



UiO : **University of Oslo**

## Uke 5: Analyse i z- og frekvensdomenet

Jo Inge Buskenes

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

INF3470/4470, høst 2013



# Dagens temaer

Fra forrige gang

Kausalitet, stabilitet og inverse systemer

$\mathcal{Z}^{-1}\{\cdot\}$ : Invers z-transformasjon

Ensidig z-transformasjon

Frekvens respons

# Tema

Fra forrige gang

Definisjon, z-transformasjonen

ROC

Egenskaper

Quiz

## Definisjon av z-transformasjonen

$$\blacktriangleright X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n},$$

hvor  $z = re^{j2\pi\frac{f}{F_s}} = re^{j2\pi F} = re^{j\Omega}$  er en kompleks variabel.

- ▶ Dette gir en uendelig rekke av komplekse polynomer. Det vil derfor kun være mulig å finne  $X(z)$  for de verdiene av  $z$  hvor rekken konvergerer.

⇒ **Region Of Convergence (ROC)**

- ▶ Notasjon:

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{ZT}} \rightarrow X(z)$$

## ROC

Hvis  $x[n]$  er...

- ▶ en endelig sekvens.  $X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}$ .

ROC for alle  $z$  bortsett fra

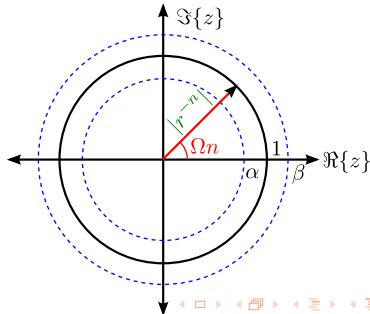
- ▶ i  $z = 0$ , hvis  $X(z)$  inneholder ledd på formen  $z^{-n}$
- ▶ i  $z = \infty$ , hvis  $X(z)$  inneholder ledd på formen  $z^n$
- ▶ periodisk og ...
  - ▶ kausalt.  $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$  ROC:  $|z| > \alpha$
  - ▶ anti-kausalt.  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^0 x[n]z^{-n}$  ROC:  $|z| < \beta$
  - ▶ tosidig.  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$  ROC:  $\alpha < |z| < \beta$

## z-transformen - Visuell representasjon

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] r^{-n} e^{-j\Omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] r^{-n} (\cos \Omega n - j \sin \Omega n)
 \end{aligned}$$



Så lenge ikke  $r$ -faktoren vokser med økende  $n$ , kan den neglisjeres og vi sitter igjen med frekvensresponsen. Dette er den **stasjonære** responsen, dvs. den vi får når alle **transienter** har dødd ut.



ROC:  $|z| > \alpha$  if causal

ROC:  $|z| < \beta$  if anti-causal

ROC:  $\alpha < |z| < \beta$  if both

## Egenskaper

- ▶ *Linearitet:*  $Z\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$   
ROC: minst  $\text{ROC}_{x_1} \cap \text{ROC}_{x_2}$ .
- ▶ *Tidsskift:*  $Z\{x[n - k]\} = z^{-k}X(z)$   
ROC =  $\text{ROC}_x$ , men mulig unntak av  $z \in \{0, \infty\}$
- ▶ *Konvolusjon:*  $Z\{x_1[n] * x_2[n]\} = X_1(z)X_2(z)$   
ROC: minst  $\text{ROC}_{x_1} \cap \text{ROC}_{x_2}$ .
- ▶ *Skalere z-plan:*  $Z\{a^n x[n]\} = X(\frac{z}{a})$   
ROC =  $\text{ROC}_x$  skalert med  $|a|$ .
- ▶ *Kompleks konjugering:*  $Z\{x^*[n]\} = X^*(z^*)$   
ROC =  $\text{ROC}_x$ .

## Quiz

1. La  $x[n] = (-2)^n u[n]$ . ROC til  $X(z)$  er da  
(a)  $|z| > 2$ , (b)  $|z| < 2$ , (c)  $|z| > 1/2$ , (d)  $|z| < 2$ , (e)  $|z| > 0$ .
2. Hvilket type system beskriver  $H[z] = \frac{z^2+2z+1}{z}$ ?  
(a) Kausalt, (b) HP, (c) FIR, (d) Rekursivt.
3. Et kausalt filter har poler  $z = 0.3, -0.5, 0.7$ .  
Hva er ROC og er systemet stabilt?  
(a)  $|z| > 0.7$  og stb, (b)  $|z| > 0.7$  og ustb,  
(c)  $|z| > 0.3$  og stb, (d)  $|z| > 0.3$  og ustb.
4. Hva er impulsresponsen  $h[n]$  til systemet  $H(z) = \frac{z-1}{z+1}$ ,  $|z| > 1$ ?
5. La  $y[n] + 0.5y[n-1] = 2x[n-1]$ .  
Finn transferfunksjonen  $H_I(z)$  til det inverse systemet.



# Tema

Kausalitet, stabilitet og inverse systemer

Kausalitet og stabilitet

Inverse systemer

## **z-transf. og kausalitet og stabilitet**

**Kausalitet:** Gitt av ROC:

FIR  $\Rightarrow$  Kausalt  $|z| \neq 0$     Antikausalt:  $|z| \neq \infty$

IIR  $\Rightarrow$  Kausalt  $|z| > |\alpha|$     Antikausalt:  $|z| < |\beta|$

**Stabilitet:** Hvis enhets sirkelen ligger i ROC.

Venter til DTFT / Fourieranalyse for å etablere dette.

**Kausalt og stabilt system** Alle poler innenfor enhets sirkelen.

### **The ROC of Stable LTI Systems Always Includes the Unit Circle**

**Stable, Causal System:** All the poles must lie inside the unit circle.

**Stable, Anti-Causal System:** All the poles must lie outside the unit circle.

**Stability from Impulse Response:**  $h[n]$  must be *absolutely summable* ( $\sum |h[k]| < \infty$ ).

## Inverse systemer

- ▶  $h_I[n]$  er invers til  $h[n]$  hvis  $h[n] * h_I[n] = \delta[n]$ .
- ▶ z-transform av likningen over:  $H(z) \cdot H_I(z) = 1$ .

$$H_I(z) = H^{-1}(z) = 1/H(z).$$

- ▶ Konsekvenser for poler og nullpunkter:
  - ▶ Invers til FIR system er IIR.
  - ▶ Generelt: Poler til  $H(z)$  blir nullpkt i  $H_I(z)$  og nullpkt i  $H(z)$  blir poler i  $H_I(z)$ .
- ▶ Inverse systemer og ROC
  - ▶ ROC til invers system bestemt fra krav om at  $H(z)$  og  $H_I(z)$  har overlappende ROC.
  - ▶  $H(z)$  kan være ustabil eller ikke-implementerbar (ikke-kausal).

# Tema

$\mathcal{Z}^{-1}\{\cdot\}$ : Invers z-transformasjon  
Invers z-transformasjon

## Invers z-transformasjon

Tre mulige tilnærmelser

- ▶ Konturintegral:  $x[n] \equiv \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{j2\pi} \oint_{\Gamma} X(z)z^{n-1} dz$ .
  - ▶ Krever kunnskap i kompleks analyse. Ikke benyttet i vårt kurs.
- ▶ Fra potensrekken; den opplagte måten!
  - ▶ F.eks.

$$x[n] = \cdots + b_{-2}\delta[n+2] + b_{-1}\delta[n+1] + b_0\delta[n] + b_1\delta[n-1] + \cdots$$

$$\Updownarrow \mathcal{Z}$$

$$X(z) = \cdots b_{-2}z^2X(z) + b_{-1}zX(z) + b_0X(z) + b_1z^{-1}X(z) + \cdots$$

- ▶ Virker for endelige rekker.
- ▶ De første leddene i uendelige høyre- eller venstresidige rekker kan finnes ved polynomdivisjon eller fra differenslikningen.
- ▶ Delbrøksoppspalting.

## **$z$ -transformasjon vha. polynomdivisjon (long division)**

### **Finding Inverse Transforms of $X(z) = N(z)/D(z)$ by Long Division**

**Right-Sided:** Put  $N(z)$ ,  $D(z)$  in *descending powers of  $z$* . Obtain a power series in powers of  $z^{-1}$ .

**Left-Sided:** Put  $N(z)$ ,  $D(z)$  in *ascending powers of  $z$* . Obtain a power series in powers of  $z$ .

## Invers z-transform vha. delbrøksoppspalting

- ▶ Gitt  $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{n=0}^N b_n z^{-n}}{\sum_{k=0}^K b_k z^{-k}}$ .
- ▶ Hvis  $N < K$ , dvs. nevner har høyere orden enn teller, kan delbrøksoppspalting brukes direkte.
- ▶ Hvis  $N \geq K$  delbrøksoppspaltes i stedet  $\frac{H(z)}{z^{N-K+1}}$ .
- ▶ Prosedyre:
  1. Polene til  $H(z)$  faktoriseres og uttrykkes på formen  $(z - p_k)$  for  $k = 1, 2, \dots, N$ .
  2. Uttrykk  $Y(z)$  som en sum av ledd på formen  $Y(z) = \sum_{k=1}^N \frac{K_k}{z - p_k}$ , hvor  $K_k = Y(z)(z - p_k)|_{z=p_k}$ .
  3. Finn  $X(z) = zY(z)$ .
  4. Skriv ned svaret;  $x[n] = \sum_{k=1}^N K_k(p_k)^n u[n]$ .

## Delbrøksoppspaltning

De 3 mulige formene røttene kan ha ...

1. Røtter av typen  $(z + p_k)$

$$\frac{K}{z(z + p_1)(z + p_2)\dots} = \frac{K_0}{z} + \frac{K_1}{z + p_1} + \frac{K_2}{z + p_2} + \dots$$

2. Røtter av typen  $(z + p_k)^2 \Rightarrow$  multiple former.

$$\frac{K}{z(z + p_1)^2} = \frac{K_0}{z} + \frac{K_1}{z + p_1} + \frac{K_2}{(z + p_2)^2}$$

3. Røtter av typen  $(az^2 + bz + c) \Rightarrow$  komplekse.

$$\frac{K}{z(az^2 + bz + c)} = \frac{K_0}{z} + \frac{K_1z + K_2}{az^2 + bz + c}$$

- I de aller fleste tilfeller holder det å kunne metode **1**.



## Invers z-transform ved å gjenkjenne kjente brøker...

- ▶ Etter delbrøksoppspaltingen står vi igjen med enkle ledd som vi kjenner igjen tidsuttrykkene til.

**TABLE 4.3 ▶**  
Inverse z-Transform  
of Partial Fraction  
Expansion (PFE)  
Terms

Entry	PFE Term $X(z)$	Causal Signal $x[n], n \geq 0$
1	$\frac{z}{z - \alpha}$	$\alpha^n$
2	$\frac{z}{(z - \alpha)^2}$	$n\alpha^{(n-1)}$
3	$\frac{z}{(z - \alpha)^{N+1}} \quad (N > 1)$	$\frac{n(n-1)\cdots(n-N+1)}{N!} \alpha^{(n-N)}$
4	$\frac{z\bar{K}}{z - \alpha e^{j\Omega}} + \frac{z\bar{K}^*}{z - \alpha e^{-j\Omega}}$	$2K\alpha^n \cos(n\Omega + \phi) = 2\alpha^n [C \cos(n\Omega) - D \sin(n\Omega)]$
5	$\frac{z\bar{K}}{(z - \alpha e^{j\Omega})^2} + \frac{z\bar{K}^*}{(z - \alpha e^{-j\Omega})^2}$	$2Kn\alpha^{n-1} \cos[(n-1)\Omega + \phi]$
6	$\frac{z\bar{K}}{(z - \alpha e^{j\Omega})^{N+1}} + \frac{z\bar{K}^*}{(z - \alpha e^{-j\Omega})^{N+1}}$	$2K \frac{n(n-1)\cdots(n-N+1)}{N!} \alpha^{(n-N)} \cos[(n-N)\Omega + \phi]$

NOTE 1: Where applicable,  $\bar{K} = Ke^{j\phi} = C + jD$

NOTE 2: For anti-causal sequences, we get the signal  $-x[n]u[-n-1]$ , where  $x[n]$  is as listed.

# Tema

Ensidig z-transformasjon

Ensidig z-transformasjon

Egenskaper til ensidig z-transf.

## Ensidig z-transformasjon, definisjon

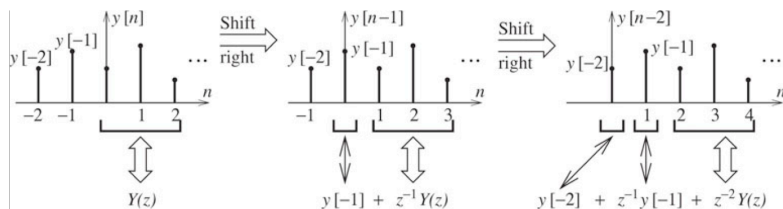
- ▶  $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[n]z^{-k}$ 
  - ▶ Nyttig for analyse av kausale LTI systemer.
  - ▶ Brukes primært til å løse lineære konstant koeffisient differens likninger med initialbetingelser.
  - ▶ De fleste egenskapene til to-idig z-transform gjelder også for ensidig z-transform.
    - ▶ Untak: Shifting i tid.
  - ▶ Ensidig z-transform av en sekvens  $y[n]$  og dens kausale utgave,  $y[n]u[n]$  er identiske.

## Ensidig z-transform, shift egenskap

- ▶ Høyre shift av  $y[n]$  flytter sampler med  $n < 0$  inn i området  $n \geq 0$ :

- ▶  $y[n-1] \rightarrow \boxed{\text{ZT}} \rightarrow z^{-1}Y(z) + y[-1]$

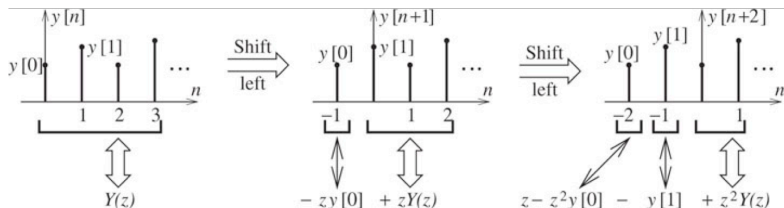
- ▶  $y[n-2] \rightarrow \boxed{\text{ZT}} \rightarrow z^{-2}Y(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]$



**FIGURE 4.9** Illustrating the right-shift property of the one-sided z-transform. A right shift brings samples from the left of the origin into the range  $n \geq 0$ . These samples now contribute to the z-transform of the shifted signal

## Ensidig z-transform, shift egenskap ...

- ▶ Venstre shift av  $y[n]$  flytter sampler fra området  $n \geq 0$  inn i området  $n < 0$ :
  - ▶  $y[n+1] \rightarrow \boxed{\text{ZT}} \rightarrow zY(z) - zy[0]$
  - ▶  $y[n+2] \rightarrow \boxed{\text{ZT}} \rightarrow z^2Y(z) - z^2y[0] - zy[1]$



**FIGURE 4.10** Illustrating the left-shift property of the one-sided z-transform. A left shift moves samples from the causal region  $n \geq 0$  to the left of the origin. These samples no longer contribute to the z-transform of the shifted signal

## Startverdi- og sluttverdi-teoremet (initial value/final value theorem)

- ▶ Startverdi (initial value) teoremet for ensidig  $z$ -transform:

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

- ▶ Sluttverdi (final value) teoremet for ensidig  $z$ -transform:

$$x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)X(z)$$

- ▶ Er kun gyldig når polene til  $(z - 1)X(z)$  har magnitudo mindre enn en.
- ▶ Begge teoremer kan også brukes for tosidig  $X(z)$  dersom  $x[n]$  er lik null for  $n < 0$ .

# Tema

Frekvens respons

Egenfunksjoner og egenverdier

Frekvens transformasjon

Fra z-transf. til DTFT

## Egenfunksjoner og egenverdier

- ▶ En sekvens sies å være en egenfunksjon til et system hvis
  - ▶ responsen til en input-sekvens  $x[n]$
  - ▶ er output-sekvensen  $y[n] = \lambda x[n]$
  - ▶ hvor  $\lambda$ , egenverdien, generelt avhenger av input-signalet  $x[n]$ .
- ▶ Det vil si:  
Egenfunksjoner er sekvenser som passerer rett igjennom et system med kun en mulig (kompleks) amplitudeforandring.

$$\mathbf{x}[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow \mathbf{y}[n] = \lambda \mathbf{x}[n]$$



## Egenfunksjoner til et LTI system

- ▶ La

$$x[n] = e^{j\Omega n}, \quad -\infty < n < \infty, \quad \Omega \in [-\pi, \pi].$$

- ▶ Da er

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\Omega(n-k)} = e^{j\Omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\Omega k} \\ &= H(\Omega)e^{j\Omega n} = H(\Omega)x[n]. \end{aligned}$$

- ▶ dvs at egenfunksjonen til et LTI system er

$$x[n] = e^{j\Omega n}, \quad -\infty < n < \infty, \quad \Omega \in [-\pi, \pi].$$

- ▶ og egenverdien, benevnt  $H(\Omega)$ , er

$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\Omega k}.$$

## Frekvens transformen

- ▶ Hvis inngangssignalet,  $x[n]$ , til et LTI-system er en kompleks eksponensial, så vil utgangssignalet,  $y[n]$  være likt inngangssignalet multiplisert med et komplekst tall (gir amplitudeskalering og faseforskyvning).
- ▶ Amplitudeskaleringen er gitt som  $H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jk\Omega}$ .
- ▶  $H(\Omega)$  er generelt **komplekst**, dvs.

$$H(\Omega) = H_{\Re}(\Omega) + jH_{\Im}(\Omega),$$

$$\text{eller } H(\Omega) = |H(\Omega)|e^{j\Phi_h(\Omega)},$$

$$\text{hvor } |H(\Omega)|^2 = H(\Omega)H^*(\Omega) = H_{\Re}^2(\Omega) + H_{\Im}^2(\Omega)$$

$$\text{and } \Phi_h(\Omega) = \tan^{-1} \frac{H_{\Im}(\Omega)}{H_{\Re}(\Omega)}.$$

- ▶  $H(\Omega)$  **avhenger** av frekvensen  $\Omega$ .

## Frekvens transformasjonen ...

- ▶  $H(\Omega)$  kalles **frekvensresponsen**.
- ▶ Den viser hvordan en kompleks eksponensial forandres i (kompleks) amplitude når den filtreres av systemet.
- ▶ Særdeles nyttig om inngangssignalet,  $x[n]$ , kan dekomponeres inn i en sum av komplekse eksponensialer.
  - ▶ Responsen til

$$x[n] = \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{-j\Omega_k n}$$

- ▶ vil være

$$y[n] = \sum_{k=1}^N H(\Omega_k) \alpha_k e^{-j\Omega_k n}$$

- ▶ Gruppeforsinkelsen,  $\tau_k(\Omega)$ , forsinkelsen til hele signalet

$$x[n] = \sum_{k=1}^N \alpha_k e^{-j\Omega_k n}:$$

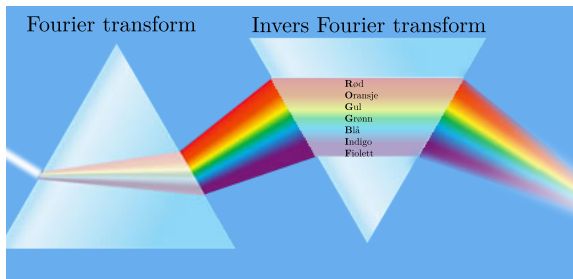
$$\tau_h(\Omega) = -\frac{d\Phi_h(\Omega)}{d\Omega}.$$

## Fra tid til frekvens

- ▶ Frekvensresponsen til et LTI-system beskriver hvordan en kompleks eksponensial forandres i (kompleks) amplitude når denne anvendes på systemet.
- ▶ Hvis inngangssignalet ikke er en kompleks eksponensial, eksisterer det da en måte å transformere signalet inn i en sum av komplekse eksponensialer?
- ▶ Hvis alle (praktiske) signaler kan skrives som en (uendelig) sum av sinuser og cosinuser, hvordan finner vi da denne summen gitt en sekvens  $x[n]$ ?

## Fourierrepresentasjon av et signal ...

- ▶ Spiller en veldig viktig rolle i både kontinuerlig tid og diskret tid signalbehandling.
- ▶ Beskriver en metode for å transformere et signal fra et domene til et annet slik at vi kan manipulere signalet her.
  - ▶ Konvolusjon blir multiplikasjon (sånn nesten ...).
- ▶ Gir en annen måte/arena å tolke signaler og systemer.
  - ▶ Analogi:



## Fourier transformasjonen til diskrete ikke-periodisk signaler.

$$\blacktriangleright X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}.$$

- $\blacktriangleright X(\Omega)$  representerer frekvensinnholdet i signalet  $x[n]$ , dvs.
- $\blacktriangleright X(\Omega)$  er en dekomposisjon av  $x[n]$  inn i sine frekvenskomponenter.

- $\blacktriangleright$  Unik over frekvensintervallet  $(-\pi, \pi)$ , eller ekvivalent  $(0, 2\pi)$ .
- $\blacktriangleright X(\Omega)$  er periodisk med periode  $2\pi$ .

$$\blacktriangleright x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega.$$

## Fourier transformasjonen til diskrete ikke-periodisk signaler ...

- ▶ Konvergerer:  $X_N(\Omega) = \sum_{n=-N}^N x[n]e^{-j\Omega n}$  konvergerer uniformt til  $X(\Omega)$ , dvs.  $\lim_{N \rightarrow \infty} \{\sup_{\Omega} |X(\Omega) - X_N(\Omega)|\} = 0$ .
  - ▶ Garantert hvis  $x[n]$  er absolutt summerbar.
- ▶ Mulig med kvadratisk summerbare sekvenser hvis *mean-square* konvergenzkriterium er oppfylt.
- ▶ Energitetthetsspekter

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega.$$

## Discrete-time Fourier transform; DTFT

Notasjon:

- ▶ Analysis :  $X(\Omega) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$ .
- ▶ Alternativt:  $X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi F n}$ .
- ▶ Syntese :  $x[n] \equiv \{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$ .
- ▶ Alternativt:  $x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(F) e^{j2\pi n F} dF$ .
- ▶  $x[n] \leftrightarrow X(\Omega)$ .



## Fra z-transf. til DTFT

- ▶ Finner  $X(\Omega)$  ved å evaluere z-transformasjonen langs enhets sirkelen.

- ▶  $X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$

- ▶  $z = Re^{j2\pi F}$ , der  $F = \frac{f}{F_s}$ . Vi setter  $R = 1$  og får:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j2\pi Fn} \\ &= X(\Omega). \end{aligned}$$