vindu for filterdesign

Recipe for Window-Based FIR Filter Design

- Normalize the analog design frequencies by the sampling frequency S .
- Obtain the band edges F_p and F_s of the lowpass prototype.
- Choose the lowpass prototype cutoff as $F_C = 0.5(F_p + F_s)$.
- Choose a window (from Table 10.4) that satisfies $A_{WS} \geq A_s$ and $A_{WP} \leq A_p$.
- Compute the window length N from $F_T = F_s - F_p = F_{WS} = \frac{C}{N}$ (with C as in Table 10.4).
- Compute the prototype impulse response $h[n] = 2F_C \text{sinc}[2nF_C]$, $|n| \leq 0.5(N-1)$.
- Window $h[n]$ and apply spectral transformations (if needed) to convert to required filter type.

Minimum-Length Design: Adjust N and/or F_C until the design specifications are just met.

Vindusmetoden, oppsummert

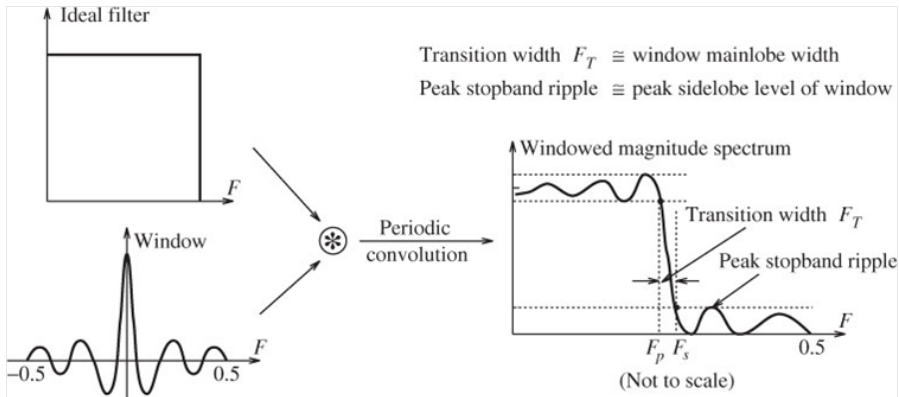
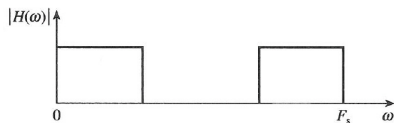


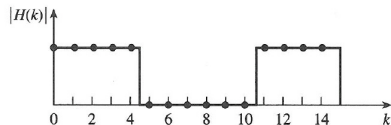
FIGURE 10.18 The spectrum of a windowed ideal filter. Multiplying the impulse response of an ideal filter by a window function results in the convolution of their respective spectra, as shown. The spectrum of a typical window function shows a main lobe and sidelobes and leads to overshoot and oscillations in the spectrum of the windowed filter. To reduce the overshoot and oscillations, we choose windows whose spectra have small or positive sidelobes

Frekvenssamplingsmetoden

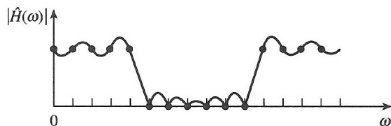
- ▶ Start med frekvensresponsen (DTFT'en) til ønsket filter.
- ▶ Betrakt den som DFT'en til filteret of punktprøv (sample) denne og få $H(k)$.
- ▶ Bruk IDFT (IFFT) for å finne filterkoeffisientene.



(a)



(b)

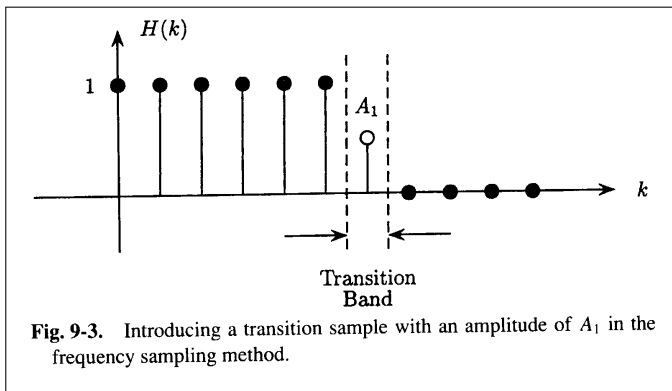


(c)

Lineær fase FIR filtre ved bruk av frekvenssamplingsmetoden

- ▶ Ønsket respons, $H_d(\Omega)$ er samplet uniformt for $\Omega_k = \frac{2\pi}{M}(k + \alpha)$, $M/2$ punkter (symmetri!!!) mellom 0 og π .
- ▶ Fra $H_d(\Omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h_d[n]e^{-j\omega n}$ får vi
 - ▶ $h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_d(\Omega_k)e^{j\Omega_k n}$,
 - ▶ $y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + \dots + b_{M-1}x[n-M+1]$
 $= \sum_{k=0}^{M-1} b_kx[n-k] \quad n = 0, 1, \dots, M-1.$
- ▶ OK på frekvenssamplene, men ingen kontroll mellom!
- ▶ Introduksjon av transisjonsampel (ett eller flere) forbedrer løsningen!

Lineær fase FIR filtre ved bruk av frekvenssamplingsmetoden



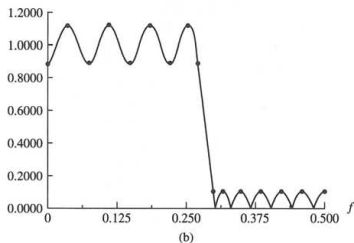
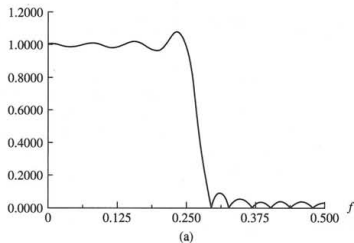
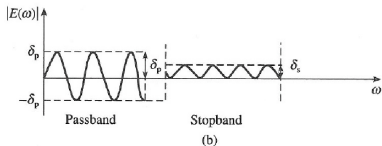
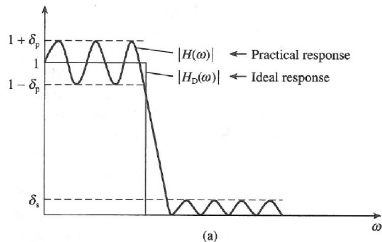
Ekviripple lineær fase FIR filtre

- ▶ Motivasjon og tilnærming:
 - ▶ Forskjellig krav på δ_1 (passbånd) and δ_2 (stoppbånd).
 - ▶ Introduser uniform ringing (ripple).
- ▶ Ønsket amplituderespons: H_{dr} .
- ▶ Vektet feil:

$$E(\Omega) \triangleq W(\Omega)[H_{dr}(\Omega) - H_r(\Omega)], \quad \Omega \in \mathcal{S} \triangleq [0, \Omega_p] \cup [\Omega_s, \pi].$$
- ▶ Vektingsfunksjon $W(\Omega) = \begin{cases} \delta_2/\delta_1 & \text{i passbånd} \\ 1 & \text{i stoppbånd.} \end{cases}$
- ▶ Minimax optimalisering (min. av maks. abs. verdi)

$$\min_{\text{coeff}} [\max_{\omega \in \mathcal{S}} |E(\Omega)|].$$
- ▶ Effektiv algoritme: *Parks-McClellan algorithm* (bruker “the Remez-exchange routine”).
- ▶ Kaisers formel est. filterordenen; $N = \frac{-10 \log(\delta_p \delta_s) - 13}{14.6 \Delta f}$, hvor Δf er bredde transisjonsbånd og δ_p og δ_s er rippel i passbånd og stoppbånd.

Ekviripple lineær fase FIR filtre ...



Ekviripple lineær fase FIR filtre ...

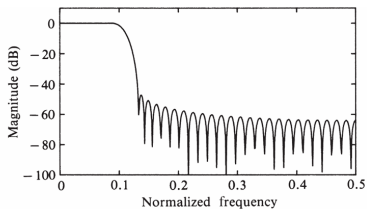


Figure 10.2.11 Lowpass FIR filter designed with $\alpha = 4$ Kaiser window ($M = 61$).

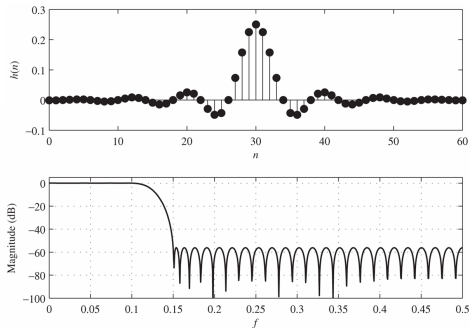


Figure 10.2.17 Impulse response and frequency response of $M = 61$ FIR filter in Example 10.2.3.

Ekviripple lineær fase FIR filtre ...

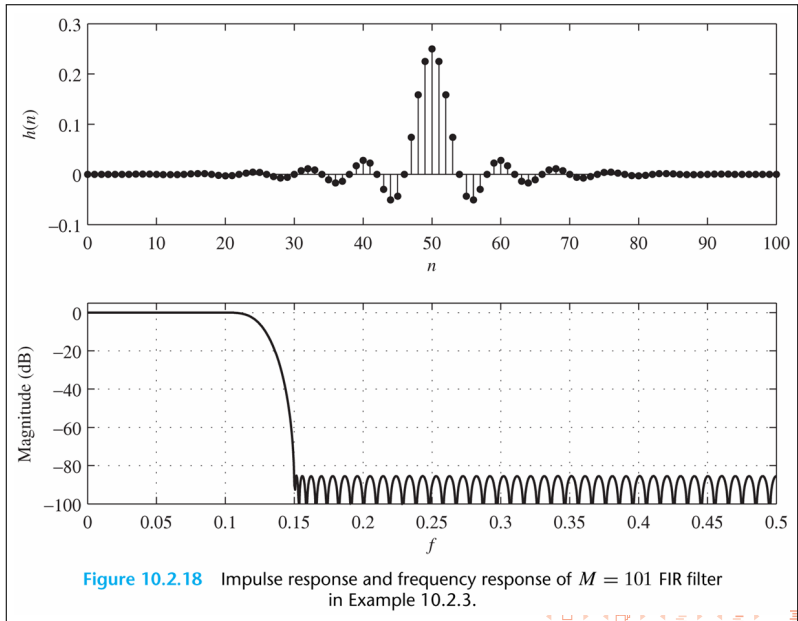


Figure 10.2.18 Impulse response and frequency response of $M = 101$ FIR filter in Example 10.2.3.