

UiO : **University of Oslo**

Uke 4: z-transformasjonen

Jo Inge Buskenes

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

INF3470/4470, høst 2013



Dagens temaer

z -domenet; ett av tre domener

z -transformasjonen; definisjon og egenskaper

$H(z)$; systemfunksjonen og implementasjoner

Tema

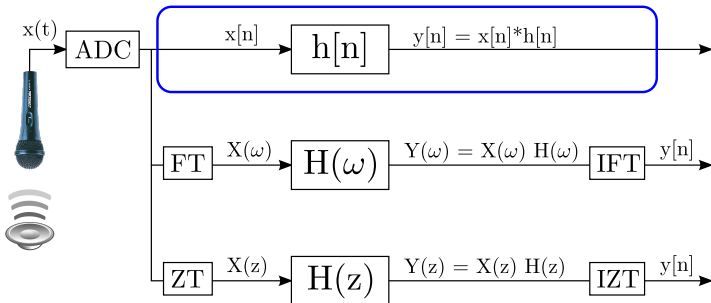
z-dometet; ett av tre domener

3 domener

Digitale systemer kan analyseres i tids-, frekvens- eller z-domenet...

1. Tidsdomenet, eller n -domenet:

- ▶ Domenet for sekvenser, impulsresponser og differens likninger.
- ▶ Signaler er generert og prosessert i dette domenet.
- ▶ Filtre er implementert i dette domenet.

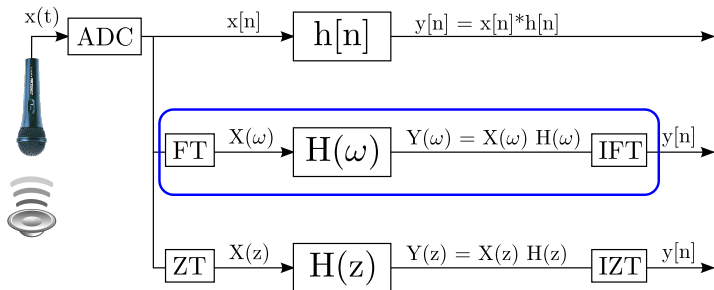


3 domener

Digitale systemer kan analyseres i tids-, frekvens- eller z-domenet...

2. Frekvensdomenet, eller Ω -domenet:

- ▶ Domenet for frekvensresponsen & spektrumrepresentasjon, og tolking av disse!
- ▶ Viktig for analyse av f.eks lyd, men sjeldent benyttet til implementasjon (i HW).

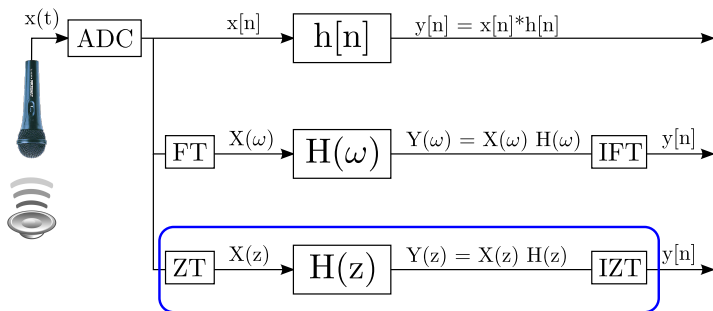


3 domener

Digitale systemer kan analyseres i tids-, frekvens- eller z-domenet...

3. z-domenet:

- ▶ Domenet for z-transformasjonen, operatører, poler & nullpunkter.
- ▶ Eksisterer primært fordi det muliggjør en matematisk analyse & syntese.



Hvorfor flere domener???

- ▶ Vanskelige analyser i et domene *kan* være enklere i et annet domene ...
- ▶ Flere domener *kan* gi bedre innsikt ...
- ▶ Eksempel: Finn utgangssignalet $y[n]$ når: $x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$

Beregning:

- ▶ n -domenet: Her må vi bruke konvolusjon (en krevende operasjon).
- ▶ z -domenet: Reduseres til polynomsisk multiplikasjon.

Stabilitet:

- ▶ n -domenet: Bounded Input Bounded Output (BIBO) - dvs. dersom $|y[n]| < B$ for alle $x[n]$, der B er en endelig verdi.
- ▶ z -domenet: Dersom enhetssirkelen ligger i "Region of Convergence" (mer om dette snart).

Kausalitet:

- ▶ n -domenet: Kun benytte tidligere og nåtids sampler.
- ▶ z -domenet: Alle poler innenfor enhetssirkelen.

Tema

z-transformasjonen; definisjon og egenskaper

Definisjon

ROC

Et lite case

Egenskaper

Definisjon av z-transformasjonen

$$\blacktriangleright X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

hvor $z = r e^{j2\pi F} = r e^{j\Omega}$ er en kompleks variabel.

- ▶ En uendelig potensrekke; eksisterer kun for de verdiene av z hvor rekken konvergerer

⇒ **Region Of Convergence (ROC)**;

den mengden av argumenter hvor $X(z)$ antar en endelig verdi.

- ▶ Notasjon:

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} X(z)$$

$$x[n] \leftarrow \boxed{\text{ZT}} \Rightarrow X(z)$$

Repetisjon: Sammenhengen mellom vinkler/frekvenser

- ▶ Hva er Ω i $z = re^{j\Omega n}$?

$$\theta = \omega t = 2\pi f t$$

↓ *digital konvertering*, $t = T_s n$

$$= 2\pi f T_s n = 2\pi \frac{f}{F_s} n$$

$$= 2\pi F n = \Omega n$$

Symbol	Enhet	Beskrivelse
t	[s]	Tid
n		Samplenummer
f	[Hz]	Signalets frekvens
T_s	[s]	Samplingsperiode
F_s	[s ⁻¹]	Samplingsfrekvens
F		Normalisert frekvens
Ω	[rad]	Normalisert vinkelfrekvens

Definisjon av z-transformasjonen ...

- ▶ z-transformasjonen er en funksjon av en kompleks variabel; illustreres i det komplekse z-planet.

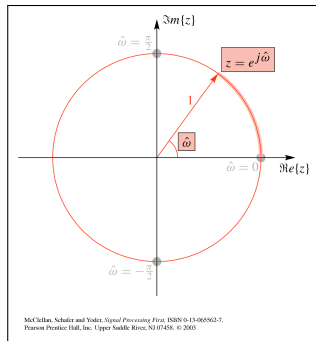
- ▶
$$z^{-n} = r e^{-j2\pi f T_s n} = r e^{-j2\pi \frac{f}{f_s} n}$$

$$= r e^{-j\Omega n}$$

- ▶ z-transformasjonen evaluert på **enhetssirkelen** tilsvarer DTFT (tema for kapittel 5):

$$X(e^{j\Omega}) = X(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

- ▶ Hvis DTFT'en eksisterer, så ligger enhetssirkelen i ROC



Drill problem 4.2

- (a) $x[n] = 0.5^n u[n]$. Finn z-transformen $X(z)$ og dens ROC.
- (b) $y[n] = (-0.5)^n u[n]$. Finn z-transformen $Y(z)$ og dens ROC.
- (c) $g[n] = -(0.5)^n u[-n - 1]$. Finn z-transformen $G(z)$ og dens ROC.

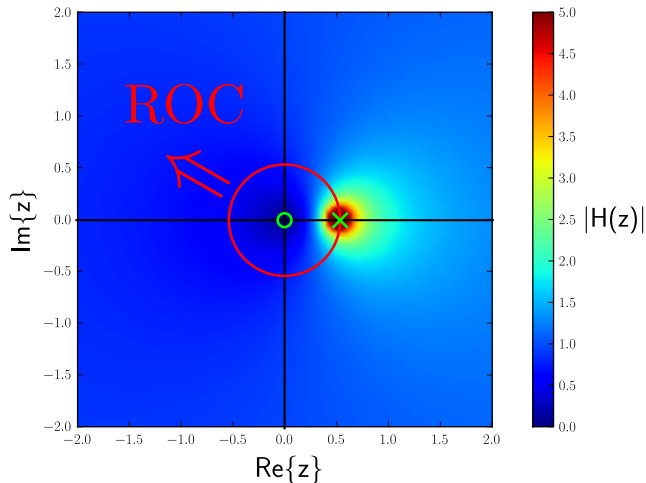
Visual presentation of Drill problem 4.2 a

$$h[n] = 0.5^n u[n]$$

$$H(z) \stackrel{*}{=} \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

$$= \frac{z}{z - 0.5}$$

$$* \text{ROC} : |z| > 0.5$$



ROC

- ▶ Gitt endelig lengde sekvens $x[n]$. Da er $X(z)$ et polynom i z eller z^{-1} ($X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}$) som konvergerer for alle z bortsett fra

- ▶ i $z = 0$, hvis $X(z)$ inneholder ledd på formen z^{-n}
- ▶ i $z = \infty$, hvis $X(z)$ inneholder ledd på formen z^n

$\implies X(z)$ endelig for hele planet med mulig unntak for $z = 0$ og $z = \infty$.

- ▶ Mer generelt, så er $X(z)$ en rasjonell funksjon:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Mz^{-M}}{a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_kz^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_kz^{-k}}$$

Rasjonell z -transformasjon

- ▶ $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$.
- ▶ Hvis $a_0 \neq 0$ og $b_0 \neq 0$, så kan vi unngå negative eksponenter av z ved å faktorisere ut leddene $b_0 z^{-M}$ og $a_0 z^{-N}$:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^{-M} z^M + (b_1/b_0) z^{M-1} + \dots + b_M/b_0}{a_0 z^{-N} z^N + (a_1/a_0) z^{N-1} + \dots + a_N/a_0} \\ &= \frac{b_0 z^{-M} (z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_M)}{a_0 z^{-N} (z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_N)} \\ &= \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M (z-z_k)}{\prod_{k=1}^N (z-p_k)} \end{aligned}$$

Rasjonell z -transformasjon ...

- ▶ $X(z) = \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M (z-z_k)}{\prod_{k=1}^N (z-p_k)}$
 - ▶ M endelige nullpunkt $z = z_1, z_2, \dots, z_M$.
 - ▶ N endelige poler $z = p_1, p_2, \dots, p_M$.
 - ▶ $|N - M|$ nullpunkt (hvis $N > M$) eller poler (hvis $N < M$) i origo $z = 0$.
 - ▶ Poler og nullpkt kan forekomme i $z = \infty$. Et nullpkt eksisterer i $z = \infty$ hvis $X(\infty) = 0$ og en pol eksisterer i $z = \infty$ hvis $X(\infty) = \infty$.
 - ▶ Teller vi med alle poler og nullpunkter i origo og uendelig, finner vi at $X(z)$ har like mange poler som nullpunkter.
 - ▶ ROC kan ikke inneholde poler!
 - ▶ Hvis alle poler/nullpkt er kjent kan vi bestemme $X(z)$ på en konstant nær $(\frac{b_0}{a_0})$.

ROC ...

- ▶ ROC generelt en **annulus** på formen $\alpha < |z| < \beta$.
 - ▶ Hvis $\alpha = 0$, kan ROC også inneholde punktet $z = 0$.
 - ▶ Hvis $\beta = \infty$, kan ROC også inneholde punktet $z = \infty$.
- ▶ Endelig tid signaler
 - ▶ Kausal: Hele z -planet untatt $z = 0$.
 - ▶ Anti-kausal: Hele z -planet untatt $z = \infty$.
 - ▶ Tosidig: Hele z -plane untatt $z = 0$ og $z = \infty$.
- ▶ Uendelig lengde signaler
 - ▶ Kausal: $\alpha < |z|$
 - ▶ Anti-kausal: $|z| < \beta$
 - ▶ Tosidig: $\alpha < |z| < \beta$

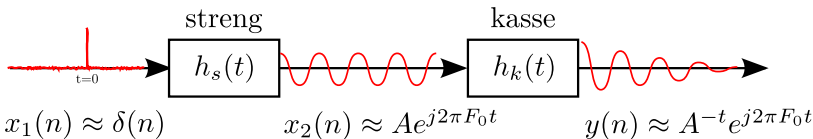
Et lite case for å få i gang hodecellene..

Hva skjer når vi "slår på strengen" til en gitar?



⇒ Vi får et signal med en frekvens (og litt av noen harmoniske) som dør ut med tiden...

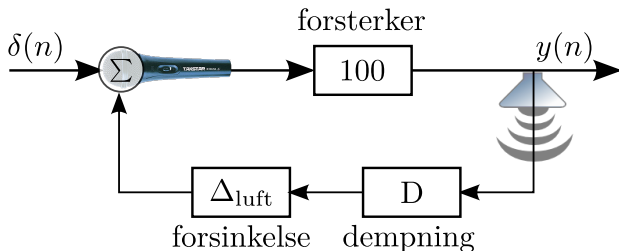
De viktigste "systemene" her er strengen og gitarkassa:



- ▶ Hvordan tror du $h_s(t)$ og $h_k(t)$ vil se ut her?
- ▶ Er dette 'FIR' eller 'IIR' filtre?
- ▶ Hva med kausalitet og lineærhet?

Et annet case..

Hvorfor får man av og til 'pipelyd' i høytalerne på en scene?



- ▶ For hvilke verdier av D er dette systemet stabilt?
- ▶ Hvis det er stabilt, hvordan vil $y[n]$ da se ut?
- ▶ Hvorfor kan dette systemet bli ustabil, men ikke gitaren?

Kort oppsummert så langt..

- ▶ z-transformen er primært brukt til å forstå og designe IIR filtre / rekursive systemer...
- ▶ z-domenet spennes ut av *normalisert frekvens* $\Omega = 2\pi \frac{f}{F_s}$, og et forsterkningsfaktor r .
- ▶ z-transformen for et vilkårlig signal $x[n]$ (også impulsresponser) er gitt ved:

1. $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \Rightarrow$ En geometrisk rekke av komplekse polynomer

2. En slik rekke s kan skrives som

$$X(z) = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \Big|_{r \leq 1} \stackrel{n \rightarrow \infty}{=} \frac{a}{1-r}.$$

3. ROC er de verdier for z som gjør at rekka konvergerer, dvs. som gir $|r| < 1$.

Egenskaper til z -transformasjonen

▶ **Linearitet:**

$$Z\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$$

ROC: minst $\text{ROC}_{x_1} \cap \text{ROC}_{x_2}$.

▶ **Skifting i tid:**

$$Z\{x[n - n_0]\} = z^{-n_0}X(z)$$

ROC = ROC_x , med mulig unntak at punktene $z = 0$ $z = \infty$ kan legges til eller fjernes.

▶ **Skifting i frekvens:**

$$Z\{a^n x[n]\} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

ROC = ROC_x skalert med $|a|$.

Egenskaper til z-transformasjonen ...

▶ **Tidsreversering:**

Hvis $Z\{x[n]\} = X(z)$ ROC : $r_1 < |z| < r_2$

så er $Z\{x[-n]\} = X(z^{-1})$ ROC : $1/r_2 < |z| < 1/r_1$

▶ **Derivering i z-domenet:**

$$Z\{nx[n]\} = -z \frac{dX(z)}{dz} \quad \text{ROC} = \text{ROC}_x.$$

▶ **Konvolusjon av to sekvenser:**

$$Z\{x_1[n] * x_2[n]\} = X_1(z)X_2(z) \quad \text{ROC} : \text{ROC}_{x_1} \cap \text{ROC}_{x_2}.$$

ROC kan være større hvis det forekommer pol-nullpkt kansellering i produktet $X_1(z)X_2(z)$.

Egenskaper til z -transformasjonen ...

- ▶ **Kompleks konjugering:**

$$Z\{x^*[n]\} = X^*(z^*) \quad \text{ROC} = \text{ROC}_x.$$

- ▶ **Startverdi (initial value) teoremet:**

$$\text{Hvis } x[n] \text{ kausal, s\aa er } x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z).$$

Tema

$H(z)$; systemfunksjonen og implementasjoner

System transferfunksjonen

Koblede systemer

Operator- og blokknotasjon

Blokkdiagramer

“The transference function” eller systemfunksjonen

- ▶ $Y(z) = H(z)X(z)$.
- ▶ $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-1}$ og $h[n]$ er ekvivalente beskrivelse av et system i forskjellige domener.
- ▶ $H(z)$ kalles *system transference function* eller bare *systemfunksjonen*.

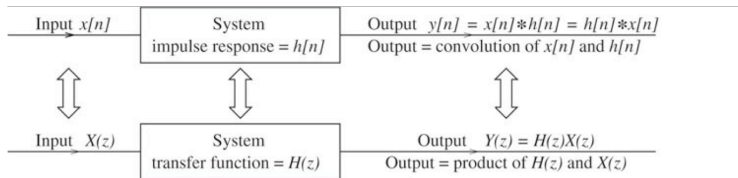


FIGURE 4.3 System description in the time domain and z-domain. In the time domain, the system output is found by the convolution of $x[n]$ and $h[n]$. In the z-domain, the transformed output $Y(z)$ is found by the product of $X(z)$ and $H(z)$. Convolution in one domain transforms to multiplication in the other

“The transference function” eller systemfunksjonen ...

- ▶ Lineær konstant-koeffisient differanse ligning:

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \text{ gir}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}.$$

- ▶ Hvis $a_k = 0$ for $k = 1..N$; *all-zero system* / FIR system / MA system.
- ▶ If $b_k = 0$ for $k = 1..M$; *all-pole system* / IIR system.
- ▶ Generell form; *pole-nullpunkt system* / IIR system.

Koblede systemer

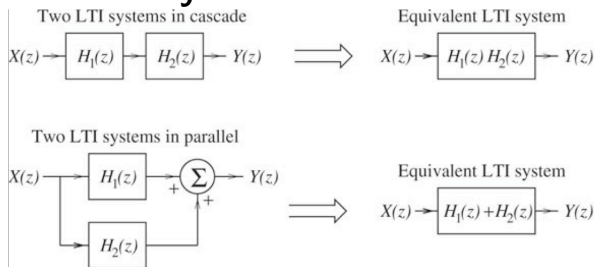
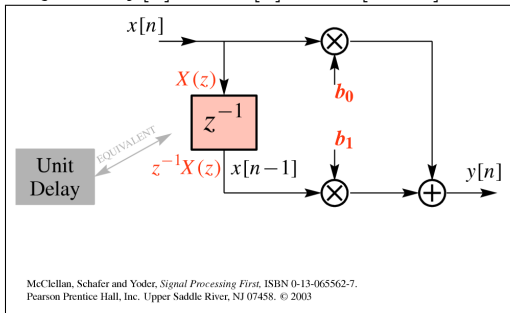


FIGURE 4.4 The equivalent transfer function of systems in cascade is the product of the individual transfer functions. The equivalent transfer function of systems in parallel is the sum of the individual transfer functions

Operatornotasjon

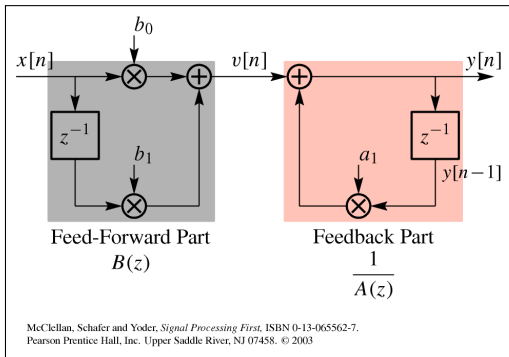
- ▶ En forsinkelse på ett sampel tilsvarer mult. med z^{-1}
 - ▶ $x[n-1] \xrightarrow{\text{ZT}} z^{-1} X(z)$
 - ▶ Refererer til dette som **unit-delay property**.
- ▶ Blokknotasjon av $y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1]$



Direkte form I struktur

- ▶ Gitt systemfunksjonen $H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$.
 - ▶ Faktorisering av denne i en FIR og en IIR del gir

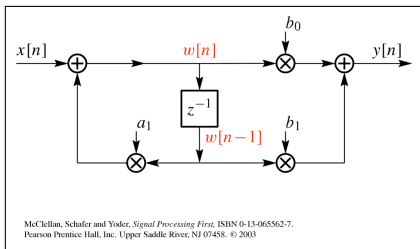
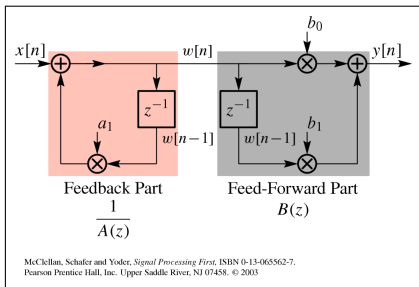
$$H(z) = (b_0 + b_1 z^{-1}) \left(\frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \right) = B(z) \left(\frac{1}{A(z)} \right)$$
 - ▶ Kaskadekobling av de to delene gir



Direkte form II struktur

- ▶ Ved bytting av rekkefølgen på “IIR” og “FIR” delen fås;

$$H(z) = \left(\frac{1}{A(z)} \right) B(z):$$



Transponert form

- ▶ Med utgangspkt i en *Direkte form struktur* (vanligvis DF II):
 1. Bytt retning på alle piler (og behold multiplikatorer).
 2. La alle "samlepunkt" bli "summepunkt" og vv.
 3. Bytt roller til inngang og utgang.

