

UiO : **University of Oslo**

Uke 6: Analyse i frekvensdomenet

Jo Inge Buskenes

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

INF3470/4470, høst 2013



Dagens temaer

Fra forrige gang

Frekvensrespons funksjonen

Fourier rekker og transform

Egenskaper til DT Fourier transform

LTI systemer som frekvens-selektive filtre

Tema

Fra forrige gang

z-transformasjonen

- ▶ Definisjon; formel + ROC
- ▶ Egenskaper
- ▶ Drøfte systemer vha z-transformen
- ▶ Invers z-transformasjon
- ▶ Poler og nullpunkter

Egenfunksjoner til et LTI system

- ▶ La

$$x[n] = e^{jn\Omega}, \quad -\infty < n < \infty, \quad \Omega \in [-\pi, \pi].$$

- ▶ Da er

$$\begin{aligned} y[n] &= h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\Omega(n-k)} = e^{jn\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jk\Omega} \\ &= H(\Omega)e^{jn\Omega} = H(\Omega)x[n]. \end{aligned}$$

- ▶ dvs at egenfunksjonen til et LTI system er

$$x[n] = e^{jn\Omega}, \quad -\infty < n < \infty, \quad \Omega \in [-\pi, \pi].$$

- ▶ og egenverdien, benevnt $H(\Omega)$, er

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jk\Omega}.$$

Diskret tid Fourier transform; DTFT

Notasjon:

- ▶ Analyse : $X(\Omega) \equiv \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$.
- ▶ Alternativt: $X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn}$.
- ▶ Syntese : $x[n] \equiv \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$.
- ▶ Alternativt: $x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(F)e^{j2\pi Fn} dF$.
- ▶ $x[n] \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\Omega)$.

- Analyse: $X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$.
- Alternativt: $X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi F n}$.
- Synese: $x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$.
- Alternativt: $x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(F)e^{j2\pi F n} dF$.
- $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)$.

- $H(\Omega)$ plottes. Som oftest er det $|H(\Omega)|$ vi er mest interessert i.
- Filtre med konstant gruppeforsinkelse sier vi har *lineær fase*. Da plottes ikke fassen.

Tema

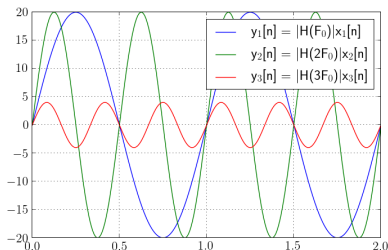
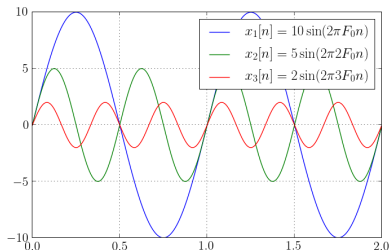
Frekvensrespons funksjonen

$H(\Omega)$: Frekvensresponsen

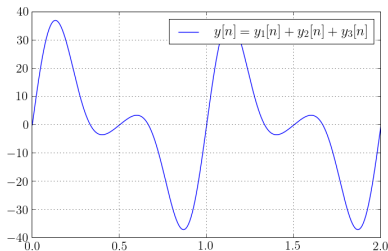
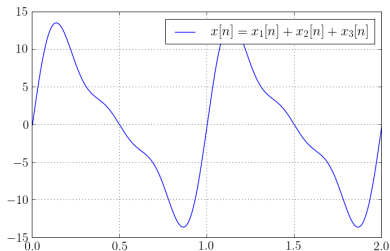
- ▶ $H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jk\Omega}$.
- ▶ $H(\Omega)$ er en funksjon av frekvensvariabelen Ω .
- ▶ $H(\Omega)$ er, generelt, **en kompleks størrelse**, og kan skrives som:
 - ▶ Reell og imaginær del: $H(\Omega) = H_R(\Omega) + jH_I(\Omega)$ eller
 - ▶ Magnitude og fase: $H(\Omega) = |H(\Omega)|e^{j\Theta(\Omega)}$,
 - ▶ hvor $|H(\Omega)|^2 = H(\Omega)H^*(\Omega) = H_R^2(\Omega) + H_I^2(\Omega)$
 - ▶ og $\Theta(\Omega) = \tan^{-1} \frac{H_I(\Omega)}{H_R(\Omega)}$.
- ▶ Gruppeforsinkelsen (eller envelopeforsinkelsen) til H :

$$\tau_g(\Omega) = -\frac{d\Theta(\Omega)}{d\Omega}.$$
 - ▶ http://en.wikipedia.org/wiki/Group_velocity
- ▶ Periodisitet: Siden $x[n] = e^{jn\Omega_0} = e^{jn(\Omega_0+2\pi)}$, må vi ha at $H(\Omega_0) = H(\Omega_0 + 2\pi)$.

$|H(\Omega)|$: Amplituderresponsen

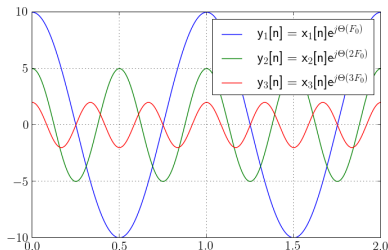
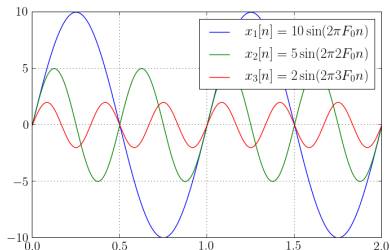


$x[n] \longrightarrow H(F) \longrightarrow y[n]$

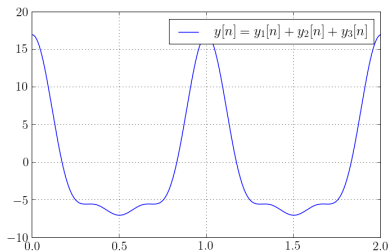
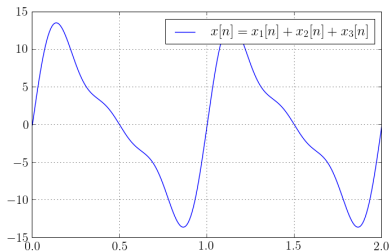


► Hva er $|H(F_0)|$, $|H(2F_0)|$ og $|H(3F_0)|$?

$\angle H(\Omega)$: Faseresponsen (her er fasen konstant)

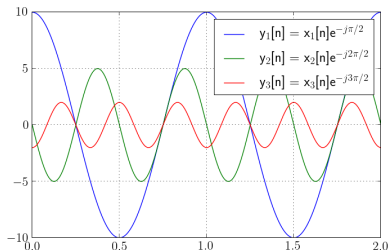
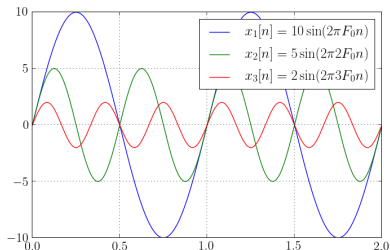


$x[n] \longrightarrow \boxed{H(F)} \longrightarrow y[n]$

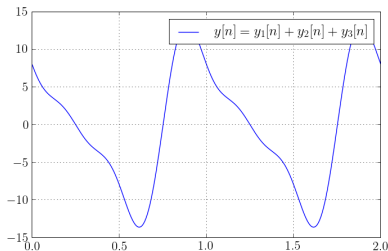
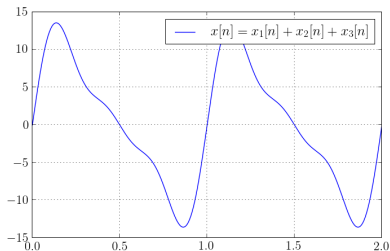


► Hva er $\Theta_H(F_0)$, $\Theta_H(2F_0)$ og $\Theta_H(3F_0)$?

$\angle H(\Omega)$: Faseresponsen (her er fasen lineær)



$x[n] \longrightarrow \boxed{H(F)} \longrightarrow y[n]$



► Konstant tidsskift: Når fasen er proporsjonal med frekvensen (*linear*).

Eksempel

Vi har gitt et LTI-system med impulsrespons

$h[n] = \alpha^n u[n]$, $\alpha \in \mathfrak{R}$, $|\alpha| < 1$. Frekvensresponsen er da

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jn\Omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-jn\Omega} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}. \end{aligned}$$

Amplituderrespons: $|H(\Omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \cdot \frac{1}{1 - \alpha e^{j\Omega}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \Omega}}$

Faserespons: $\Theta(\Omega) = \tan^{-1} \frac{H_I(\Omega)}{H_R(\Omega)} = \tan^{-1} \frac{-\alpha \sin \Omega}{1 - \alpha \cos \Omega}$.

Gruppeforsinkelse: $\tau_g(\Omega) = -\frac{\alpha^2 - \alpha \cos \Omega}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \Omega}$.

Eksempel

Vi har gitt et LTI-system med impulsvrespons
 $h[n] = \alpha^n u[n]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < 1$. Frekvensresponsen er da

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \end{aligned}$$

Amplituderespons: $|H(\Omega)| = \sqrt{\frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \Omega}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \Omega}}$

Faserespons: $\Theta(\Omega) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}\{H(\Omega)\}}{\text{Re}\{H(\Omega)\}} = \tan^{-1} \frac{-\alpha \sin \Omega}{1 - \alpha \cos \Omega}$

Gruppenforsinkelse: $\tau_g(\Omega) = -\frac{d\Theta(\Omega)}{d\Omega}$

Å regne ut gruppeforsinkelsen er en fin måte å repetere derivasjonsregler på:

$$\begin{aligned} \tau_g(\Omega) &= -\frac{d\Theta(\Omega)}{d\Omega} = \Theta'(\Omega) \\ &= -\left(\tan^{-1} \frac{-\alpha \sin \Omega}{1 - \alpha \cos \Omega} \right)' \\ &= -\frac{1}{1 + \left(\frac{-\alpha \sin \Omega}{1 - \alpha \cos \Omega} \right)^2} \left(\frac{-\alpha \sin \Omega}{1 - \alpha \cos \Omega} \right)' && \text{(kjerne-)} \\ &= -\frac{1}{1 + \left(\frac{-\alpha \sin \Omega}{1 - \alpha \cos \Omega} \right)^2} \frac{(-\alpha \sin \Omega)'(1 - \alpha \cos \Omega) - (-\alpha \sin \Omega)(1 - \alpha \cos \Omega)'}{(1 - \alpha \cos \Omega)^2} && \text{(kvotient-)} \\ &= -\frac{1}{1 + \frac{(-\alpha \sin \Omega)^2}{(1 - \alpha \cos \Omega)^2}} \frac{-\alpha \cos \Omega(1 - \alpha \cos \Omega) + \alpha \sin \Omega \alpha \sin \Omega}{(1 - \alpha \cos \Omega)^2} && \left| \cdot \frac{(1 - \alpha \cos \Omega)^2}{(1 - \alpha \cos \Omega)^2} \right. \\ &= -\frac{-\alpha \cos \Omega + \alpha^2 \cos^2 \Omega + \alpha^2 \sin^2 \Omega}{1 - 2\alpha \cos \Omega + \alpha^2 \cos^2 \Omega + \alpha^2 \sin^2 \Omega} \\ &= -\frac{-\alpha \cos \Omega + \alpha^2}{1 - 2\alpha \cos \Omega + \alpha^2} && (\sin^2 \Omega + \cos^2 \Omega = 1) \end{aligned}$$

Tema

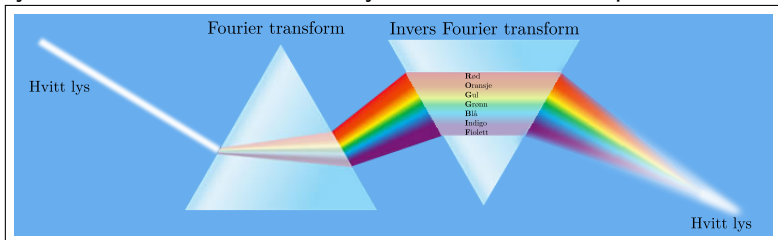
Fourier rekker og transformer

Kontinuerlig tid Fourier rekke og transform

Frekvens analyse av diskret tid periodiske signaler

Fourier rekker og transformers

- ▶ **Mål:** Utvikle et matematisk verktøy (et “prisme”) som dekomponerer signaler (“lys”) inn forskjellige frekvenskomponenter (“farger”).
- ▶ **Videre:** Utvikle verktøyet (“det inverse prismet”) som syntetiserer tilbake det hvite lyset fra frekvenskomponentene.



De fire Fourier rekkene/transformasjonene

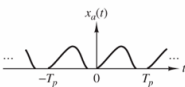
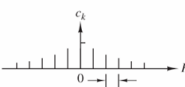
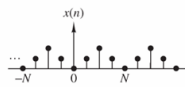
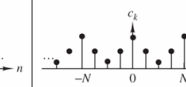
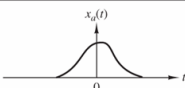
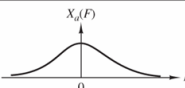
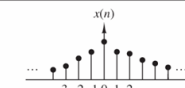
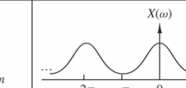
		Continuous-time signals		Discrete-time signals	
		Time-domain	Frequency-domain	Time-domain	Frequency-domain
Periodic signals Fourier series	 $c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x_a(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$ $F_0 = \frac{1}{T_p}$	 $x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$	 $c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi/N kn}$	 $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j(2\pi/N)kn}$	
	Continuous and periodic	Discrete and aperiodic	Discrete and periodic	Discrete and periodic	
Aperiodic signals Fourier transforms	 $X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt$	 $x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF$	 $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$	 $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$	
	Continuous and aperiodic	Continuous and aperiodic	Discrete and aperiodic	Continuous and periodic	

Figure 4.3.1 Summary of analysis and synthesis formulas.

Kontinuerlig tid: Fourier rekke og transform

- ▶ Fourier rekker: Dekomposisjon av signaler til sum av sinus/cosinus ledd (eller komplekse eksponensialer)
→ *frekvens domenet*.
- ▶ De aller fleste signaler av praktisk interesse kan dekomponeres i en sum av sinus/cosinus ledd.
 - ▶ Periodiske signaler: Fourier rekke (Fourier series).
 - ▶ Endelig energi signaler: Fourier transform.
- ▶ Viktig i analyse av LTI systemer:
 - ▶ Et LTI systems respons til en sinus/cosinus er en tilsvarende sinus/cosinus, men med en (kompleks) skalering.
 - ▶ Et LTI systems respons til en lineær sum av sinus/cosinus ledd er en tilsvarende sum av sinus/cosinus ledd med kun en mulig kompleks skalering av hvert ledd.

Kontinuerlig tid (CT) og periodiske signaler

⇒ Fourier rekker

- ▶ Hvis $x(t)$ er et periodisk signal som tilfredstiller Dirichlets krav, så er

- ▶ Syntese likn.: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t}$.

- ▶ Analyse likn.: $c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$.

- ▶ Dirichlets krav:

1. Signalet $x(t)$ har et endelig antall diskontinuiteter innenfor enhver periode.
2. Signalet $x(t)$ innehar et endelig antall maks og min punkter innenfor enhver periode.
3. Signalet $x(t)$ er absolutt integrerbar innefor enhver periode, dvs $\int_{T_p} |x(t)| dt < \infty$.

- ▶ I praksis vil alle periodiske signaler av interesse tilfredstille disse kravene.

- ▶ Andre periodiske signaler kan også ha en Fourier rekke representasjon

→ Fourier rekker

- Hvis $x(t)$ er et periodisk signal som tilfredstiller Dirichlets krav, så er
 - Syntheselien: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t}$
 - Analyselien: $c_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$
- Dirichlets krav:
 1. Signalet $x(t)$ har et endelig antall diskontinuiteter innenfor enhver periode.
 2. Signalet $x(t)$ innehar et endelig antall maks og min punkter innenfor enhver periode.
 3. Signalet $x(t)$ er absolutt integrerbar innenfor enhver periode, dvs $\int_{t_0}^{t_0+T_p} |x(t)| dt < \infty$.
- I praksis vil alle periodiske signaler av interesse tilfredstille disse kravene.
- Andre periodiske signaler kan også ha en Fourier rekke representasjon.

Hvis vi har et kontinuerlig periodisk signal $x(t)$ så må dette kunne skrives som en sum av et endelig antall frekvenskomponenter $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t}$. Vi finner c_k ved å gange med $e^{-j2\pi l f_0 t}$ ($l \in \mathbb{Z}$) og integrere over en periode (får da ut amplituden):

$$\begin{aligned}
 c_l &= \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi l f_0 t} dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_0+T_p} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t} \right) e^{-j2\pi l f_0 t} dt \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt
 \end{aligned}$$

- Hvis $x(t)$ er et periodisk signal som tilfredstiller Dirichlets krav, så er
 - Syntheselien: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k t}$
 - Analyzelien: $c_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j2\pi k t} dt$
- Dirichlets krav:
 1. Signalet $x(t)$ har et endelig antall diskontinuiteter innenfor enhver periode.
 2. Signalet $x(t)$ innehar et endelig antall maks og min punkter innenfor enhver periode.
 3. Signalet $x(t)$ er absolutt integrerbar innenfor enhver periode, dvs. $\int_{t_0}^{t_0+T_p} |x(t)| dt < \infty$.
- I praksis vil alle periodiske signaler av interesse tilfredstille disse kravene.
- Andre periodiske signaler kan også ha en Fourier rekkerepresentasjon.

Hva blir dette hvis $k \neq l$?

$$\begin{aligned}
 c_l &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j2\pi(k-l)f_0 t} dt \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{j2\pi(k-l)f_0} \left[e^{j2\pi(k-l)f_0 t} \right]_{t_0}^{t_0+T_p} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{j2\pi(k-l)f_0} \left(e^{j2\pi(k-l)f_0(t_0+T_p)} - e^{j2\pi(k-l)f_0 t_0} \right) \\
 &= 0 \quad \text{siden} \quad e^{j(\dots)t} = e^{j(\dots)(t+T_p)}
 \end{aligned}$$

⇒ Fourier rekker

- Hvis $x(t)$ er et periodisk signal som tilfredstiller Dirichlets krav, så er
 - Syntheselink: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t}$
 - Analytelink: $c_k = \frac{1}{T_p} \int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$
- Dirichlets krav:
 1. Signalet $x(t)$ har et endelig antall diskontinuiteter innenfor enhver periode.
 2. Signalet $x(t)$ innehar et endelig antall maks og min punkter innenfor enhver periode.
 3. Signalet $x(t)$ er absolutt integrerbar innenfor enhver periode, dvs. $\int_{t_0}^{t_0+T_p} |x(t)| dt < \infty$.
- I praksis vil alle periodiske signaler av interesse tilfredstille disse kravene.
- Andre periodiske signaler kan også ha en Fourier rekkerepresentasjon.

...og hvis $k = l$?

$$c_l = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{j2\pi 0 f_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T_p} dt = T_p c_k$$

Ergo:

$$c_k = \frac{1}{T_p} c_l = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi l f_0 t} dt$$

Det kan også vises at for et gitt valg av basis $e^{j2\pi k f_0 t}$ er Fourier-rekka en minste kvadraters løsning.

Fourier transformasjonen til CT signaler

- ▶ Betrakt et aperiodisk signal $x(t)$ med endelig lengde.
- ▶ Konstruer et periodisk signal $x_p(t)$ med periode T_p .
- ▶ Da er $x(t) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} x_p(t)$.

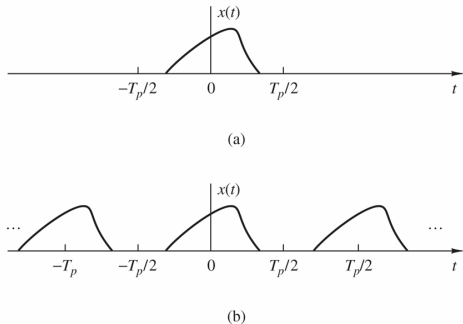


Figure 4.1.7 (a) Aperiodic signal $x(t)$ and (b) periodic signal $x_p(t)$ constructed by repeating $x(t)$ with a period T_p .

Fourier transformasjonen til CT signaler, *fortsettelse*

- ▶ Hvis $x(t)$ er et aperiodisk signal som tilfredstiller Dirichlets krav, så er

- ▶ Syntese likn.: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df.$

- ▶ Analyse likn.: $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt.$

- ▶ Dirichlets krav:
 1. Signalet $x(t)$ har et endelig antall diskontinuiteter.
 2. Signal $x(t)$ innehar et endelig antall maks og min punkter.
 3. Signal $x(t)$ er absolutt integrerbart, dvs $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$
- ▶ **Alle signaler av praktisk interesse tilfredstiller disse kravene.**

Diskret tid Fourier rekker.

- ▶ Gitt et signal $x[n]$ med periode N , dvs. $x[n] = x[n + N] \forall N$. Da har vi:

- ▶ Syntese likn.:
$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}.$$

- ▶ Analyse likn.:
$$c_l = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi ln/N}, \quad l = 0, 1, \dots, N-1.$$

- ▶ $\{c_k\}$ representerer amplitude og fase til frekvenskoeffisienten $s_k[n] = e^{j2\pi kn/N} = e^{j\Omega_k n}$, $\Omega_k = 2\pi k/N$.
- ▶ $\{c_k\}$ er periodisk med periode N .
- ▶ **Endelig mengde informasjon i både tid og frekvens.** Dette kan datamaskiner håndtere!!!

Diskret tid Fourier rekker.

Energitetthetsspekter av periodiske sekvenser:

Gjennomsnittlig energi av et diskret tid periodisk signal:

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2.$$

Dvs. energien må være lik i tid og frekvens \rightarrow Parseval's relasjon.

Fourier rekker av reelle diskrete periodiske signaler:

- ▶ Hvis $x[n]$ er reell ($x^*[n] = x[n]$), så er
 - ▶ $c_k^* = c_{-k}$, eller også
 - ▶ Like symmetri: $|c_{-k}| = |c_k|$,
 - Ulike symmetri: $-\angle c_{-k} = \angle c_k$.

- ▶ Reelle signaler kan uttrykkes som

$$\begin{aligned} x[n] &= c_0 + 2 \sum_{k=1}^L |c_k| \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn + \theta_k\right) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^L \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) - b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \right), \end{aligned}$$

hvor $a_0 = c_0$, $a_k = 2|c_k| \cos \theta_k$, $b_k = 2|c_k| \sin \theta_k$, og $L = N/2$ hvis N like og $L = (N-1)/2$ hvis N ulike.

Diskret tid Fourier rekker.

Energitetthetspekter av periodiske sekvenser:
Gjennomsnittlig energi av et diskret tid periodisk signal:

$$P_s = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

Dvs. energien må være lik i tid og frekvens \rightarrow Parseval's relasjon.

Fourier rekker av reelle diskrete periodiske signaler:

- Hvis $x[n]$ er reall ($x^*[n] = x[n]$), så er
 - $c_k^* = c_{-k}$, eller også
 - Like symmetri: $|c_{-k}| = |c_k|$.
 - Ulike symmetri: $-\angle c_{-k} = \angle c_k$.
- Reelle signaler kan uttrykkes som

$$x[n] = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{L-1} |c_k| \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn + \theta_k\right) = a_0 + \sum_{k=1}^{L-1} (a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right))$$
 hvor $a_0 = c_0$, $a_k = 2|c_k| \cos \theta_k$, $b_k = 2|c_k| \sin \theta_k$, og $L = N/2$ hvis N like og $L = (N-1)/2$ hvis N ulike.

Diskret Fourier transform av reelle signaler $x[n] = x^*[n]$.

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi ln/N} \quad l = 0, 1, \dots, N-1$$

$$c_k^* = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j2\pi ln/N} = c_{-k}$$

\Rightarrow Med reelle signaler får vi symmetriske c_k / symmetri i frekvensdomenet.

Fourier transformasjonen til diskrete ikke-periodiske signaler.

- ▶ Hvis $x[n]$ er et diskret ikke-periodisk signal:

- ▶ Syntese likn.: $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega.$

- ▶ Analyse likn.: $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}.$

- ▶ $X(\Omega)$ representerer frekvensinnholdet i signalet $x[n]$, dvs. $X(\Omega)$ er en dekomposisjon av $x[n]$ inn i sine frekvenskomponenter.
- ▶ Unik over frekvensintervallet $(-\pi, \pi)$, eller ekvivalent $(0, 2\pi)$.
- ▶ $X(\Omega)$ er periodisk med periode 2π .

Fourier transformasjonen til diskrete ikke-periodiske signaler, *fortsettelse*

- ▶ Konvergerer: $X_N(\Omega) = \sum_{n=-N}^N x[n]e^{-j\Omega n}$ konvergerer uniformt til $X(\Omega)$, dvs. $\lim_{N \rightarrow \infty} \{\sup_{\Omega} |X(\Omega) - X_N(\Omega)|\} = 0$.
 - ▶ Garantert hvis $x[n]$ er absolutt summerbar.
- ▶ Mulig med kvadratisk summerbare sekvenser hvis *mean-square* konvergenzkriterium er oppfylt.
- ▶ Energitetthetsspekter

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega.$$

- Konvergerer: $X_0(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$ konvergerer uniformt til $X(\Omega)$, dvs. $\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{\Omega} |X(\Omega) - X_0(\Omega)| = 0$.
 - Garantert hvis $x[n]$ er absolutt summerbar.
- Mulig med kvadratisk summerbare sekvenser hvis mean-square konvergenzkriterium er oppfylt.
- Energitøtthetspekter
 $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$.

Absolutt summerbarhet - et tilstrekkelig krav: Hvis

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty,$$

så vil:

$$|X(\Omega)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

Dvs. $x[n]$ er absolutt summerbar hvis $X(\Omega)$ er endelig. Dette tilsvarer BIBO stabilitet, eller at enhets sirkelen ligger i ROC.

Diskret tid Fourier transform; DTFT

Notasjon:

▶ Analyse:
$$X(\Omega) \equiv \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}.$$

▶ Alternativt:
$$X(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn}.$$

▶ Syntese:
$$x[n] \equiv \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega.$$

▶ Alternativt:
$$x[n] = \int_{-1/2}^{1/2} X(F)e^{j2\pi nF} dF.$$

▶ $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega).$

Fra z-transf. til DTFT

- ▶ Finner $X(\Omega)$ ved å evaluere z-transformasjonen langs enhets sirkelen.

- ▶ $X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \stackrel{R=1}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi Fn}$

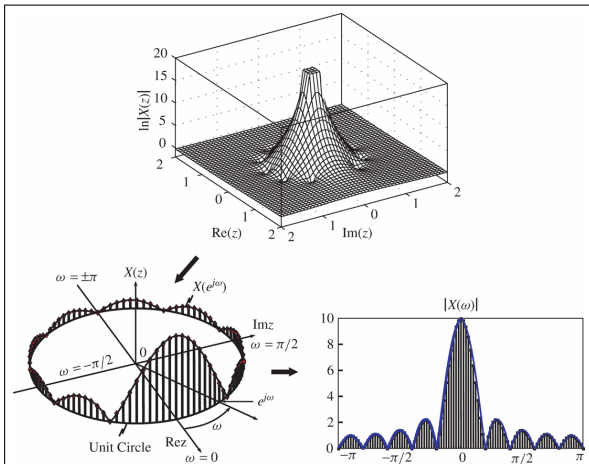


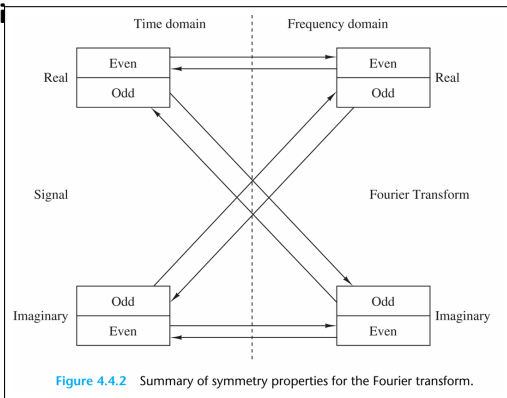
Figure 4.2.9 relationship between $X(z)$ and $X(\omega)$ for the sequence in Example 4.2.4, with $A = 1$ and $L = 10$

Tema

Egenskaper til DT Fourier transform

Egenskaper til DTFT

► Symmetri



Reelle signaler $x[n]$ har konjugert symmetrisk $X(\Omega)$.

► Linearitet:

$$\mathcal{F}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = a\mathcal{F}\{x_1[n]\} + b\mathcal{F}\{x_2[n]\}.$$

► Shifting i tid:

$$\mathcal{F}\{x[n - k]\} = X(\Omega)e^{-j\Omega k}.$$

(dvs. frekvensinnhold avhenger **bare** av form.)

Egenskaper til DTFT, *fortsettelse*

▶ **Tidsreversering:**

$$\mathcal{F}\{x[-n]\} = X(-\Omega)$$

(dvs. frekvensinnhold reellt signal ($X(-\Omega) = X^*(\Omega)$) avhenger bare av form.)

▶ **Konjugering:**

$$\mathcal{F}\{x^*[n]\} = X^*(-\Omega).$$

▶ **Konvolusjon:**

$$\mathcal{F}\{x_1[n] * x_2[n]\} = \mathcal{F}\{x_1[n]\} \mathcal{F}\{x_2[n]\} = X_1(\Omega) X_2(\Omega).$$

▶ **Korrelasjon:** $\mathcal{F}\{r_{x_1 x_2}\} = S_{x_1 x_2} = X_1(\Omega) X_2(-\Omega).$

Kryss-korrelasjonstetthetsspektrum.

▶ **Wiener-Khintchine teorem:**

La $x[n]$ være et reellt signal. Da er

$$\mathcal{F}\{r_{xx}(l)\} = S_{xx}(\Omega) = X(\Omega) X(-\Omega) = X(\Omega) X^*(\Omega).$$

(Ingen faseinformasjon, dvs ikke unik!)

Egenskaper til DTFT, *fortsettelse*

- ▶ **Shifting i frekvens:**

$$\mathcal{F}\{x[n]e^{j\Omega_0 n}\} = X(\Omega - \Omega_0).$$

$$\text{Modulasjon: } \mathcal{F}\{x[n] \cos[\Omega_0 n]\} = \frac{1}{2}[X(\Omega + \Omega_0) + X(\Omega - \Omega_0)].$$

- ▶ **Parseval's relasjon / energikonservering:**

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega.$$

- ▶ **Multiplikasjon:**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_1[n] \cdot x_2[n]\} &= \mathcal{F}\{x_1[n]\} \circledast \mathcal{F}\{x_2[n]\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int X_1(\theta) X_2(\Omega - \theta) d\theta \end{aligned}$$

⊛: *Periodic convolution.*

Sammenheng mellom system funksjon og frekvens respons

- ▶ $H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n}$
- ▶ Hvis $H(z)$ rasjonell,

$$H(\Omega) = \frac{B(\Omega)}{A(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j\Omega k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j\Omega k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k e^{-j\Omega})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k e^{-j\Omega})}, \quad (1)$$

hvor $\{a_k\}$ og $\{b_k\}$ reelle, men $\{z_k\}$ og $\{p_k\}$ kan være komplekse.

- ▶ Magnitude kvadrert: $|H(\Omega)|^2 = H(\Omega)H^*(\Omega)$
 - ▶ $H^*(\Omega)$ finnes ved å evaluere $H^*(1/z^*)$ på enhetssirkelen.
 - ▶ Når $\{h[n]\}$ reell (= $\{a_k\}$ and $\{b_k\}$ reelle)
 - ⇒ komplekse poler og nullpunkter opptrer i kompleks-konjugerte par
 - ⇒ $H^*(1/z^*) = H(z^{-1})$, dvs. $H^*(\Omega) = H(-\Omega)$ og
 - $|H(\Omega)|^2 = H(\Omega)H^*(\Omega) = H(\Omega)H(-\Omega) = H(z)H(z^{-1})|_{z=e^{j\Omega}}$.

Tema

LTI systemer som frekvens-selektive filtre
Ideell filterkarakteristikk & enkle filtre

Ideell filterkarakteristikk

- ▶ Ideelle filtre har konstant magnitudekarakteristikk.
 - ▶ Skal se på responskarakteristikk av **lavpass**, **høypass**, **båndpass**, **all-pass** og **båndstop** eller **bånd-eliminajons** filtre.
- ▶ Lineær faserespons
Ideelle filtre har lineær fase i passbåndet.
- ▶ I alle tilfeller: Ideelle filtre er ikke fysisk realiserbare!
- ▶ Design av enkle digitale filtre
 1. Basert på pol- og nullpunkt plassering.
 2. Alle poler innenfor enhetssirkelen (nullpkt hvor som helst).
 3. Komplekse poler/nullpkt. i komplekskonjugerte par.

Ideell filterkarakteristikk, *fortsettelse*

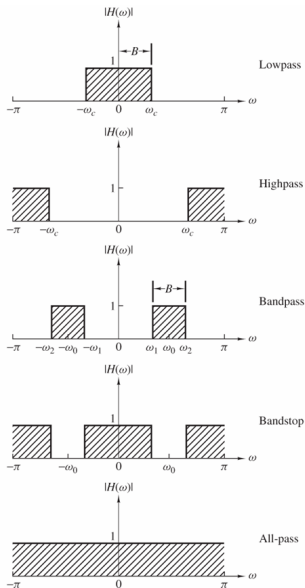
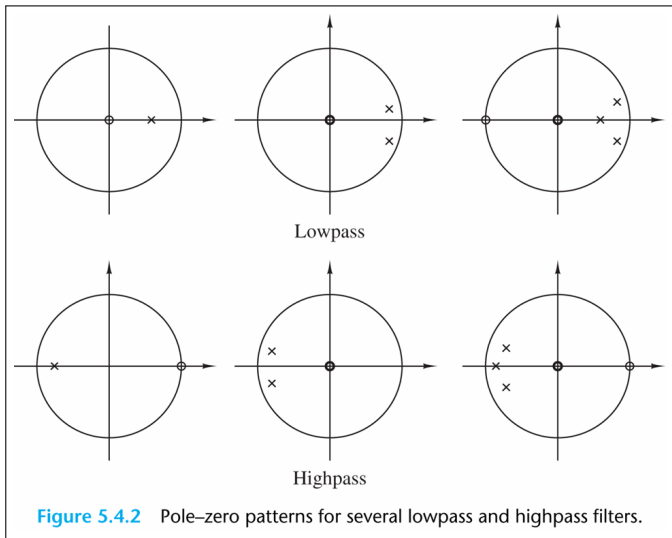


Figure 5.4.1 Magnitude responses for some ideal frequency-selective

Enkle filtre

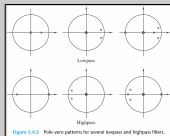
- ▶ Lavpass
- ▶ Lavpass til høypass transformasjon
 $H_{hp}(\Omega) = H_{lp}(\Omega - \pi)$, i.e.
 $h_{hp}[n] = (e^{j\pi})^n h_{lp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n]$.
- ▶ Digitale resonatorer
- ▶ Notch filtre
- ▶ Kam filtre
- ▶ All-pass filtre

Lavpass and høypass filtre



- └ LTI systemer som frekvens-selektive filtre
 - └ Ideell filterkarakteristikk & enkle filtre

Lavpass and høypass filtre



Realiserbarhet (et ideelt lavpass filter):

$$h_{lp}(n) = \frac{\sin(\omega_c \pi n)}{\pi n} \quad -\infty < n < \infty$$

To problemer:

- Ikke kausalt.
- Ikke absolutt summerbart \Rightarrow ustabil!

Design av lavpass:

- Poler nær enhets sirkel ved lave frekvenser (høyre side).
- Nullpunkt nær enhets sirkel ved høye frekvenser (venstre side).

Design av høypass:

- Ta et lavpassfilter og bytt plassering av poler og nullpunkt.

Lavpass and høypass filtre, *fortsettelse*

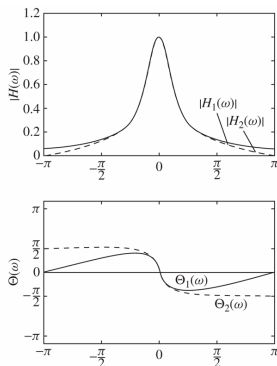


Figure 5.4.3 Magnitude and phase response of (1) a single-pole filter and (2) a one-pole, one-zero filter; $H_1(z) = (1 - a)/(1 - az^{-1})$, $H_2(z) = [(1 - a)/2][(1 + z^{-1})/(1 - az^{-1})]$ and $a = 0.9$.

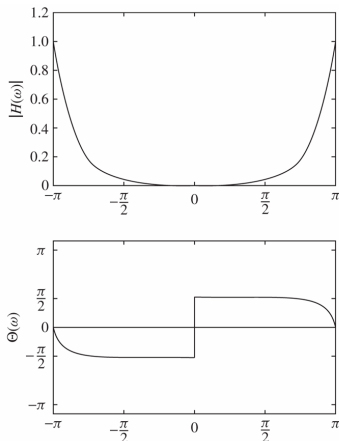


Figure 5.4.4 Magnitude and phase response of a simple highpass filter; $H(z) = [(1 - a)/2][(1 - z^{-1})/(1 + az^{-1})]$ with $a = 0.9$.

Båndpass filter

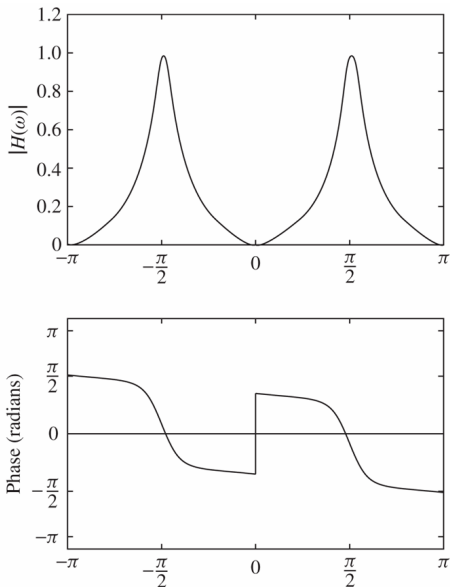


Figure 5.4.5 Magnitude and phase response of a simple bandpass filter in Example 5.4.2; $H(z) = 0.15[(1 - z^{-2})/(1 + 0.7z^{-2})]$.

- LTI systemer som frekvens-selektive filtre
 - Ideell filterkarakteristikk & enkle filtre

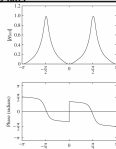


Figure 5.4.5: Magnitude and phase response of a simple bandpass filter in Example 5.4.2: $H(z) = 0.15(1 - z^{-2}) / (z^2 + 0.7)$.

$$H(z) = 0.15 \frac{1 - z^{-2}}{1 + 0.7z^{-2}} = 0.15 \frac{z^2 - 1}{z^2 + 0.7} = 0.15 \frac{(z - 1)(z + 1)}{(z - 0.83j)(z + 0.83j)}$$

Digital resonator

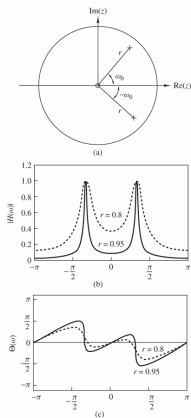


Figure 5.4.6 (a) Pole-zero pattern and (b) the corresponding magnitude and phase response of a digital resonator with (1) $r = 0.8$ and (2) $r = 0.95$.

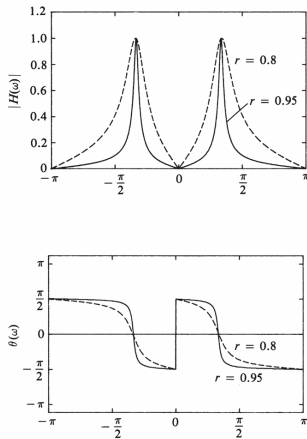
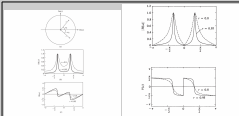


Figure 5.4.7 Magnitude and phase response of digital resonator with zeros at $\omega = 0$ and $\omega = \pi$ and (1) $r = 0.8$ and (2) $r = 0.95$.

- LTI systemer som frekvens-selektive filtre
 - Ideell filterkarakteristikk & enkle filtre



Digital resonator:

- To-pols bandpass filter med par av komplekskonjugerte poler nær enhetssirkelen: $p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$ $0 < r < 1$
- I tillegg kan opptil to nullpunkt velges. To opplagte kandidater: $z_{1,2} \in \{0, \pm 1\}$.

Notch filter

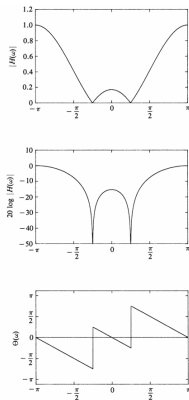


Figure 5.4.9 Frequency response characteristics of a notch filter with a notch at $\omega = \pi/4$ or $f = 1/8$; $H(z) = G[1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}]$.

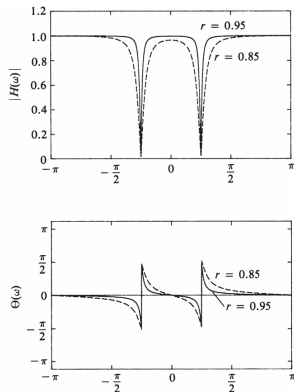
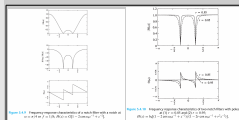


Figure 5.4.10 Frequency response characteristics of two notch filters with poles at (1) $r = 0.85$ and (2) $r = 0.95$;
 $H(z) = b_0[(1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}) / (1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2})]$.

- └ LTI systemer som frekvens-selektive filtre
 - └ Ideell filterkarakteristikk & enkle filtre

Notch filter



Notch filter (“hakk” eller “innsnitt”):

- En eller flere (ideelt) perfekte nuller i frekvensresponsen, dvs. nullpunkt på enhets sirkelen: $z_{1,2} = e^{\pm j\omega_1}$.
- For å forbedre responsen kan vi også plassere ut poler: $p_{1,2} = re^{\pm j\omega_1}$.

Kam filter

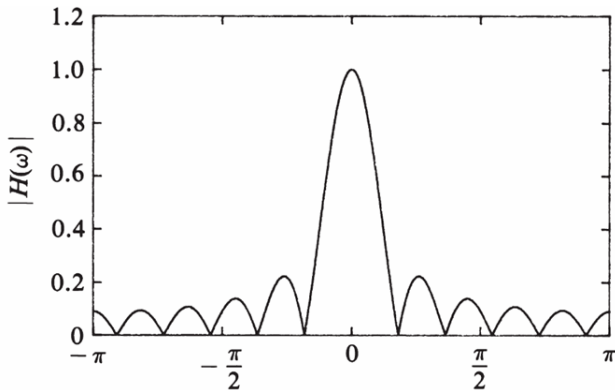
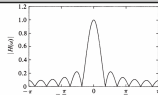


Figure 5.4.11 Magnitude response characteristic for the comb filter given by (5.4.34) with $M = 10$.

- LTI systemer som frekvens-selektive filtre
 - Ideell filterkarakteristikk & enkle filtre

Kam filter

Figure 5.4.11 Magnitude response characteristic for the comb filter given by (5.4.34) with $M = 10$.

Kam (Comb) filter:

- Brukes for å under trykke harmoniske komponenter, dvs. har nullpunkt med faste mellomrom i frekvensresponsen.
- Eksempel: Et moving average filter:

$$y[n] = \frac{1}{M+1} \sum_{k=-M/2}^{M/2} x[n-k]$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{M+1} \frac{\sin(\omega \frac{M+1}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

Mer generelt:

- Ta et FIR filter med $H(z) = \sum_{k=0}^M h(k)z^{-k}$ og erstatt z med $z = z^l$.

$$H_l(z) = \sum_{k=0}^n h[k]z^{-kl} = H(l\omega)$$

Allpass filter

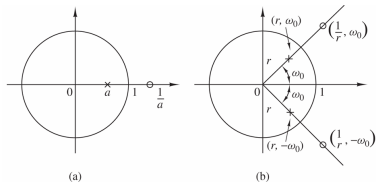


Figure 5.4.16 Pole-zero patterns of (a) a first-order and (b) a second-order all-pass filter.

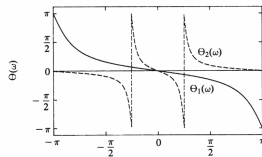
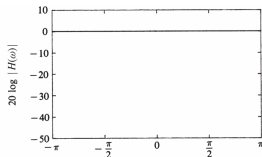
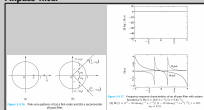


Figure 5.4.17 Frequency response characteristics of an all-pass filter with system functions (1) $H(z) = (0.6 + z^{-1}) / (1 + 0.6z^{-1})$, (2) $H(z) = (r^2 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}) / (1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2})$, $r = 0.9$, $\omega_0 = \pi/4$.

- └ LTI systemer som frekvens-selektive filtre
 - └ Ideell filterkarakteristikk & enkle filtre

Allpass filter

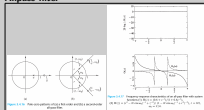


Allpass filter: For at et filter skal være allpass så må $|H(\omega)| = 1$, eller ekvivalent $|H(\Omega)| = H(z)H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}} = 1$.

- Hvis vi f.eks. har poler $p_{1,2} = re^{\pm j\omega}$ må vi ha nullpunkter i $z_{1,2} = \frac{1}{r} e^{\pm j\omega}$.

- LTI systemer som frekvens-selektive filtre
- Ideell filterkarakteristikk & enkle filtre

Allpass filter



Minimum og maximum fase filter (et liten notat):

Vi ønsker å analyserer fasen til de påfølgende to FIR systemene:

$$H_1(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} = z^{-1}\left(z + \frac{1}{2}\right) \quad z_1 = -\frac{1}{2} \quad p_1 = 0$$

$$H_2(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} = z^{-1}\left(\frac{1}{2}z + 1\right) \quad z_1 = -2 \quad p_1 = 0$$

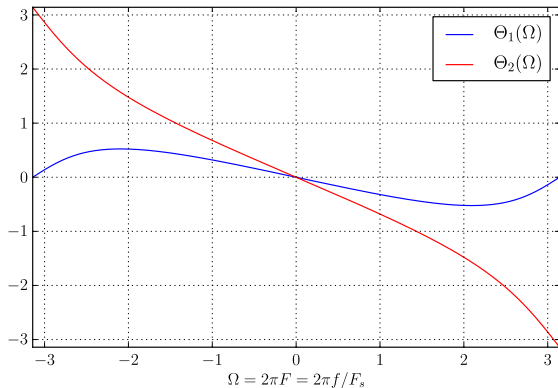
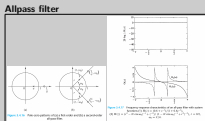
Vi finner faseresponsen til disse (\angle betyr 'fasen til'):

$$\Theta_1(\Omega) = \angle \left[e^{-j\Omega} \left(e^{j\Omega} + \frac{1}{2} \right) \right] = -\Omega + \tan^{-1} \left(\frac{\sin \Omega}{\frac{1}{2} + \cos \Omega} \right)$$

$$\Theta_1(\Omega) = \angle \left[e^{-j\Omega} \left(\frac{1}{2} e^{j\Omega} + 1 \right) \right] = -\Omega + \tan^{-1} \left(\frac{\sin \Omega}{2 + \cos \Omega} \right)$$

Respsen til disse to er plottet på neste side...

LTI systemer som frekvens-selektive filtre
 Ideell filterkarakteristikk & enkle filtre



Her er det stor forskjell på hvor mye fasen vandrer! To definisjoner er på sin plass:

- H_1 er et *minimum-phase system*, siden $\Theta_1(\pi) - \Theta_1(0) = 0$.
- H_2 er et *maximum-phase system*, siden $\Theta_2(\pi) - \Theta_2(0) = \pi$.